Flerpartikkelsystemer

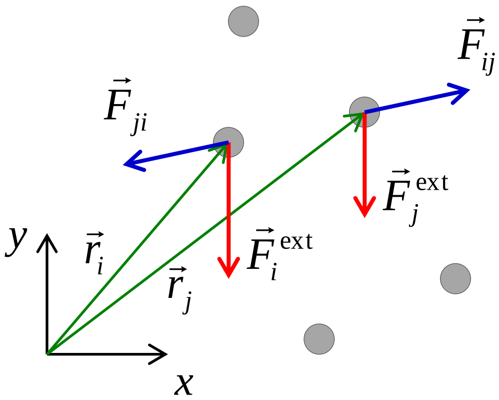
Rotasjonsbevegelser

04.04.2013

spinntur:

- regne på oblig8
- deltakere får automatisk godkjent oblig8
  (trenger ikke men kan levere)

Flerpartikkelsystemer



nettokraft på partikkel i : $\vec{F}_i^{\,\mathrm{net}} = \vec{F}_i^{\,\mathrm{ext}} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji} \;\; = \frac{d}{dt}\vec{p}_i$ (N2L)

hele systemet: $\sum_i \vec{F}_i^{\,\mathrm{net}} = \sum_i \vec{F}_i^{\,\mathrm{ext}} + \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji} = \sum_i \vec{F}_i^{\,\mathrm{ext}}$

$$\sum_i \vec{F}_i^{\,\mathrm{ext}} = \sum_i \frac{d}{dt}\vec{p}_i = \frac{d}{dt}\sum_i \vec{p}_i = \frac{d}{dt}\vec{P}$$

(N2L for flerpartikkelsystem)

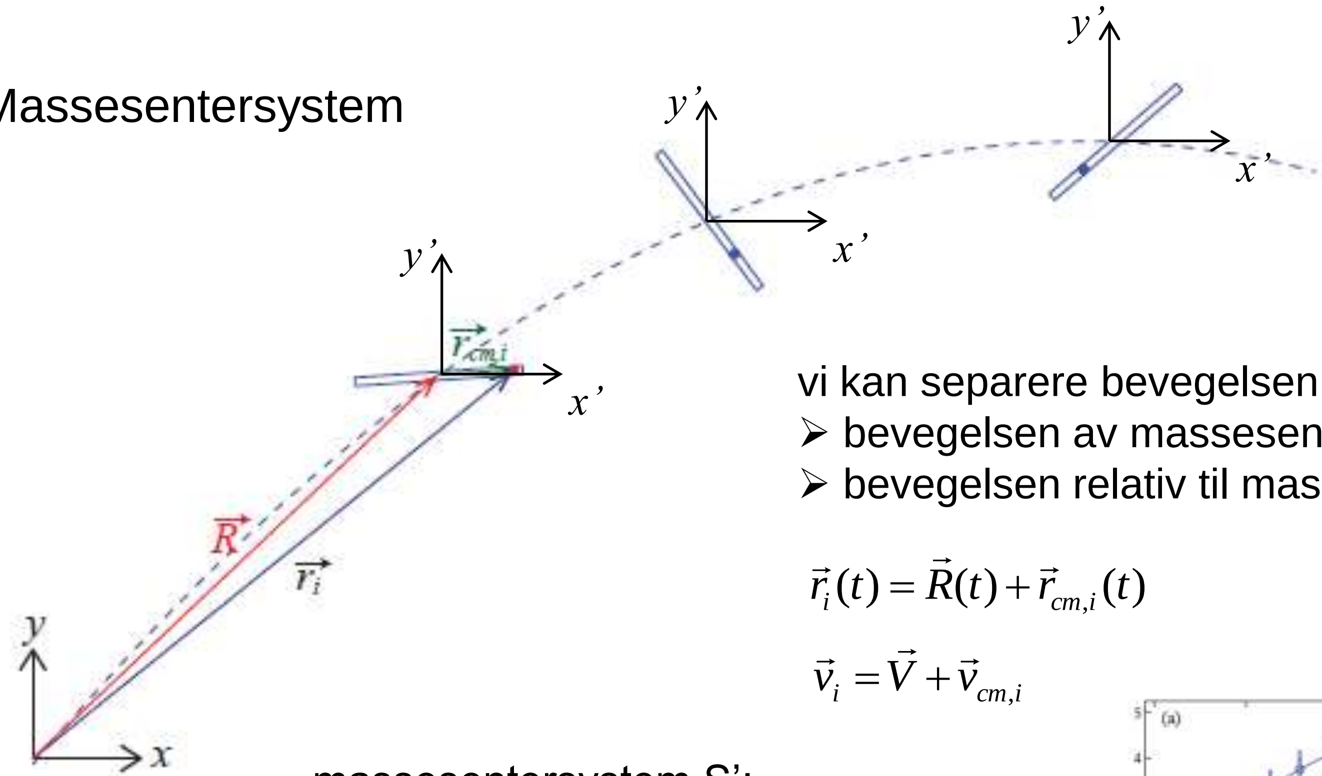
massesenter: $\vec{R} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{r}_i$

for utstrakte legemer: $\vec{R} = \frac{1}{M}\int_M \vec{r}\,dm = \int_V \vec{r}\rho(\vec{r})\,dV$

hastighet: $\vec{V} = \frac{d}{dt}\vec{R} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{v}_i = \frac{1}{M}\sum_i \vec{p}_i = \frac{1}{M}\vec{P}$

$$\sum_i \vec{F}_i^{\,\mathrm{ext}} = \frac{d}{dt}\vec{P} = \frac{d}{dt}M\vec{V} = M\vec{A}$$

