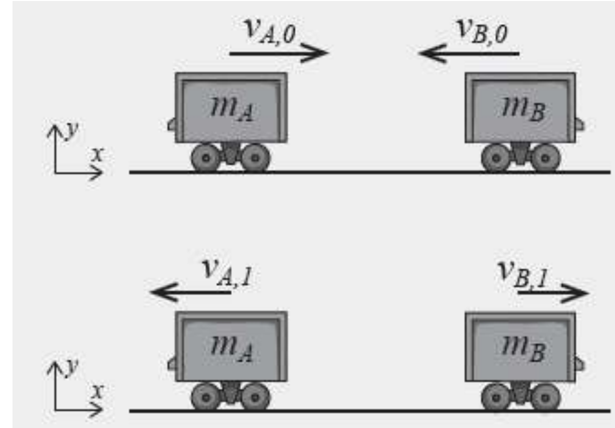
# Flerpartikkelsystemer

# Massesenter

## 02.04.2013

Kollisjoner




bevaring av bevegelsesmengde:

$$\vec{p}_{A,0} + \vec{p}_{B,0} = \vec{p}_{A,1} + \vec{p}_{B,1}$$

elastisk kollisjon $\Rightarrow$ bevaring av energi

$$\frac{1}{2}m_A v_{A,0}^2 + \frac{1}{2}m_B v_{B,0}^2 = \frac{1}{2}m_A v_{A,1}^2 + \frac{1}{2}m_B v_{B,1}^2$$

$$v_{A,1} = \frac{(m_A - m_B)v_{A,0} + 2m_B v_{B,0}}{m_A + m_B} \qquad v_{B,1} = \frac{(m_B - m_A)v_{B,0} + 2m_A v_{A,0}}{m_A + m_B}$$

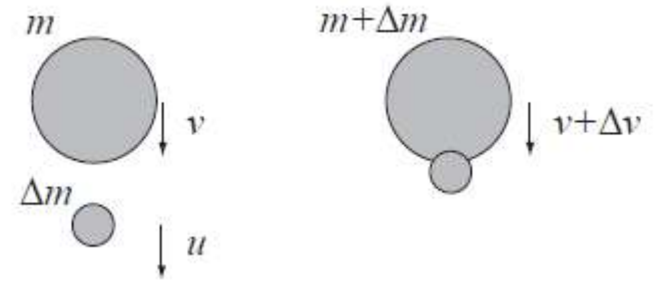
fullstendig uelastisk kollisjon: $\vec{v}_{A,1} = \vec{v}_{B,1}$

$$v_{A,1} = v_{B,1} = \frac{m_A v_{A,0} + m_B v_{B,0}}{m_A + m_B}$$

uelastisk kollisjon:

restitusjonskoeffisient: $r = -\frac{v_{B,1} - v_{A,1}}{v_{B,0} - v_{A,0}}$

En regndråpe faller og adsorberer vanndamp




før: $\vec{p}(t) = m\vec{v} + \Delta m\vec{u}$

etter: $\vec{p}(t+\Delta t) = (m+\Delta m)(\vec{v}+\Delta\vec{v})$

$$= m\vec{v} + m\Delta\vec{v} + \Delta m\vec{v} + \Delta m\Delta\vec{v}$$

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}(t+\Delta t) - \vec{p}(t) = m\Delta\vec{v} + (\vec{v}-\vec{u})\Delta m + \Delta m\Delta\vec{v}$$

Newtons andre lov: $\sum\vec{F}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{p}}{dt} \approx \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} + (\vec{v}-\vec{u})\frac{\Delta m}{\Delta t} + \Delta m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$

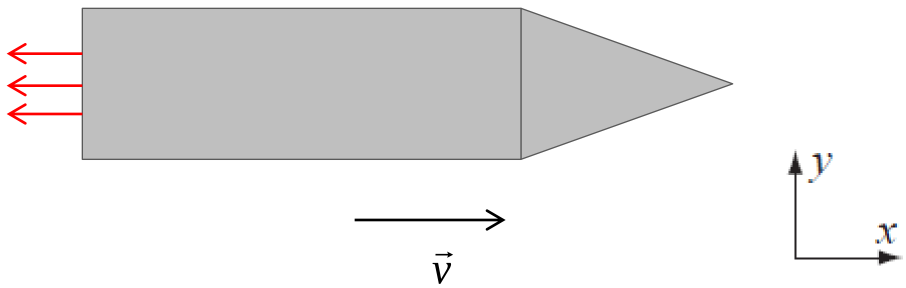
for et kort tidsintervall og en kontinuerlig adsorpsjon: $\Delta t \to 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta m \to 0, \Delta\vec{v} \to 0$

