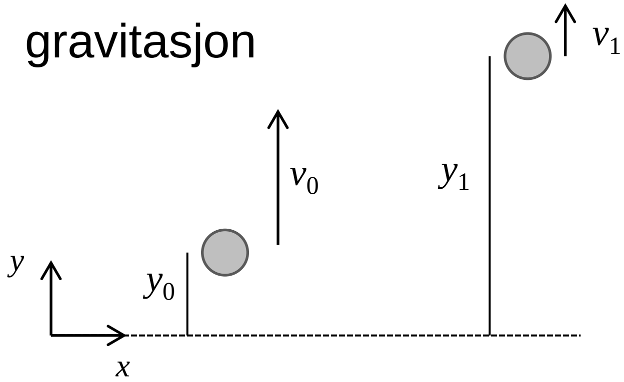
Potensiell energi

28.02.2013

oblig 5: midtveis hjemmeeksamen

- forutsetning for å ta slutteksamen
- kreves individuell innlevering
- blir lagt ut fredag 1. mars
- innleveringsfrist mandag 11. mars
- neste uke ingen forelesning
- gruppeundervisning og datalab som vanlig

gravitasjon



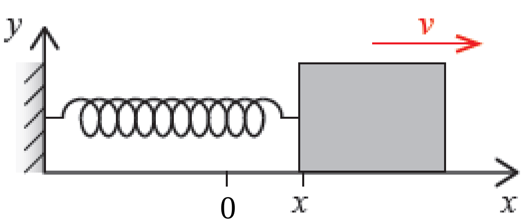
kraft: $F = -mg$

arbeid: $W_{0,1} = \int_{y_0}^{y_1} (-mg)\, dy = -mg\,(y_1 - y_0) = K_1 - K_0$

potensiell energi: $U(y) = mgy$

$U_0 + K_0 = U_1 + K_1 = E$ energibevaring

fjærkraft



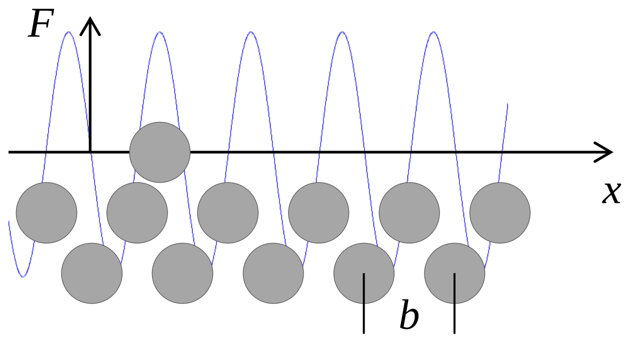
kraft: $F = -kx$

arbeid: $W_{0,1} = \int_{x_0}^{x_1} (-kx)\, dx = -k\left(\frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_0^2\right) = K_1 - K_0$

potensiell energi: $U(x) = \frac{1}{2}k x^2$

$U_0 + K_0 = U_1 + K_1 = E$ energibevaring

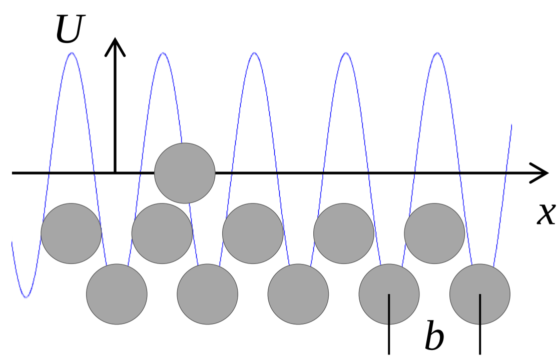
Periodisk kraft mellom atomer



kraft: $$F(x) = -F_0 \sin(\frac{2\pi x}{b})$$

arbeid: $$W_{0,1} = -F_0 \int_{x_0}^{x_1} \sin(\frac{2\pi x}{b})\, dx = -\frac{F_0 b}{2\pi}\left(-\cos(\frac{2\pi x_1}{b}) + \cos(\frac{2\pi x_0}{b})\right) = K_1 - K_0$$