Massesentersystem

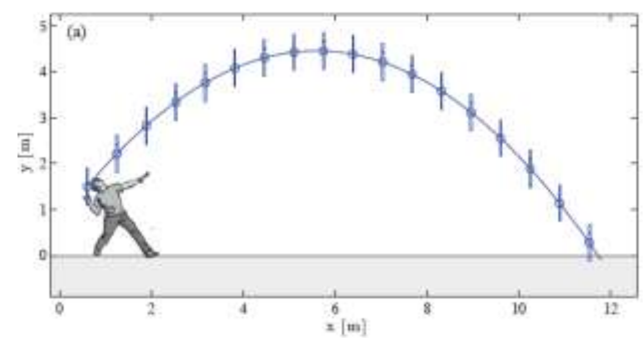


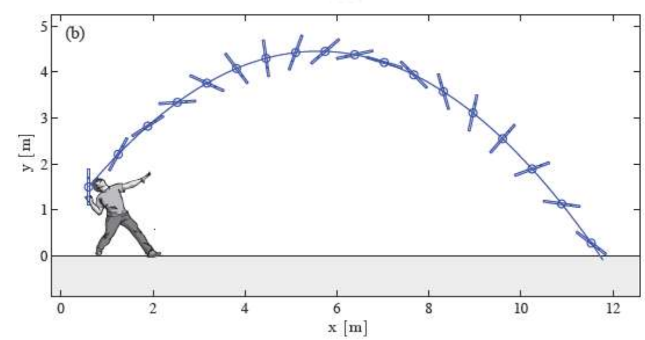
vi kan separere bevegelsen i
- bevegelsen av massesenteret
- bevegelsen relativ til massesenteret

$$\vec{r}_i(t) = \vec{R}(t) + \vec{r}_{cm,i}(t)$$

$$\vec{v}_i = \vec{V} + \vec{v}_{cm,i}$$

massesentersystem S':
koordinatsystem som beveger seg med massesenteret

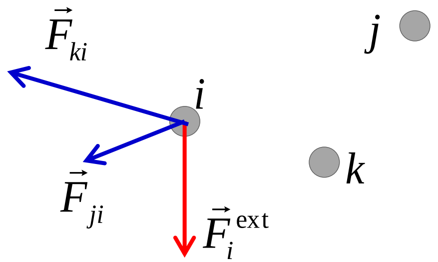




bevegelsesmengde: $\vec{P}_{cm} = 0$

kinetiske energi: $K = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i v_{cm,i}^2 = K_{cm} + K_{\Delta cm}$

Potensiell energi i flerpartikkelsystem



konservativ ytre kraft: $\vec{F}_i^{\,\text{ext}} = -\vec{\nabla} U_i(\vec{r}_i)$

$$U_{tot} = \sum_i U_i(\vec{r}_i)$$

eksempel: gravitasjon på jorden $U_i(\vec{r}_i) = m_i g\, y_i$

$$U_{tot} = \sum_i m_i g\, y_i = MgY$$

hvis det er også indre krefter: $\vec{F}_i^{\,\text{net}} = \vec{F}_i^{\,\text{ext}} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}$

hvis indre kreft er konservativ: $\vec{F}_{ji} = -\vec{\nabla} U_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j)$

$$U_{tot} = \sum_i U_i(\vec{r}_i) + \sum_{i<j} U_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = U_{ext} + U_{\text{int}}$$

$$E_{tot} = K_{cm} + K_{\Delta cm} + U_{ext} + U_{\text{int}}$$

Energibevaring i flerpartikkelsystemer

konservative krefter $\Rightarrow E_{\text{tot}}$ er bevart

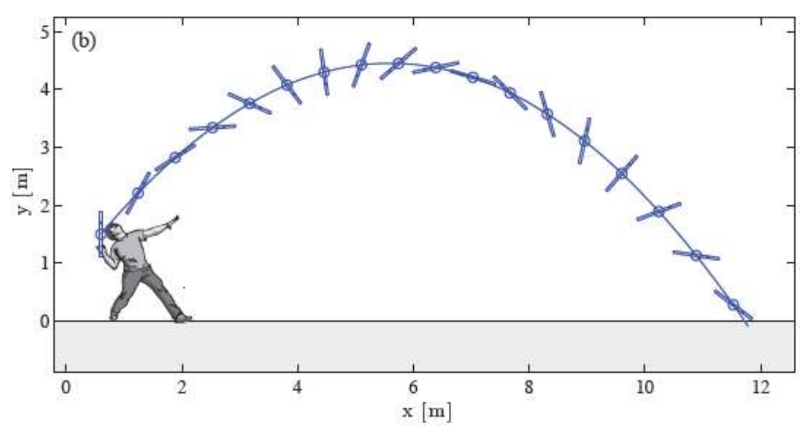
$$E_{tot} = K_{cm} + K_{\Delta cm} + U_{ext} + U_{\text{int}}$$

