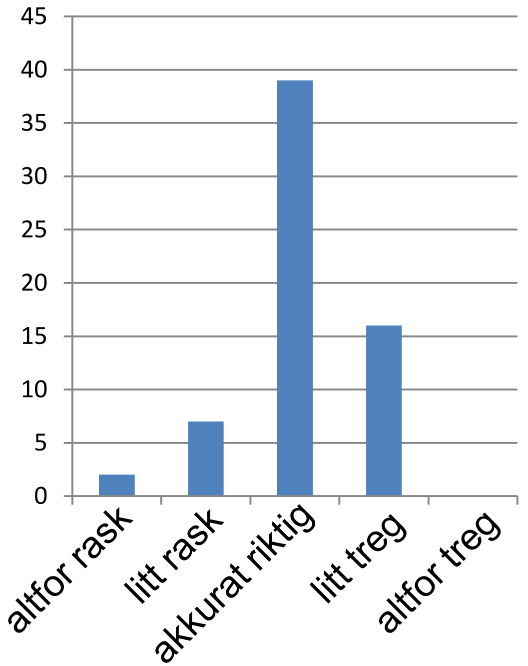
Stivt legemers dynamikk

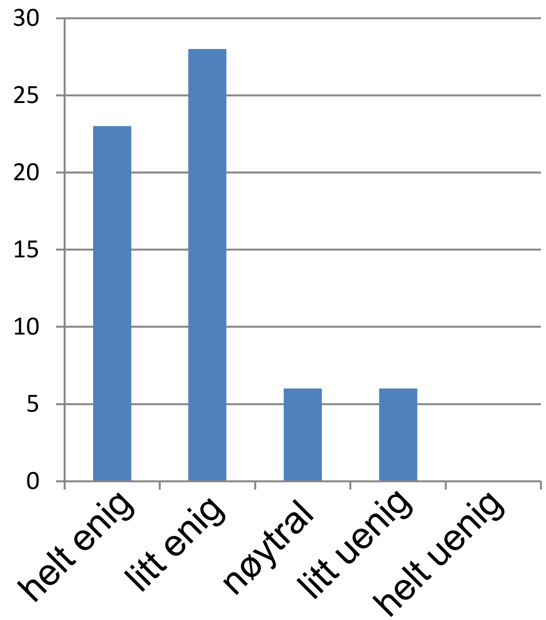
11.04.2013

Evaluering: forelesning

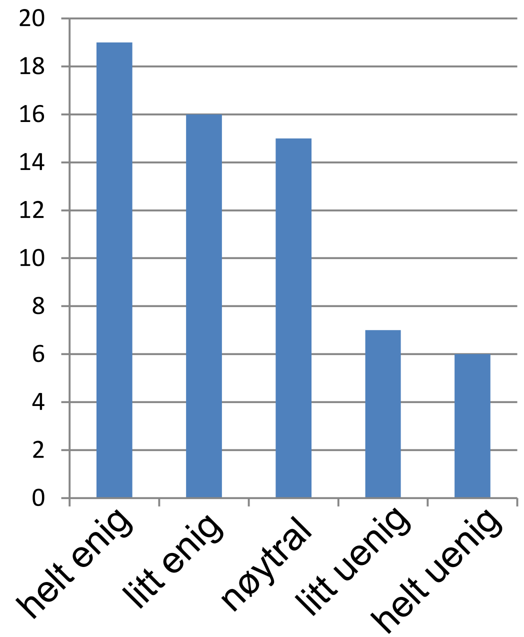
Tempoet i forelesningene er:



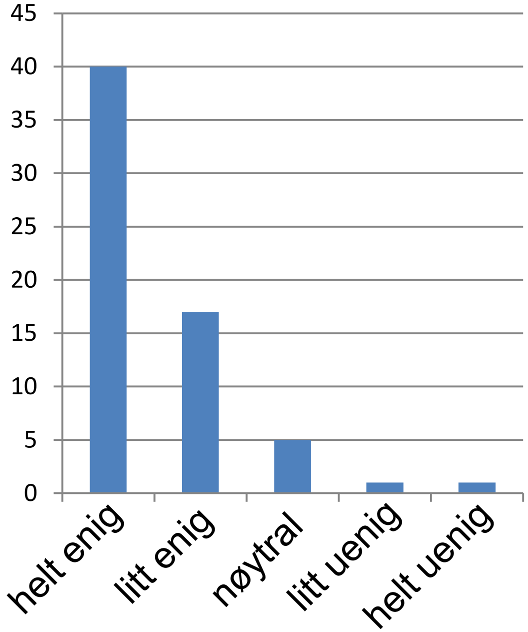
Presentasjonene er klare og bra strukturert.