potensiell energi: $$U(x) = -\frac{F_0 b}{2\pi}\cos(\frac{2\pi x}{b})$$

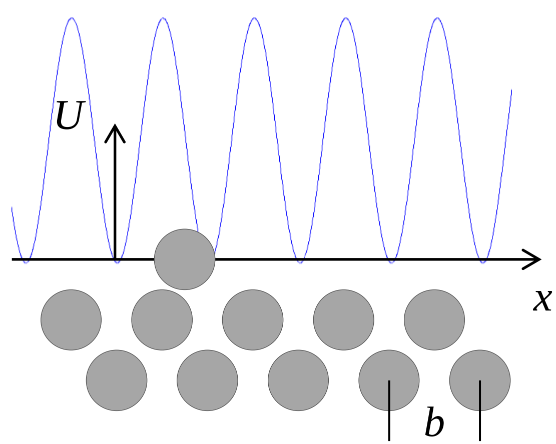


energibevaring $$K_0 + U_0 = K_1 + U_1$$

vi kan velge nullpunktet:

$$U'(x) = \frac{F_0 b}{2\pi}\left(1 - \cos(\frac{2\pi x}{b})\right)$$

$$K_0 + U_0 + C = K_1 + U_1 + C$$



eksempler: gravitasjon, fjærkraft, periodisk kraft på atomær overflate

bare posisjonsavhengige krefter

arbeid avhenger bare av start- og sluttposisjon,
ikke av veien i mellom

vi har funnet en funksjon: $U(x) = U(x_0) + \int_{x_0}^{x} \left(-F(x)\right) dx$

potensiell energi:
potensial til kraften F

arbeid-energi teorem: $W_{0,1} = \int_{x_0}^{x_1} F(x)\, dx = U(x_0) - U(x_1) = K_1 - K_0$

$K_0 + U(x_0) = K_1 + U(x_1)$ energibevaring

$$\frac{dU}{dx} = -F(x)$$

vi kan velge en annen konstant $U(x_0)$
uten konsekvens for kraften

kraft er bare posisjons-avhengig $\Leftrightarrow$ arbeid uavhengig av veien $\Leftrightarrow$ energi er bevart $\Leftrightarrow$ $\frac{dU}{dx} = -F(x)$ $\Leftrightarrow$ kraft er konservativ vertikal kast: $U(x) = mgx$

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} = -mg$$

konservative krefter

$$\frac{dU}{dx} = -F(x)$$

energibevaring

fjær: $U(x) = \frac{1}{2}k(x-b)^2$

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} = -k(x-b)$$

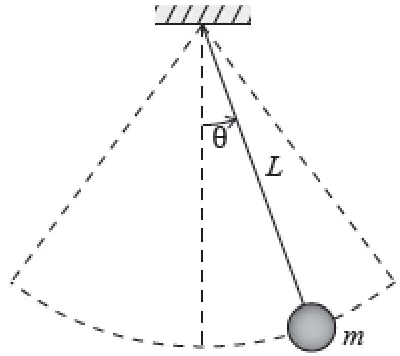
atom: $U(x) = \frac{F_0 b}{2\pi}\left(1-\cos(\frac{2\pi x}{b})\right)$

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} = -F_0 \sin\left(\frac{2\pi x}{b}\right)$$

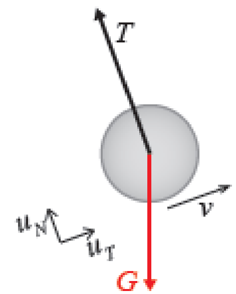
Energibevaring

Eksempel: Pendel

finn $v(\theta)$



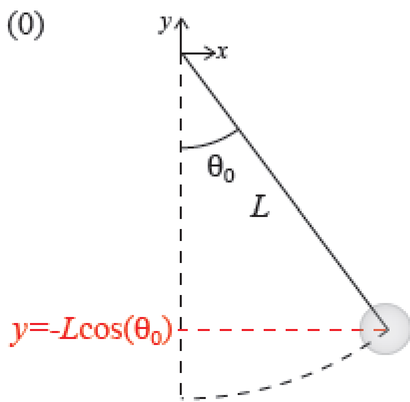
fri-legeme diagram:

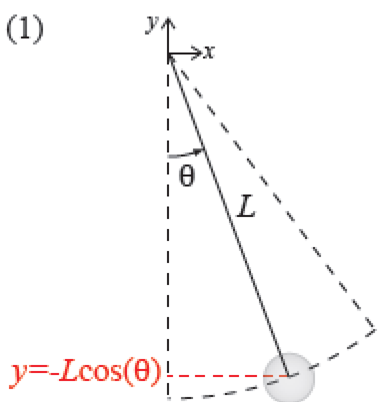


snordrag T
tyngdekraft G

snordrag er alltid normal på bevegelsesretning
$\Rightarrow$ gjør ingen arbeid

potensiell energi
fra tyngdekraften: $U(y) = mgy$





$$\cos(\theta) - \cos(\theta_0) \geq 0$$

$$\theta < \theta_0$$

energibevaring:

$$K_0 + U(y_0) = K_1 + U(y_1)$$

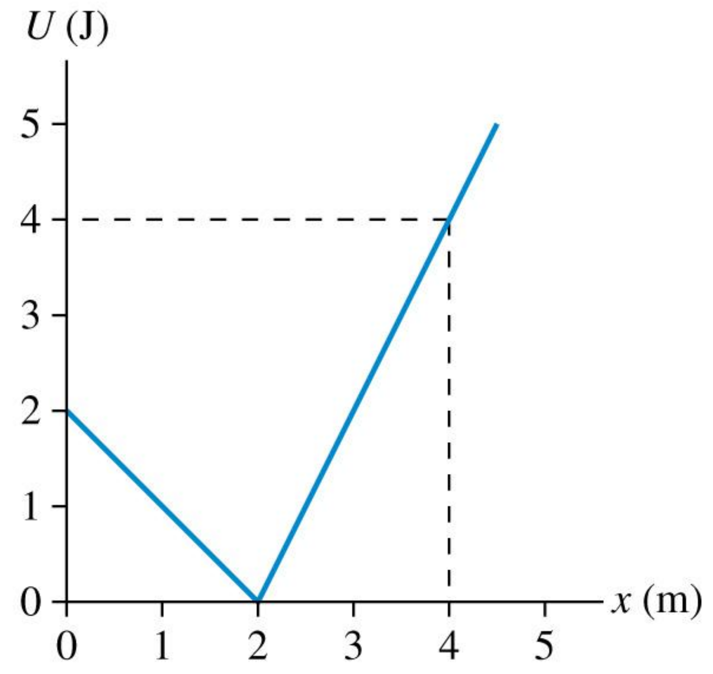
$$0 + mgy_0 = \frac{1}{2}mv_1^2 + mgy_1$$

$$mg(-L\cos(\theta_0)) = \frac{1}{2}mv_1^2 + mg(-L\cos(\theta))$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = mgL(\cos(\theta) - \cos(\theta_0))$$

$$v_1 = \pm\sqrt{2gL(\cos(\theta) - \cos(\theta_0))}$$

En partikkel beveger seg langs *x*-aksen
med potensiell energi som vist.
Kraften på partikkelen når den er i *x* = *4* m er:



1. 4 N
2. 2 N
3. 1 N
4. -1 N
5. -2 N

$$F = -\frac{dU}{dx} = -\frac{4\mathrm{J}}{2\mathrm{m}} = -\frac{4\mathrm{Nm}}{2\mathrm{m}} = -2N$$