K_{cm} og U_{ext} er ofte relativt lett tilgjenglig,
men det kan være vanskelig å finne $K_{\Delta\text{cm}}$ og U_{int}

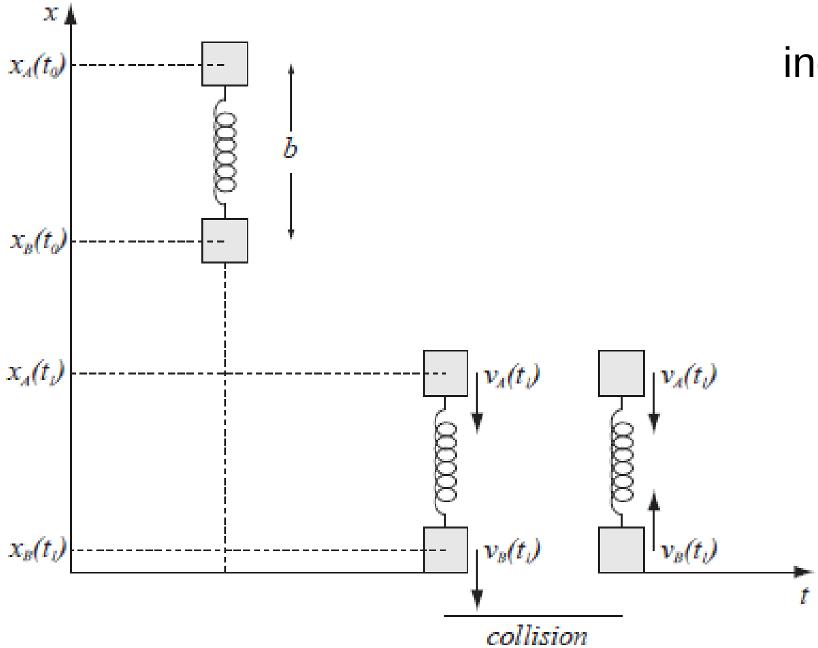
energibevaring kan gi informasjon om
indre kinetisk og potensiell energi:
hvor høyt spretter ballongen opp igjen?

spesialfall: stivt legeme

- partikler beveger seg ikke relativ til hverandre
- partikler kan bevege seg relativ til massesenteret
- bevegelsen beskrives ved translasjoner og rotasjoner
- ingen vibrasjoner eller deformasjoner



Eksempel



ytre kraft: gravitasjon $\vec{G}_A = \vec{G}_B = -mg\,\hat{j}$

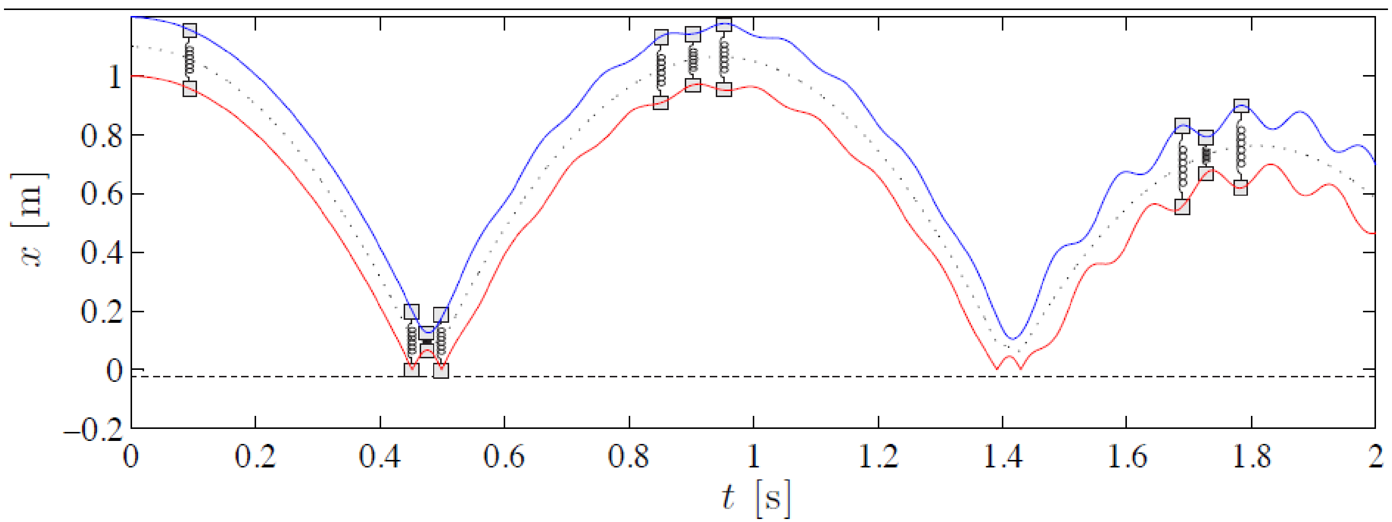
indre kraft: fjærkraft $\vec{F}_A = -k(x_A - x_B - b)\,\hat{j}$