$$\Delta m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \to 0$$

rakettligning $\sum\vec{F}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} + (\vec{v}-\vec{u})\frac{dm}{dt}$

relativhastighet $\vec{v}_{\text{rel}} = \vec{u} - \vec{v}$ $\qquad \sum\vec{F}_{\text{ext}} + \vec{v}_{\text{rel}}\frac{dm}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$

# Rakett i verdensrom




ingen ytre krefter

gass strømmer ut med hastighet $\vec{v}_{\text{rel}}$ relativ til raketten

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} + \vec{v}_{\text{rel}} \frac{dm}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

i x retning: $-v_{\text{rel}} \frac{dm}{dt} = m \frac{dv}{dt}$

$$\frac{dv}{dt} = -v_{\text{rel}} \frac{1}{m} \frac{dm}{dt}$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{dv}{dt} dt = -v_{\text{rel}} \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{m} \frac{dm}{dt} dt$$

$$\int_{v(t_0)}^{v(t_1)} dv = -v_{\text{rel}} \int_{m(t_0)}^{m(t_1)} \frac{dm}{m}$$

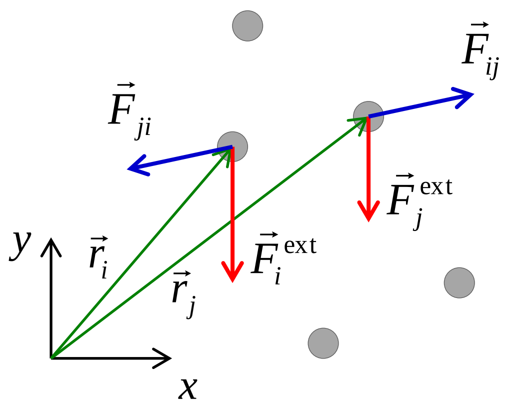
$$v(t_1) - v(t_0) = -v_{\text{rel}} \left( \ln m(t_1) - \ln m(t_0) \right)$$

$$v(t_1) = v(t_0) - v_{\text{rel}} \ln\left( \frac{m(t_1)}{m(t_0)} \right)$$

$$v(t_1) = v(t_0) + v_{\text{rel}} \ln\left( \frac{m(t_0)}{m(t_1)} \right)$$

masse blir mindre og hastighet øker

# Flerpartikkelsystemer




system: N partikler

posisjon: $\vec{r}_i(t)$ hastighet: $\vec{v}_i(t) = \frac{d\vec{r}_i}{dt}$

bevegelsesmengde: $\vec{p}_i(t) = m_i \vec{v}_i(t)$

ytre kraft på partikler: $\vec{F}_i^{\text{ext}}$

indre kraft fra partikkel $j$ på partikkel $i$ : $\vec{F}_{ji}$

nettokraft på partikkel $i$ : $\vec{F}_i^{\text{net}} = \vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji} \quad = \frac{d}{dt} \vec{p}_i$ (N2L)

bevegelse for hele systemet: $\sum_i \vec{F}_i^{\text{net}} = \sum_i \vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji} = \sum_i \frac{d}{dt} \vec{p}_i$

$\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$ (N3L)

$$\sum_i \vec{F}_i^{\text{ext}} = \frac{d}{dt} \sum_i \vec{p}_i = \frac{d}{dt} \vec{P}$$ (N2L for et flerpartikkelsystem)

bevegelsesmengde for hele systemet: $\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i$

# Flerpartikkelsystem

N2L: $\sum_i \vec{F}_i^{\text{ext}} = \frac{d}{dt}\vec{P}$

bevegelsesmengde: $\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i$

masse: $M = \sum_i m_i$

massesenter: $\vec{R} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{r}_i$ obs: $\vec{R} \neq \sum_i \vec{r}_i$

hastighet: $\vec{V} = \frac{d}{dt}\vec{R} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{v}_i$ obs: $\vec{V} \neq \sum_i \vec{v}_i$

$$\Rightarrow \quad \vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i = M\vec{V}$$