Flere krefter

flere konservative krefter virker på et legeme langs x-aksen: $F_{\text{net}} = \sum_i F_i(x)$

$$W_{0,1} = \int_{x_0}^{x_1} F_{\text{net}}(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} \sum_i F_i(x)\,dx = \sum_i \int_{x_0}^{x_1} F_i(x)\,dx$$

siden kreftene $F_i(x)$ er konservativ: $\frac{dU_i}{dx} = -F_i(x)$

$$W_{0,1} = \sum_i \int_{x_0}^{x_1} \left(-\frac{dU_i}{dx} \right) dx = \sum_i \int_{x_1}^{x_0} \frac{dU_i}{dx}\,dx = \sum_i \big(U_i(x_0) - U_i(x_1) \big) = \sum_i U_i(x_0) - \sum_i U_i(x_1)$$

arbeid-energi teorem: $W_{0,1} = K_1 - K_0$

$$K_0 + \sum_i U_i(x_0) = K_1 + \sum_i U_i(x_1)$$

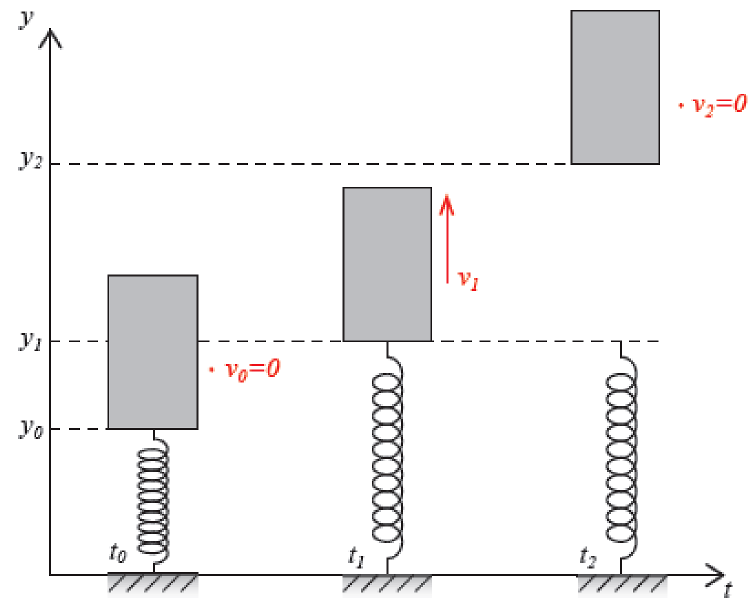
med: $U(x) = \sum_i U_i(x)$

energibevaring: $K_0 + U(x_0) = K_1 + U(x_1)$

Eksempel: Fjærkanon

fjær med likevektslengde y_1
og fjærkonstant k

Hvor høyt kommer klossen?



krefter: gravitasjon, fjærkraft
begge er konservativ

$$U(y) = U_G(y) + U_k(y) = mgy + \begin{cases} \frac{1}{2}k(y-y_1)^2 & y \le y_1 \\ 0 & y > y_1 \end{cases}$$

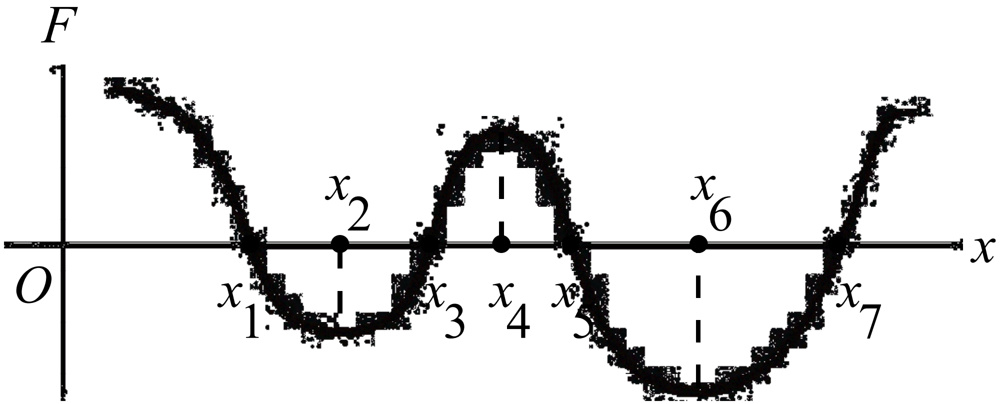
vi kan direkte sammenligne energi ved tid t_0 og t_2:

$$K_0 + U(y_0) = K_2 + U(y_2)$$

$$0 + mgy_0 + \frac{1}{2}k(y_0 - y_1)^2 = 0 + mgy_2$$

$$y_2 = y_0 + \frac{k}{2mg}(y_0 - y_1)^2$$

Kraften F virker på en partikkel som beveger seg langs x-aksen. Ved hvilke(t) av de avmerkede verdiene for x er den potensielle energien maksimal?



1. Ved $x = x_1$ og $x = x_5$
2. Ved $x = x_4$
3. Ved $x = x_2$ og $x = x_6$
4. Ved $x = x_3$ og $x = x_7$

potensiell energi $U(x)$ har ekstrem verdi ved: $\frac{dU}{dx} = -F(x) = 0$

ekstremverdien er et maksimum hvis: $\frac{d^2U}{dx^2} < 0$

$$\frac{d^2U}{dx^2} = \frac{d}{dx}\frac{dU}{dx} = -\frac{dF}{dx} < 0$$

$\frac{dF}{dx} > 0$ stigning av F positiv i x_3 og x_7

Hvordan finner vi potensialet til kraften (konservativ)?

$$\frac{dU}{dx} = -F(x)$$

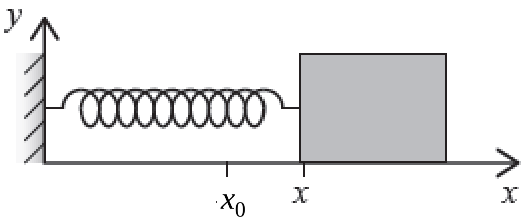
$$\int_{x_0}^{x} \frac{dU}{dx} dx = \int_{x_0}^{x} \big(-F(x)\big) dx$$

$$U(x) - U(x_0) = -\int_{x_0}^{x} F(x)\, dx$$

$$U(x) = U(x_0) + \int_{x_0}^{x} \big(-F(x)\big) dx$$

eksempel: fjærkraft

$$F(x) = -k(x - x_0)$$



$$U(x) = U(x_0) + \int_{x_0}^{x} \big(-F(x)\big) dx = U(x_0) + k\int_{x_0}^{x} (x - x_0)\, dx$$

$$= U(x_0) + k \int_{0}^{x-x_0} x'\, dx' = U(x_0) + \frac{1}{2} k (x - x_0)^2$$

vi kan velge $U(x_0)$, f. eks. $U(x_0) = 0$

$$U(x) = \frac{1}{2} k (x - x_0)^2$$

hva hvis

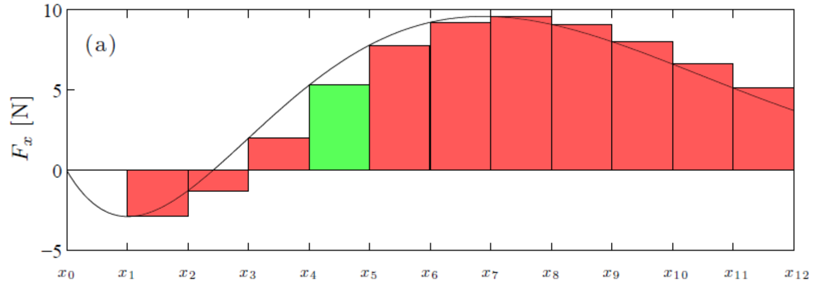
- kraften er meget komplisert
- vi kjenner kraften fra måling