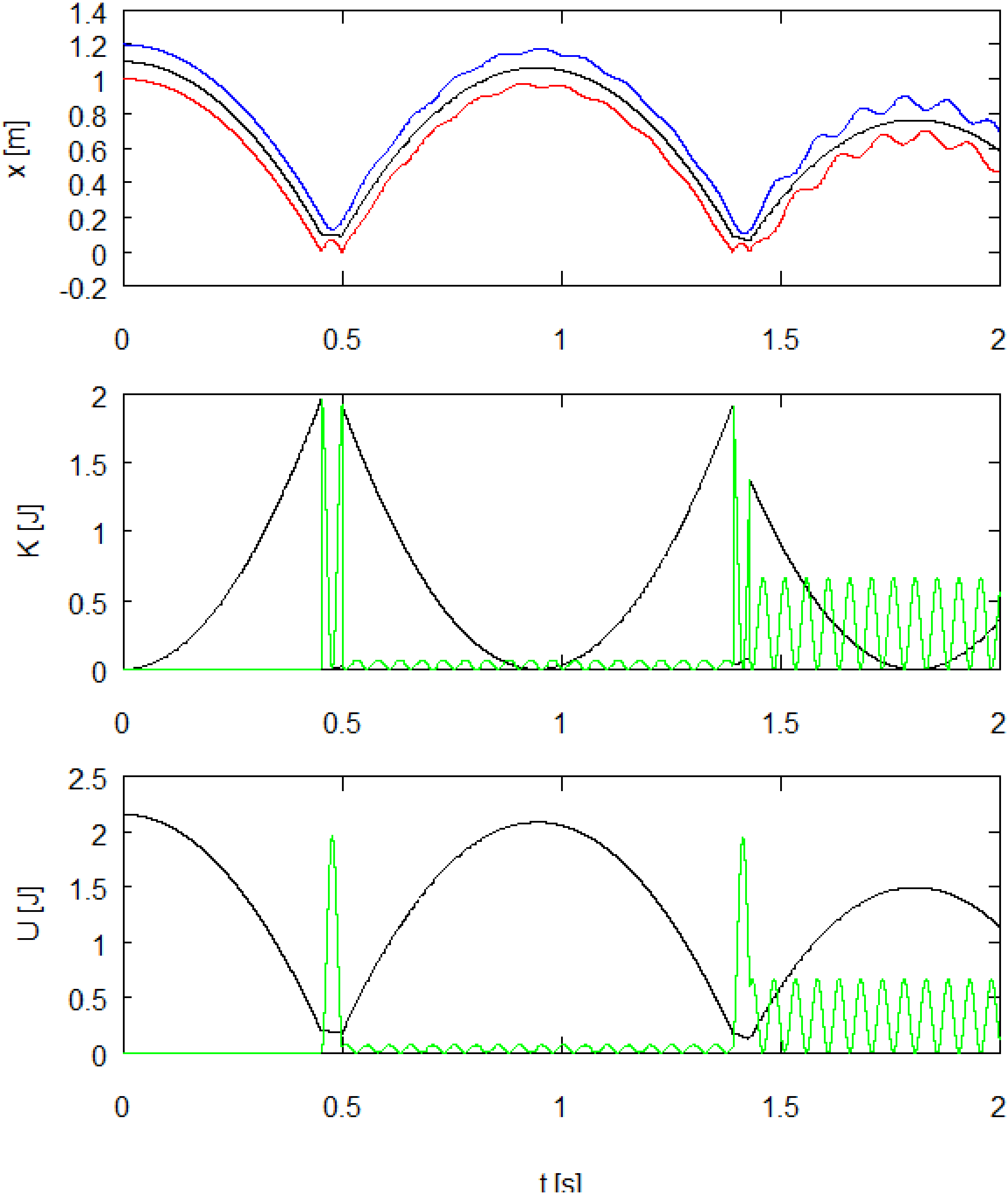
$$\vec{F}_B = -\vec{F}_A = k(x_A - x_B - b)\,\hat{j}$$

partikkel B kolliderer elastisk med gulvet

vi har et modell og vi kan løse problemet numerisk (Ex. 13.5 i boken)