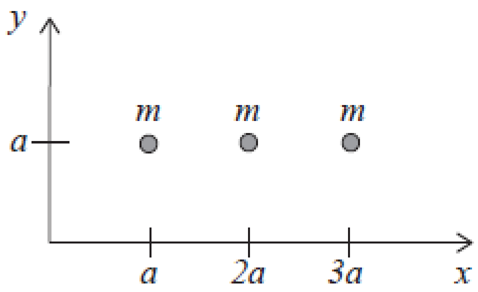
akselerasjon: $\vec{A} = \frac{d}{dt}\vec{V} = \frac{d^2}{dt^2}\vec{R} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{a}_i$

$$\sum_i \vec{F}_i^{\text{ext}} = \frac{d}{dt}\vec{P} = \frac{d}{dt}M\vec{V} = M\vec{A}$$

N2L for flerpartikkelsystem

Massesenter $\vec{R} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{r}_i$

eksempel:

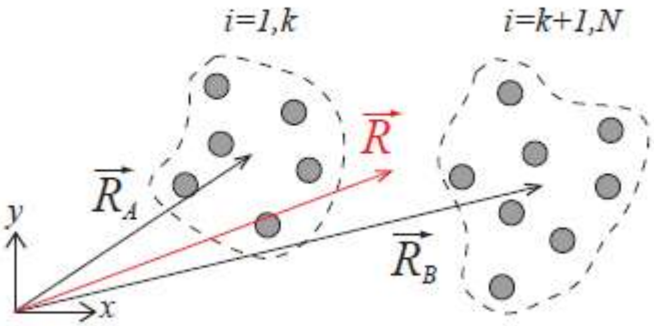



vi finner massesenteret separat for $x$ og $y$ retning:

$$X = \frac{1}{M}\sum_i m_i x_i = \frac{ma + 2ma + 3ma}{3m} = 2a$$

$$Y = \frac{1}{M}\sum_i m_i y_i = \frac{ma + ma + ma}{3m} = a$$

$$\vec{R} = 2a\,\hat{i} + a\,\hat{j}$$



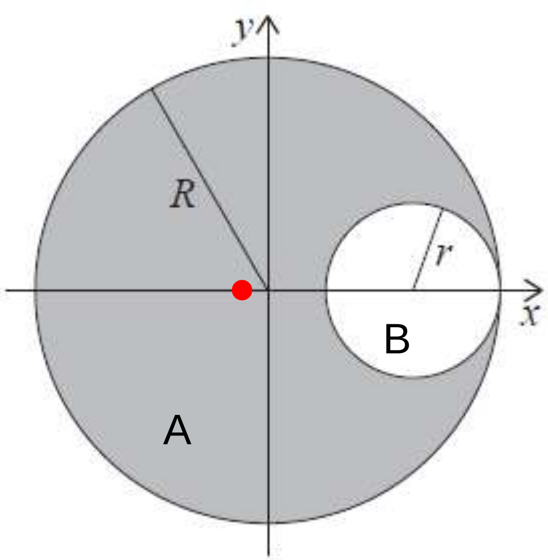

2 systemer: A og B

vi kjenner massesenteret for hver gruppe: $\vec{R}_A, \vec{R}_B$

$$M\vec{R} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i = \sum_{i=1}^{k} m_i \vec{r}_i + \sum_{i=k+1}^{N} m_i \vec{r}_i = M_A \vec{R}_A + M_B \vec{R}_B$$

massesenter for hele systemet: $\vec{R} = \dfrac{M_A \vec{R}_A + M_B \vec{R}_B}{M_A + M_B}$

Eksempel:




$$M_{AB} = \pi R^2 \rho \qquad \vec{R}_{AB} = 0$$

$$M_B = \pi r^2 \rho \qquad \vec{R}_B = (R - r)\hat{i}$$

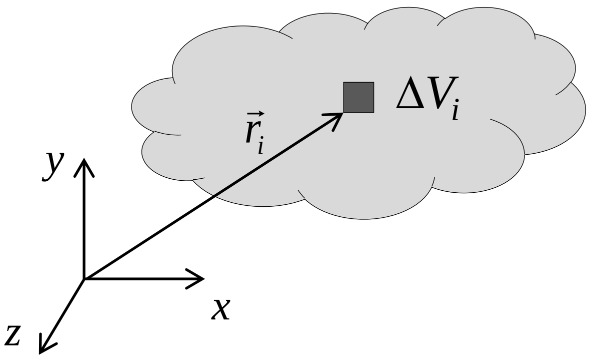
$$M_A = M_{AB} - M_B = \pi (R^2 - r^2)\rho$$