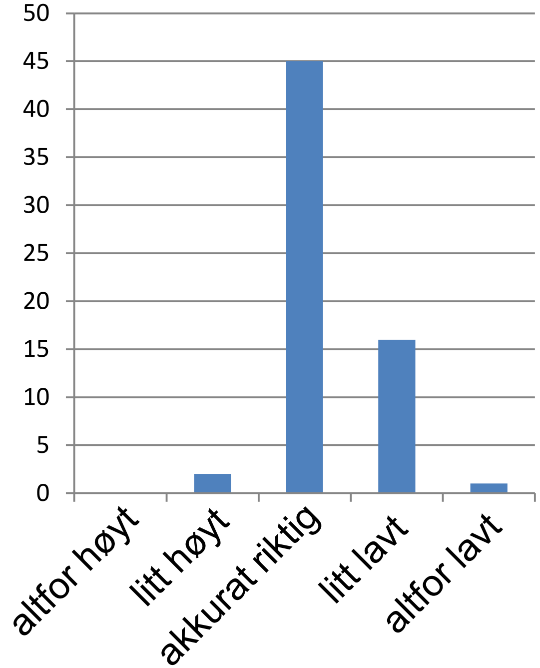
Det ville være bedre å bruke oftere tavlen for utledninger enn powerpoint.



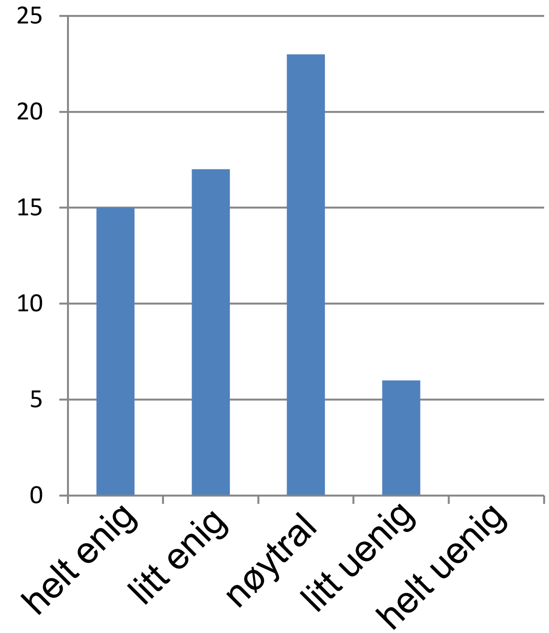
Diskusjonsspørsmålene i forelesningen hjelper meg å forstå.



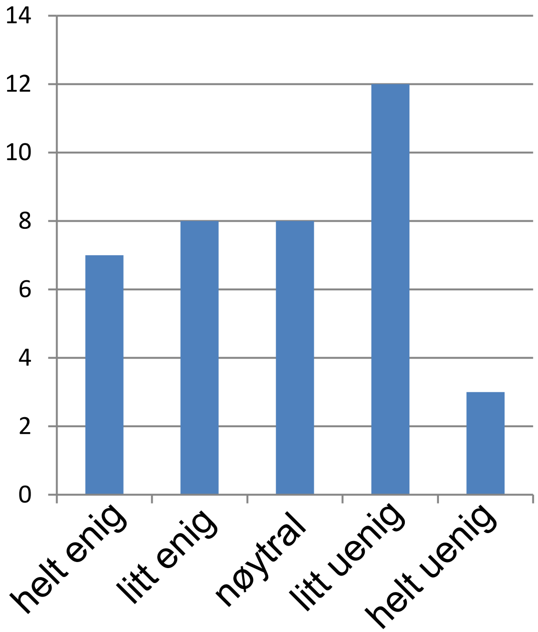
Antallet av eksempler som ble diskutert i forelesningen er:



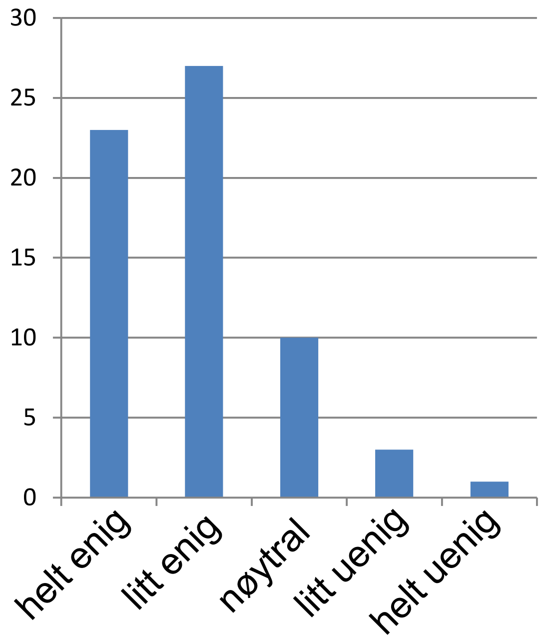
Ukesoppgavene er godt tilpasset forelesningene og hjelpe forståelsen.