massesenter: $X = \dfrac{mx_A + mx_B}{2m} = \dfrac{1}{2}(x_A + x_B)$





X

x_A

x_B

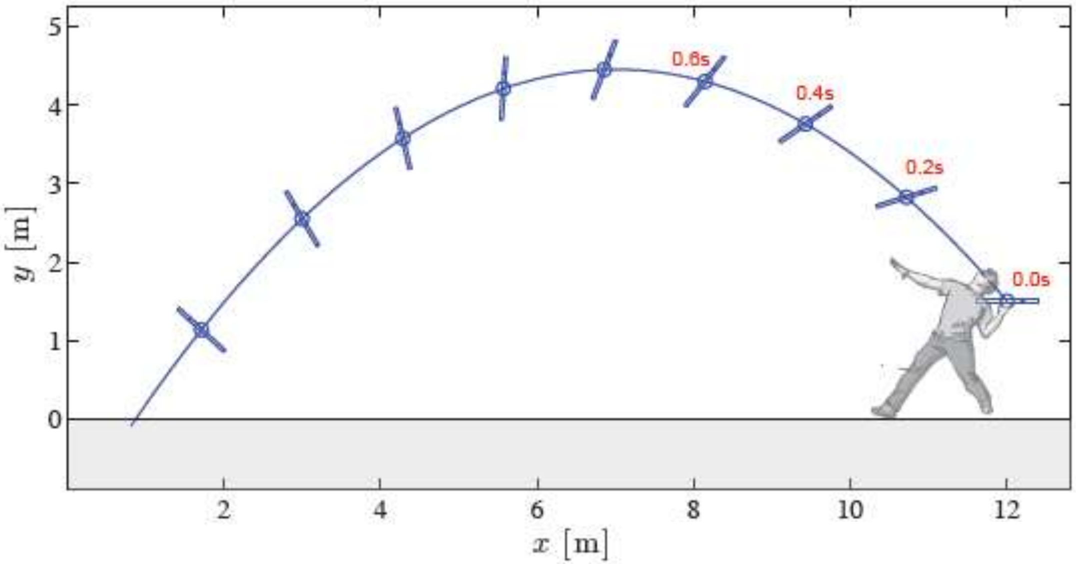
$$K_{cm} = \frac{1}{2} M V^2$$

$$K_{\Delta cm} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i v_{cm,i}^2$$

$$U_{\text{ext}} = mg(x_A + x_B)$$

$$U_{\text{int}} = \frac{1}{2} k (x_A - x_B - b)^2$$

obs: mer realistisk modell bør ta hensyn til rotasjoner!

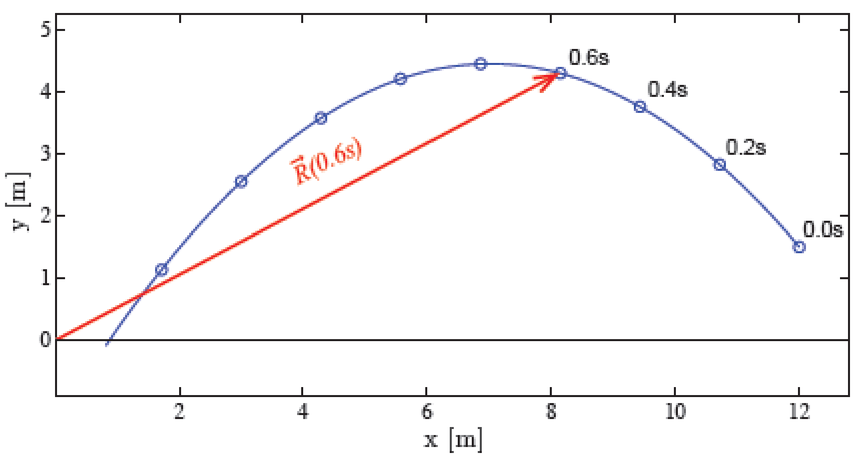


vi separere bevegelsen:

- bevegelsen til massesenteret
- bevegelsen relativ til massesenteret

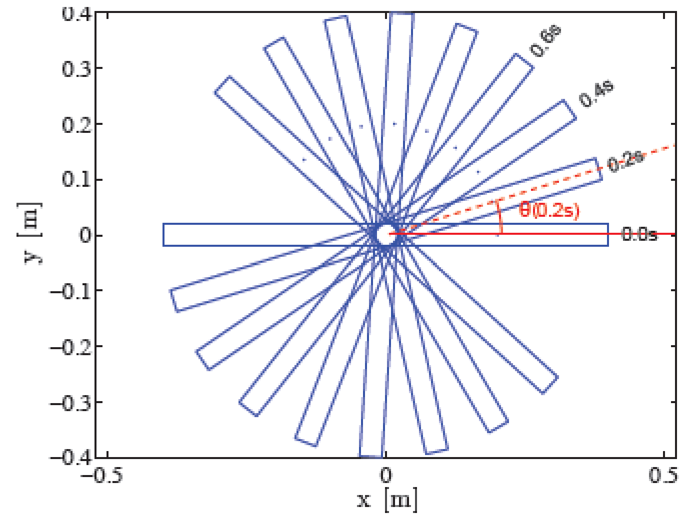
$$\vec{r}_i(t) = \vec{R}(t) + \vec{r}_{cm,i}(t)$$