$$M_{AB}\vec{R}_{AB} = 0 = M_A \vec{R}_A + M_B \vec{R}_B$$

$$\vec{R}_A = -\frac{M_B}{M_A}\vec{R}_B = -\frac{\pi r^2 \rho}{\pi (R-r)(R+r)\rho}(R-r)\hat{i} = -\frac{r^2}{R+r}\hat{i}$$

(feil i boken)

# Massesenter til et utstrakt legeme




vi deler legemet i små volumelementer $\Delta V_i$

med masse $\Delta m_i = \rho(\vec{r}_i)\Delta V_i$

$$\vec{R} = \frac{1}{M}\sum_i \vec{r}_i \Delta m_i$$

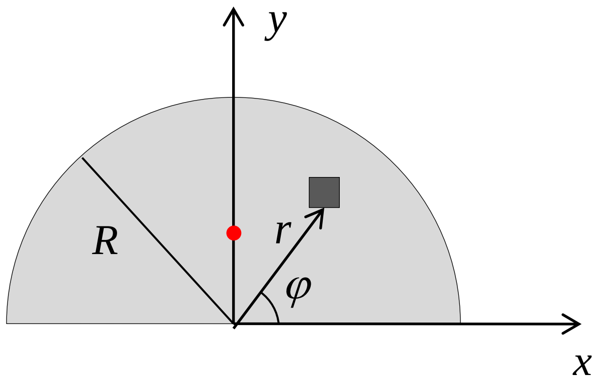
for infinitesimale volumelementer: $\vec{R} = \frac{1}{M}\int_M \vec{r}\,dm = \int_V \vec{r}\rho(\vec{r})dV$

for hver komponent: $MX = \iiint_V x\rho(x,y,z)dxdydz$

$$MY = \iiint_V y\rho(x,y,z)dxdydz$$

$$MZ = \iiint_V z\rho(x,y,z)dxdydz$$

Eksempel: homogen halvsylinder med radius *R* og tykkelse *d*




sylinderkoordinater:

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$
$$z$$

volumelement: $dV = r\,dr\,d\varphi\,dz$

$$M = \int_V \rho\,dV = \int_0^R\int_0^\pi\int_0^d \rho r\,dr\,d\varphi\,dz = \rho\int_0^R r\,dr\int_0^\pi d\varphi\int_0^d dz = \rho\frac{1}{2}R^2\pi d$$