$\Rightarrow$ numerisk integrasjon $\int_{x_0}^{x} F(x)\, dx$

numerisk integrasjon $\int_{x_A}^{x_B} F(x)\,dx$

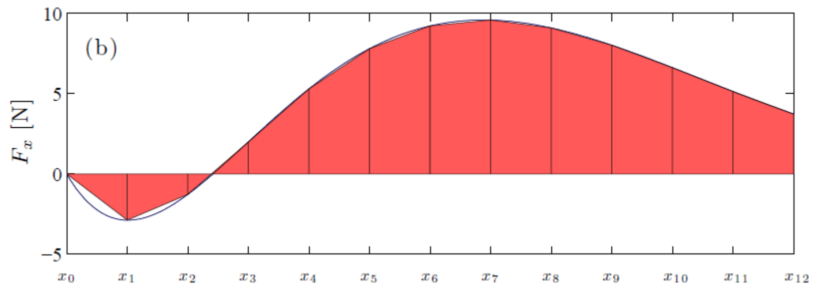
vi deler intervallet i *n* små intervaller: $\Delta x = \frac{x_B - x_A}{n}$ $x_i = x_A + i\,\Delta x$

$$\int_{x_A}^{x_B} F(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} F(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} F(x_i)\,\Delta x$$



bedre tilnærming enn rektangel: trapes

$$\int_{x_A}^{x_B} F(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2}\big(F(x_i) + F(x_{i+1})\big)\Delta x$$



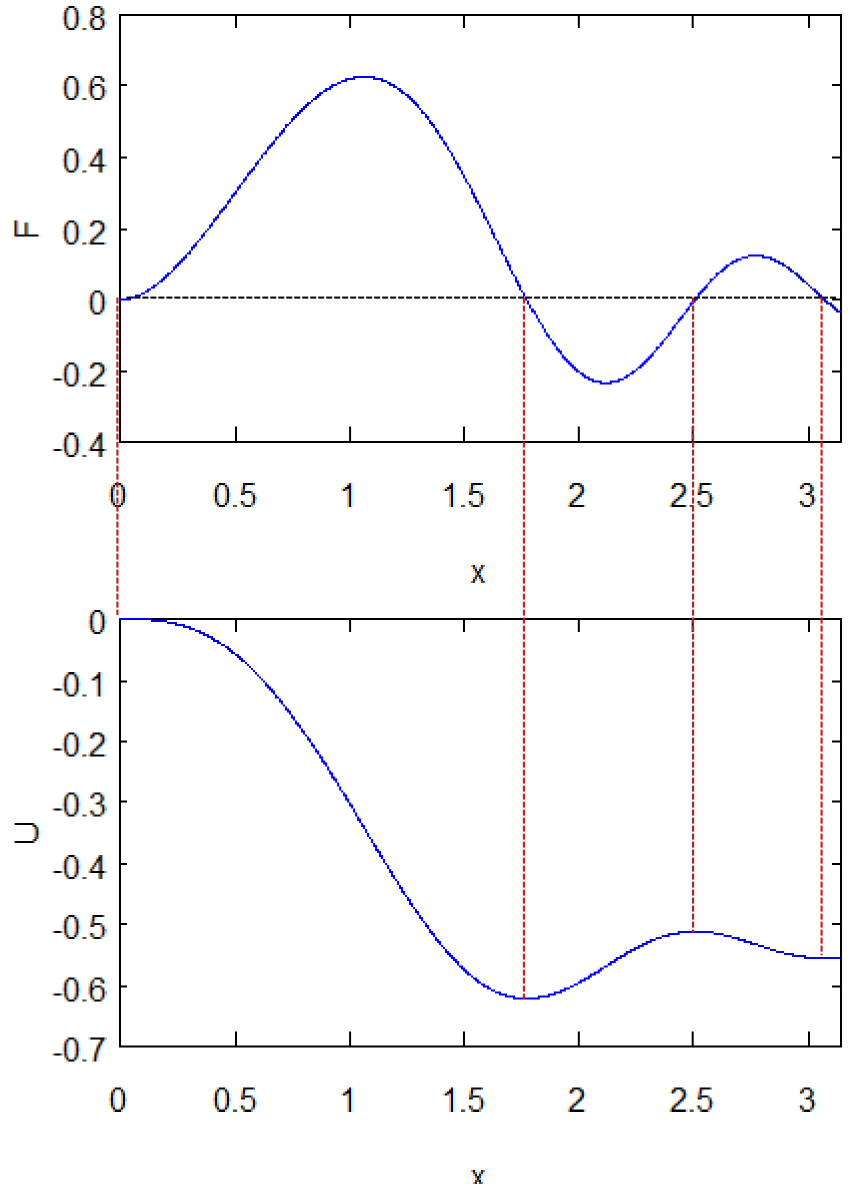
det fungerer også med uregelmessige intervaller Δx