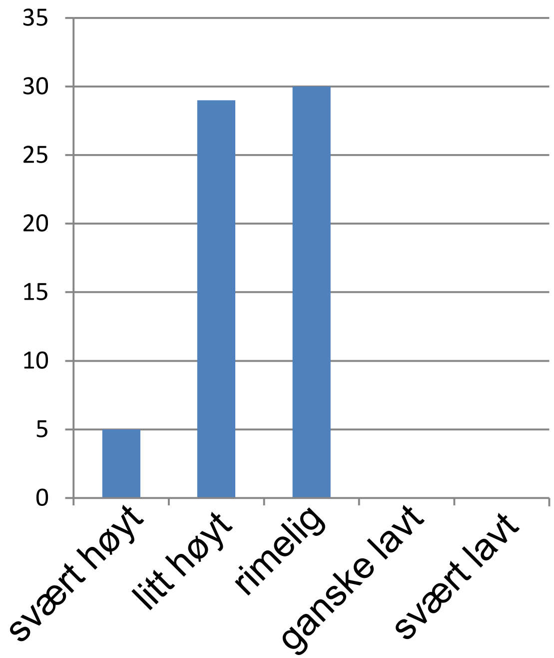
Gruppetimene er en balansert blanding av oppgaveregning, gruppearbeid, diskusjoner og hjelp med obligene.



Obliger: Oppgavene er godt tilpasset forelesningene og hjelpe forståelsen.

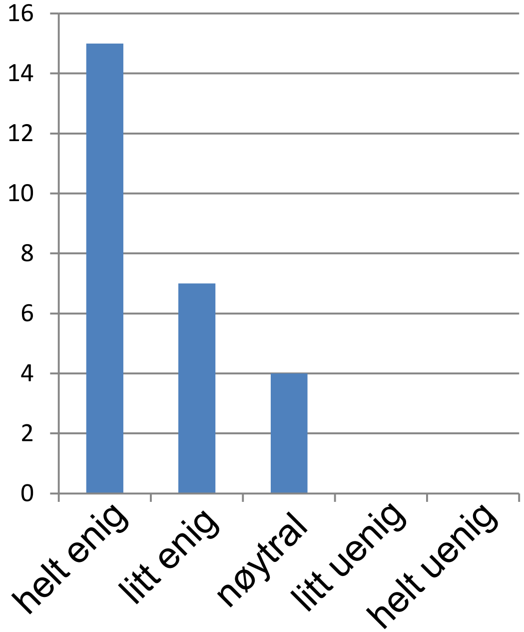


Arbeidsmengden relatert til obligene er:



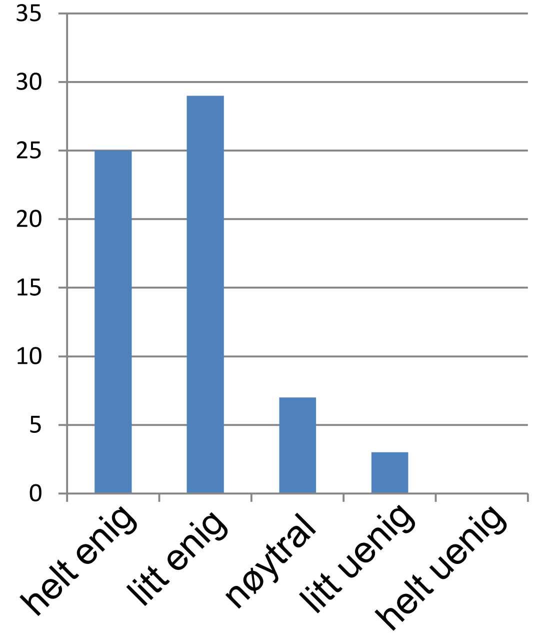
jeg deltar ikke: 26 (41%)

Datalabben er et bra tilbud og jeg får hjelpen jeg trenger.