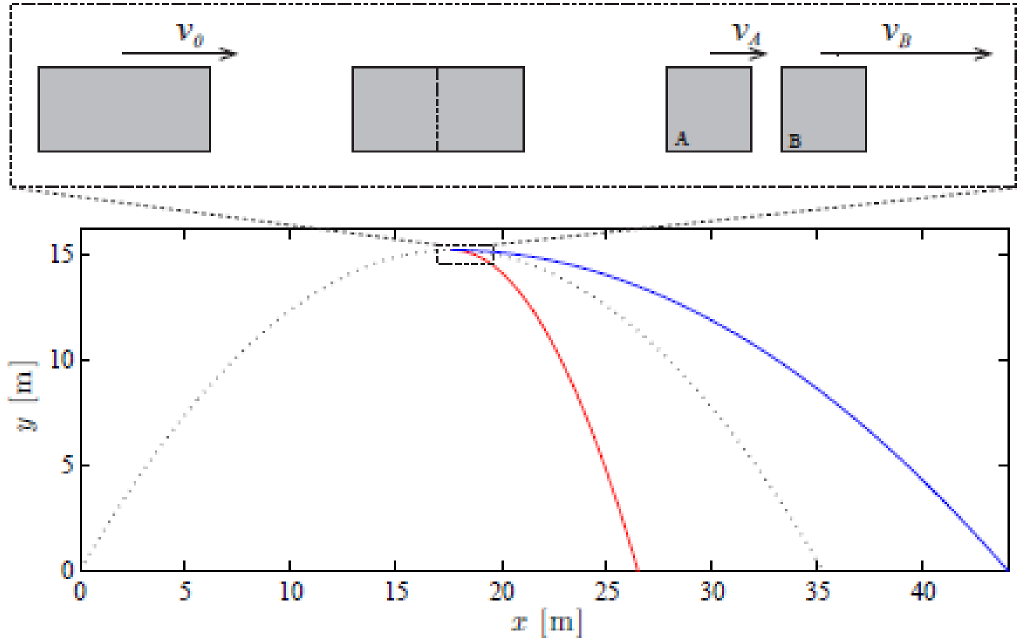
$X = 0$ på grunn av symmetri

$$MY = \iiint_V y\rho\,dV = \int_0^R\int_0^\pi\int_0^d r\sin\varphi\,\rho r\,dr\,d\varphi\,dz = \rho\int_0^R r^2dr\int_0^\pi \sin\varphi\,d\varphi\int_0^d dz = \rho\frac{1}{3}R^3 2d$$

$$Y = \frac{MY}{M} = \frac{\frac{2}{3}\rho R^3 d}{\frac{1}{2}\rho\pi R^2 d} = \frac{4R}{3\pi} \approx 0.42R$$

Eksempel: massesenterbevegelse og eksplosjon

Et legeme skytes i en parabelbane med utgangshastighet $v_0$ i x-retningen. I den maksimale høyden h utløses en ladning, som deler legemet i to like store deler. Del A farer forover med horisontal hastighet $v_A$. Finn banen til hver av legemene, og finn banen til massesenteret.



# Eksempel: massesenterbevegelse og eksplosjon

Et legeme skytes i en parabelbane med utgangshastighet $v_0$ i x-retningen. I den maksimale høyden h utløses en ladning, som deler legemet i to like store deler. Del A farer forover med horisontal hastighet $v_A$. Finn banen til hver av legemene, og finn banen til massesenteret.

bevegelsesmengde **i x-retning** før eksplosjonen: $p_0 = m v_0$

etter eksplosjonen: $p_1 = \frac{m}{2} v_A + \frac{m}{2} v_B$

ingen ytre krefter i horisontal retning $\Rightarrow$ horisontal bevegelsesmengde er bevart

$$p_0 = p_1 \qquad m v_0 = \frac{m}{2} v_A + \frac{m}{2} v_B \qquad v_B = 2 v_0 - v_A$$

bevegelse til legeme A:

$$x_A(t) = v_A t$$

$$y_A(t) = h - \frac{1}{2} g t^2$$

bevegelse til legeme B:

$$x_B(t) = v_B t = (2 v_0 - v_A) t$$

$$y_B(t) = h - \frac{1}{2} g t^2 = y_A(t)$$

massesenteret: $$X=\frac{\frac{1}{2}mx_A+\frac{1}{2}mx_B}{m}=\frac{1}{2}(x_A+x_B)$$
$$=\frac{1}{2}\big(v_A t+(2v_0-v_A)t\big)=v_0 t$$

etter eksplosjonen: massesenteret beveger seg med samme hastighet i x-retning

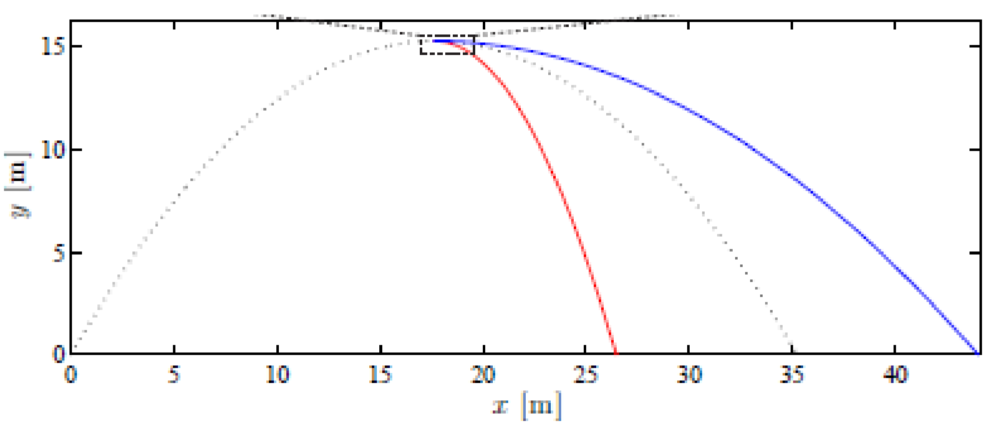
bruk av N2L for massesenteret: $F_x^{\text{ext}}=m\ddot{X}=0$ $\qquad \dot{X}=v_0$ $\qquad X=v_0 t$