eksempel: $F(x) = 2\sin(x^2)e^{-x}$

```
x = linspace(0,pi,1000);
F = 2*sin(x.^2).*exp(-x);
subplot(2,1,1);
plot(x,F);
xlabel('x');
ylabel('F');
I = trapz(x,F)
U = cumtrapz(x,-F);
subplot(2,1,2);
plot(x,U);
xlabel('x');
ylabel('U');
```

$$F(i) = 2\sin(x(i)^2)e^{-x(i)}$$

$$I = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2}\left(F(x_i) + F(x_{i+1})\right)\Delta x$$



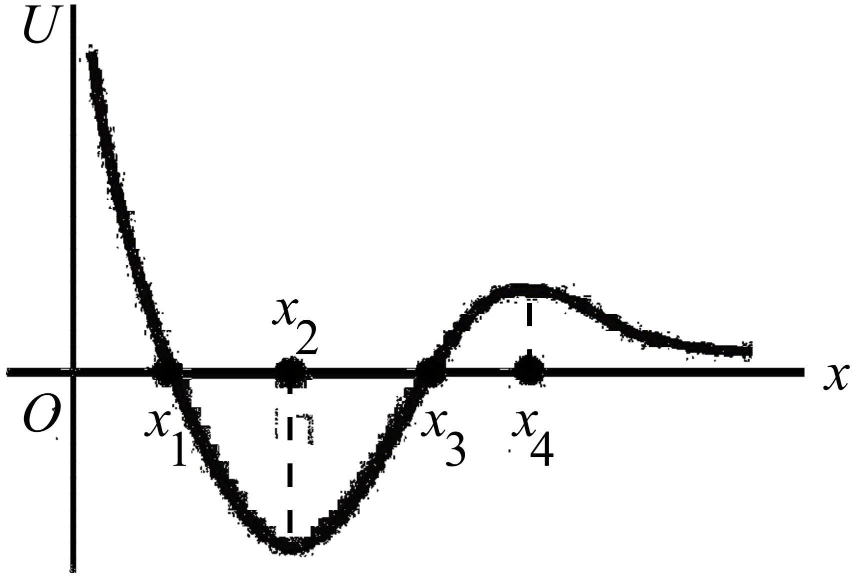
$$\int_0^{\pi} 2\sin(x^2)e^{-x}dx = 0.55396$$

$$U(x) = U(x_0) + \int_{x_0}^{x}\left(-F(x')\right)dx'$$

$$U(x_0) = 0$$

Grafen viser den potensielle energien til en partikkel som beveger seg langs *x*-aksen. Partikkelen starter ved $x=x_4$ og beveger seg i negativ *x*-retning.

Ved hvilket av de merkede punktene er farten størst?



1. Ved $x=x_1$
2. Ved $x=x_2$
3. Ved $x=x_3$
4. Ved $x=x_4$

$$E = K_i + U(x_i) = \text{konstant}$$

kinetisk energi er maksimal når potensiell energi er minimal ved x_2