bevegelsen til massesenteret



bevegelsen bestemmes av ytre krefter som virker på staven

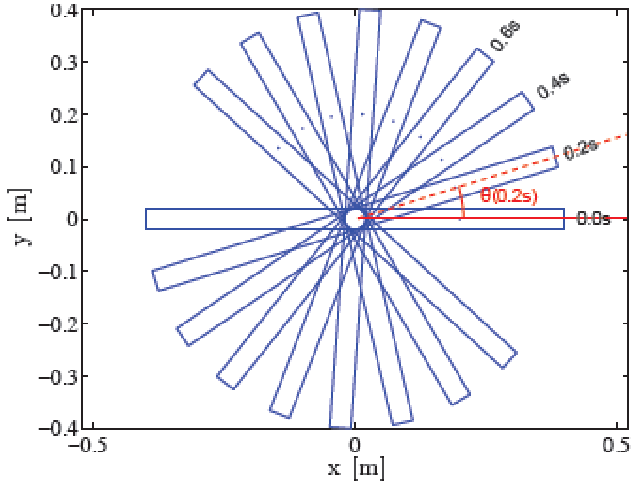
bevegelsen relativ til massesenteret



jevn rotasjon om massesenteret til staven

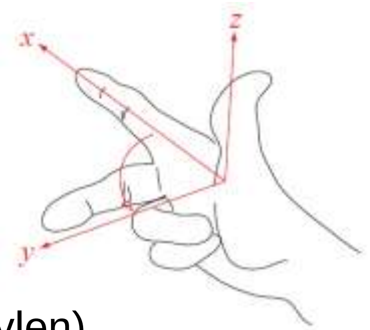
Rotasjonsbevegelse

bevegelsesdiagram

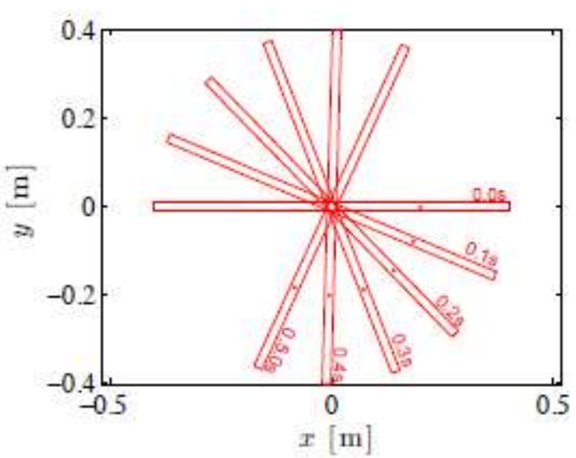


vi karakteriserer rotasjonsbevegelser:

- rotasjonsakse
- rotasjonsvinkel



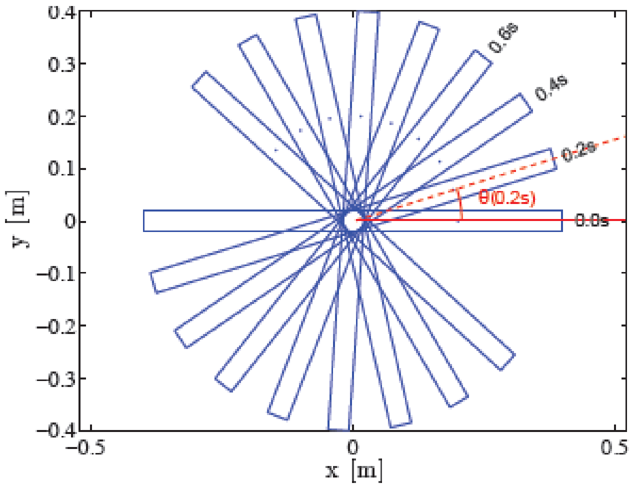
z akse som rotasjonsakse (ut av tavlen)
⇒ rotasjon i positiv retning



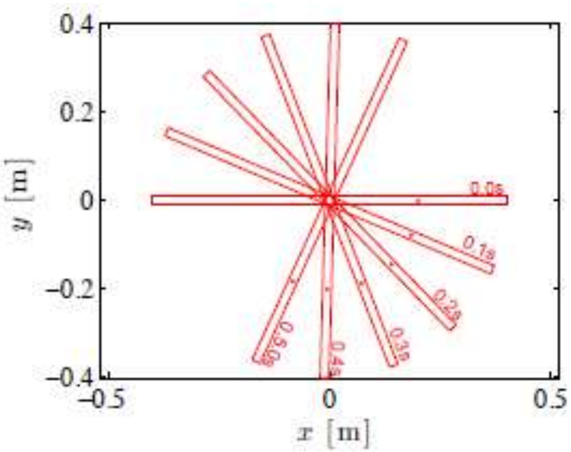
negativ z akse som rotasjonsakse (inn i tavlen)
⇒ rotasjon i negativ retning

vi ser også: rotasjon går raskere:
vinkelen forandrer seg mer i samme tid

Vinkelhastighet



konstant vinkelhastighet: $\omega = 1.5 \text{ rad/s}$



konstant vinkelhastighet: $\omega = -4 \text{ rad/s}$

gjennomsnittlig vinkelhastighet:

$$\overline{\omega} = \frac{\theta(t+\Delta t) - \theta(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \theta}{\Delta t}$$

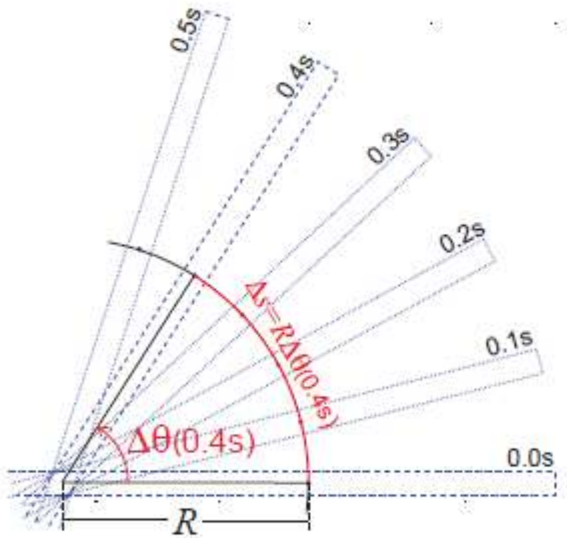
momentan vinkelhastighet:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$$