$$Y=\frac{\frac{1}{2}my_A+\frac{1}{2}my_B}{m}=\frac{1}{2}(y_A+y_B)=y_A=y_B=h-\frac{1}{2}gt^2$$

bruk av N2L for massesenteret: $F_y^{\text{ext}}=m\ddot{Y}=-mg$

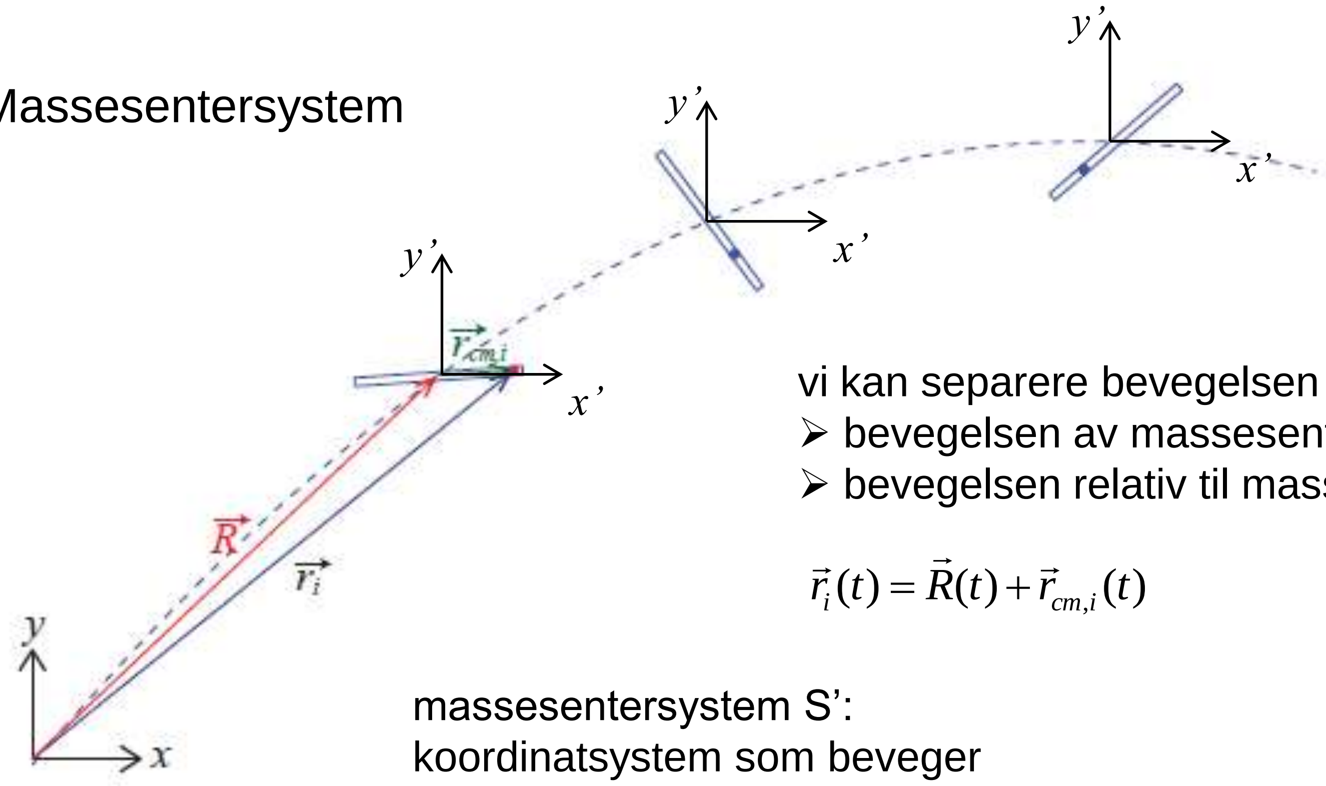
$$\dot{Y}(t)=\dot{Y}(0)-gt=-gt$$

$$Y(t)=Y(0)-\frac{1}{2}gt^2=h-\frac{1}{2}gt^2$$




eksplosjonen påvirker ikke bevegelsen til massesenteret

# Massesentersystem




vi kan separere bevegelsen i
- bevegelsen av massesenteret
- bevegelsen relativ til massesenteret

$$\vec{r}_i(t) = \vec{R}(t) + \vec{r}_{cm,i}(t)$$

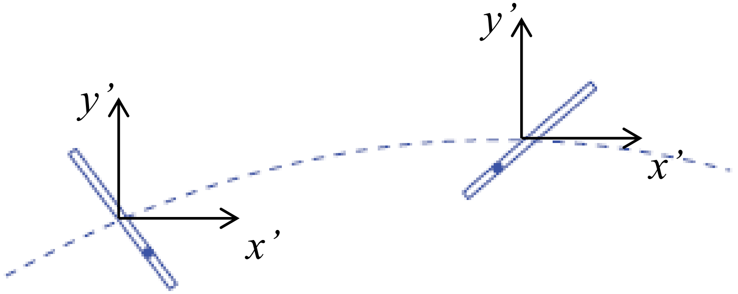
massesentersystem S':
koordinatsystem som beveger
seg med massesenteret

$$\vec{P}_{cm} = \sum_i m_i \vec{v}_{cm,i} = \sum_i m_i \frac{d}{dt}\vec{r}_{cm,i} = \frac{d}{dt}\sum_i m_i \vec{r}_{cm,i} = \frac{d}{dt} M\vec{R}_{cm}$$

$$\vec{R}_{cm} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{P}_{cm} = 0$$

bevegelsesmengde i massesentersystemet er null
uavhengig av ytre krefter

# Kinetisk energi i flerpartikkelsystem




$$\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{r}_{cm,i}$$

$$\vec{v}_i = \frac{d}{dt}\left(\vec{R} + \vec{r}_{cm,i}\right) = \frac{d\vec{R}}{dt} + \frac{d\vec{r}_{cm,i}}{dt} = \vec{V} + \vec{v}_{cm,i}$$

- hastighet til massesenteret: $\vec{V}$
- hastighet til massepunkt $i$ relativ til massesenteret: $\vec{v}_{cm,i}$

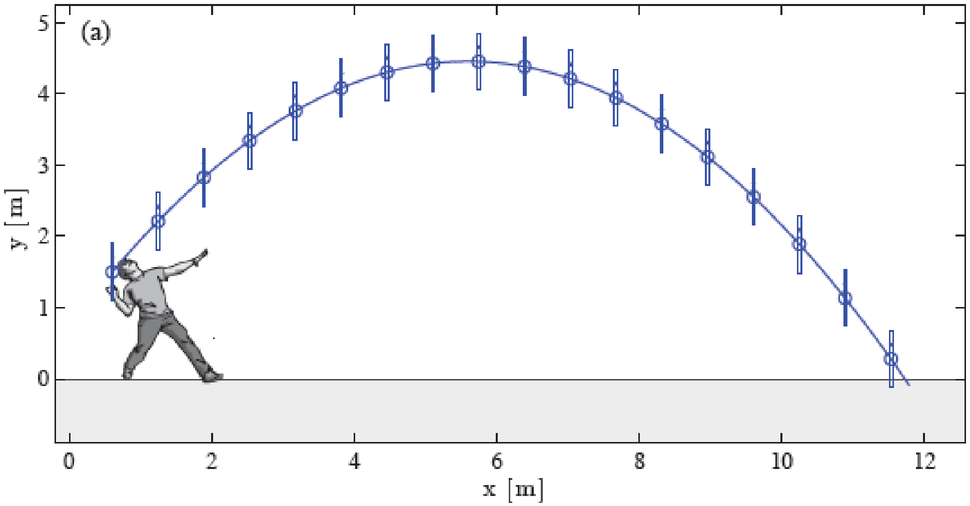
$$K = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^{\,2} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i (\vec{V} + \vec{v}_{cm,i})^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i (\vec{V}^2 + 2\vec{V} \cdot \vec{v}_{cm,i} + \vec{v}_{cm,i}^{\,2})$$

$$= \frac{1}{2} V^2 \sum_{i=1}^{N} m_i + \vec{V} \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_{cm,i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i v_{cm,i}^2 = \frac{1}{2} M V^2 + \vec{V} \cdot \vec{P}_{cm} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i v_{cm,i}^2$$

$$= \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i v_{cm,i}^2 = K_{cm} + K_{\Delta cm}$$