ω trenger ikke være konstant:

(momentan) vinkelakselerasjon:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta}$$



es stav roterer med vinkelhastighet ω:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \approx \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

en punkt i avstand R fra rotasjonsakse beveger seg en buelengde Δs i tidsintervall Δt

$$\Delta s = R\Delta\theta$$

$$v \approx \frac{\Delta s}{\Delta t} = R\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$v = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} = R\omega$$

hvis vinkelhastighet er konstant:

$$v = R\omega = \frac{2\pi R}{T}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

T: tid for en omløp, periode

	translasjon	rotasjon
posisjon	$x(t)$	$\theta(t)$
hastighet	$v(t) = \frac{dx}{dt}$	$\omega(t) = \frac{d\theta}{dt}$
akselerasjon	$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$	$\alpha(t) = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$

vi kan integrere bevegningsligninger på samme mote:

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega(t)$$

$$\int_{t_0}^{t} \frac{d\theta}{dt} dt = \int_{t_0}^{t} \omega(t) dt$$

$$\theta(t) - \theta(t_0) = \int_{t_0}^{t} \omega(t) dt$$

for konstant vinkelhastighet: $$\theta(t) = \theta(t_0) + \omega(t - t_0)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \alpha(t)$$

$$\int_{t_0}^{t} \frac{d\omega}{dt} dt = \int_{t_0}^{t} \alpha(t) dt$$

$$\omega(t) - \omega(t_0) = \int_{t_0}^{t} \alpha(t) dt$$

$$\theta(t) = \theta(t_0) + \int_{t_0}^{t} \omega(t) dt$$

$$\theta(t) = \theta(t_0) + \int_{t_0}^{t} \left(\omega(t_0) + \int_{t_0}^{t} \alpha \, dt \right) dt$$

$$\theta(t) = \theta(t_0) + \omega(t_0)(t - t_0) + \int_{t_0}^{t} \left(\int_{t_0}^{t} \alpha \, dt \right) dt$$

for konstant akselerasjon: $\theta(t) = \theta(t_0) + \omega(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2} \alpha (t - t_0)^2$

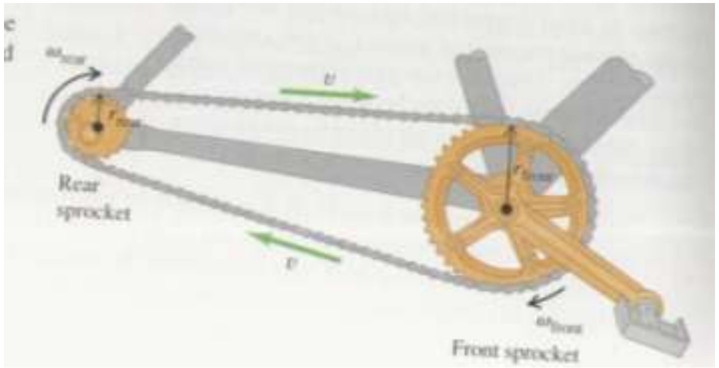
for en gitt akselerasjon $\alpha(t)$ og initialbetingelser $\theta(t_0)$ og $\omega(t_0)$ kan vi beregner vinkel og vinkelhastighet:

analytisk ved integrasjon eller numerisk:

$$\omega(t_{i+1}) \approx \omega(t_i) + \alpha(t_i)(t_{i+1} - t_i)$$
$$\theta(t_{i+1}) \approx \theta(t_i) + \omega(t_{i+1})(t_{i+1} - t_i)$$

(Euler-Cromer)

Du sykler slik at pedal tannhjulet får en vinkelakselerasjon α_A. Vinkelakselerasjon til bakhjulet α_B er:



1. $\alpha_B < \alpha_A$
2. $\alpha_B = \alpha_A$
3. $\alpha_B > \alpha_A$

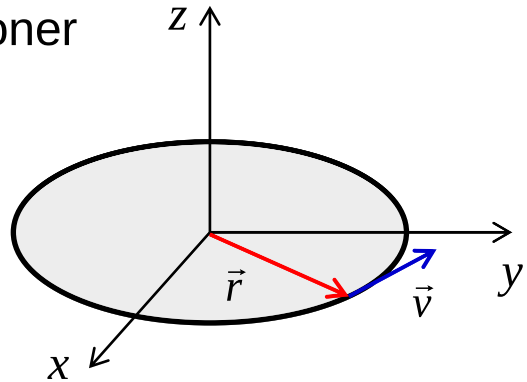
hastighet til kjeden: $v = r_A \omega_A = r_B \omega_B$