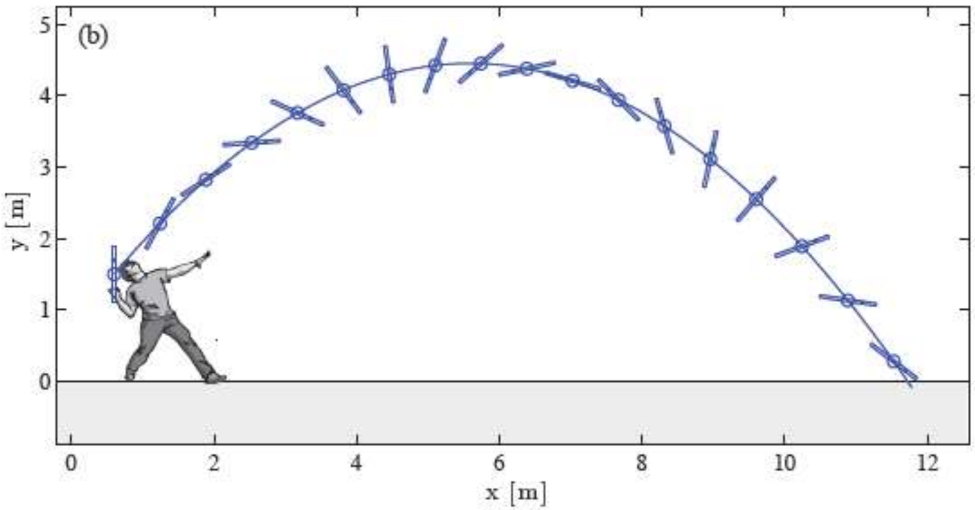
bevegelse relativ til massesenteret

bevegelse til massesenteret




ingen bevegelse relativ
til massesenteret: $v_{cm,i} = 0$

$$K = \frac{1}{2} M V^2$$




$$v_{cm,i} \neq 0$$

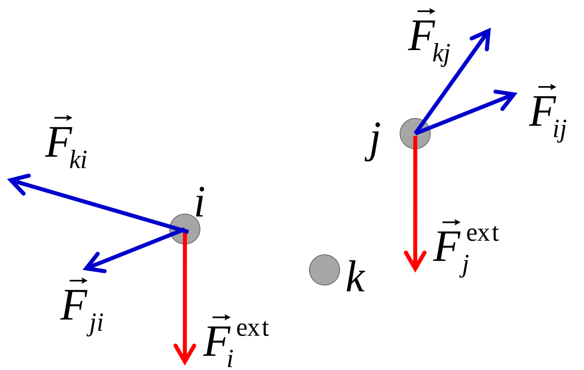
$$K = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i v_{cm,i}^2$$

kinetisk energi

- i bevegelsen til massesenteret (parabelbane)
- i bevegelsen relativ til massesenteret (rotasjon)

hvis legemet er ikke stivt:
andre frihetsgrader for relativbevegelse
f.eks. vibrasjoner

# Potensiell energi i flerpartikkelsystem




hver konservativ kraft har et tilhørende potensial

konservativ ytre kraft: $\vec{F}_i^{\text{ext}} = -\vec{\nabla} U_i(\vec{r}_i)$

$$U_{tot} = \sum_i U_i(\vec{r}_i)$$

eksempel: gravitasjon på jorden $U_i(\vec{r}_i) = m_i g\, y_i$

$$U_{tot} = \sum_i m_i g\, y_i = MgY$$

hvis det er også indre krefter: $\vec{F}_i^{\text{net}} = \vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}$

hvis krefter er konservative: $\vec{F}_i^{\text{ext}} = -\vec{\nabla} U_i(\vec{r}_i)$ $\qquad \vec{F}_{ji} = -\vec{\nabla} U_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j)$

$$U_{tot} = \sum_i U_i(\vec{r}_i) + \sum_{i<j} U_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = U_{ext} + U_{\text{int}}$$

$$E_{tot} = K_{cm} + K_{\Delta cm} + U_{ext} + U_{\text{int}}$$