$$\omega_B = \frac{r_A}{r_B}\omega_A$$

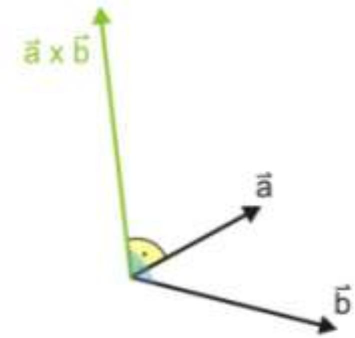
$$\alpha_B = \frac{d\omega_B}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{r_A}{r_B}\omega_A\right) = \frac{r_A}{r_B}\frac{d\omega_A}{dt} = \frac{r_A}{r_B}\alpha_A$$

$$r_A > r_B \quad \Rightarrow \quad \alpha_B > \alpha_A$$

Rotasjoner i tre dimensjoner



vi velger et koordinatsystem:
- z akse er rotasjonsakse
- rotasjon i x-y planet



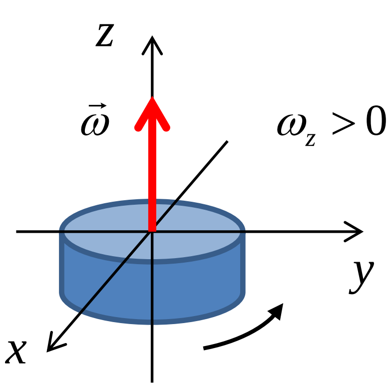
en punkt i avstand r fra rotasjonsakse
beveger seg på en sirkelbane med fart $v = \omega r$

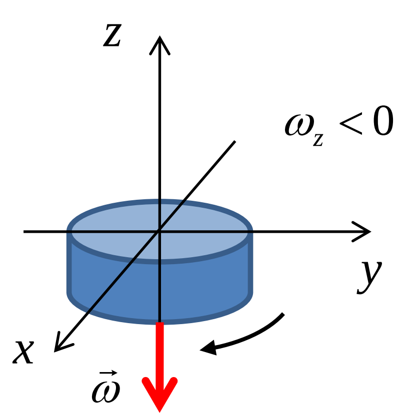
hastighet har tangensial retning: $\vec{v} \perp \vec{r}, \quad = \vec{v} \perp \hat{k}$

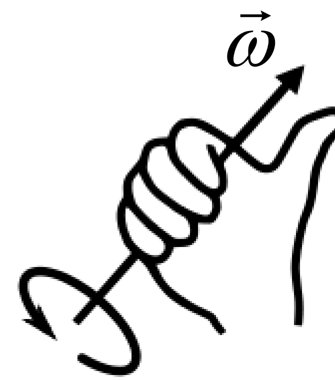
$$\vec{v} = \omega \hat{k} \times \vec{r}$$

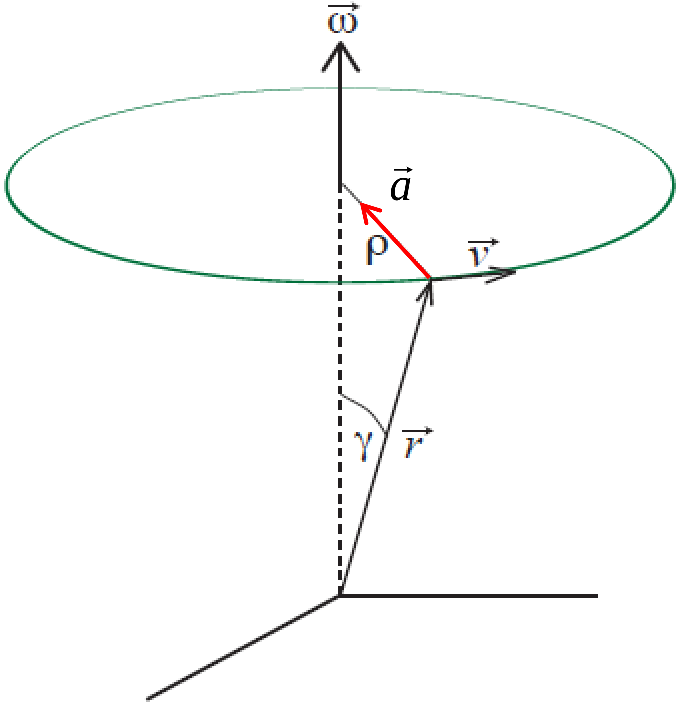
vi kan definere vinkelhastighet som en vektor: $\vec{\omega} = \omega \hat{k}$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$









punkt $\vec{r}(t)$ beveger seg på en sirkelbane med radius ρ
rotasjonsaksen $\vec{\omega}$ peker i z-retning

$$\vec{v} \perp \vec{\omega}, \quad \vec{v} \perp \vec{r}$$

$$v = \omega\rho = \omega r \sin\gamma$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

akselerasjon:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}$$

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

for sirkelbevegelse med
konstant vinkelhastighet: $\vec{\alpha} = 0$

$$\vec{a} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

$$|\vec{a}| = |\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})| = \omega v = \omega^2 r \sin\gamma = \omega^2 \rho = \frac{v^2}{\rho}$$

sentripetalakselerasjon