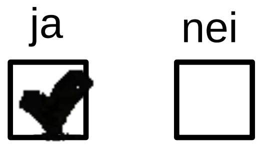


jeg deltar ikke: 38 (59%)

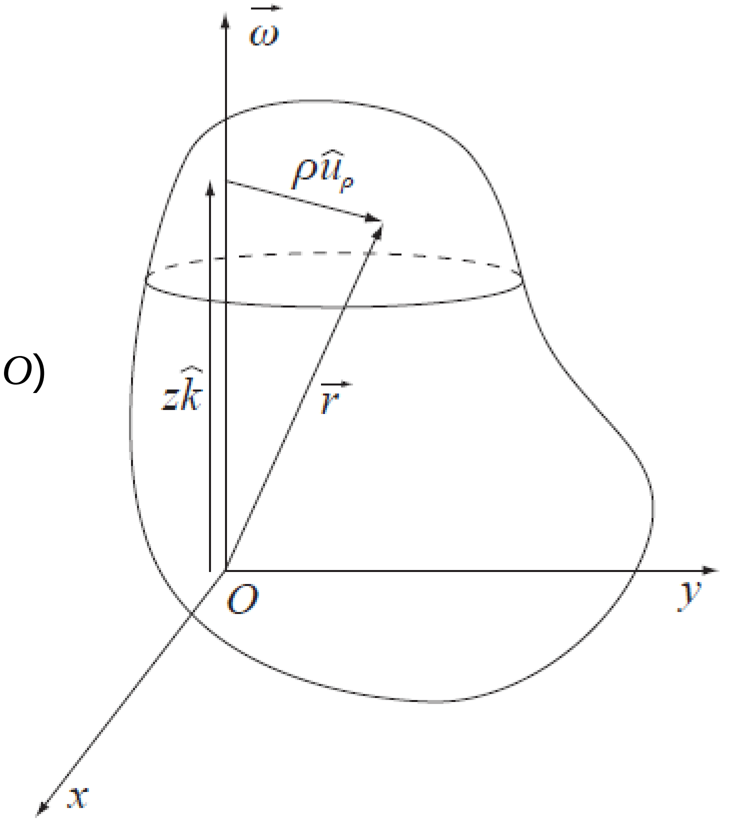
Jeg er generelt fornøyd med kurset.



Jeg liker å undervise fys-mek kurset



Rotasjon av et stivt legeme:



definisjon: $I_z = \sum_i m_i \rho_i^2$ treghetsmoment for legemet om aksen z (som går gjennom punktet O)

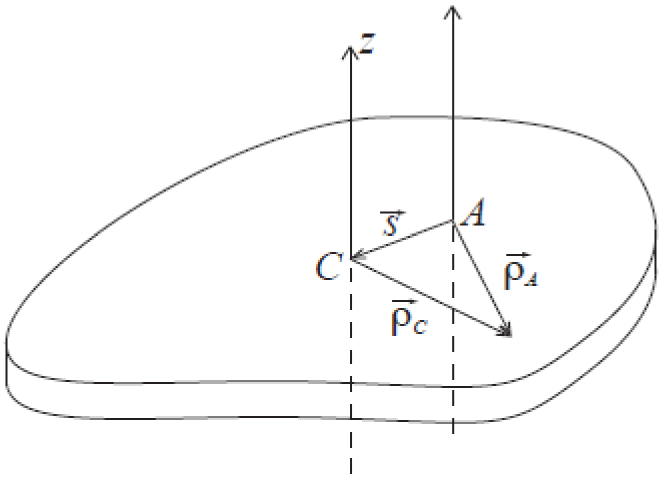
kontinuerlig legeme med massetetthet $\rho_m(\vec{r})$

$$I_z = \int_M \rho^2 dm = \int_V \rho^2 \rho_m(\vec{r}) dV$$

kinetisk energi: $K = \frac{1}{2} I_z \omega^2$

jo større treghetsmomentet,
jo mer energi behøves
for å få legemet å rotere

Parallellakseteoremet (Steiners sats)

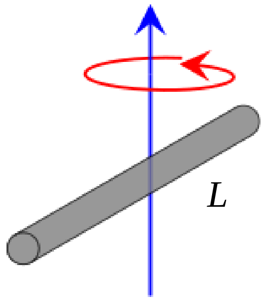


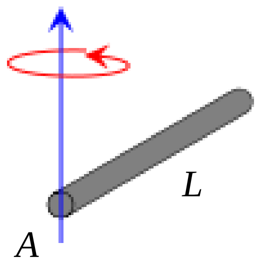
treghetsmoment om akse gjennom massesenteret:

$$I_C = \int_M (\vec{\rho}_C)^2 \, dm$$

treghetsmoment om en parallell akse i avstand s:

$$I_A = \int_M (\vec{\rho}_A)^2 \, dm = I_C + Ms^2$$

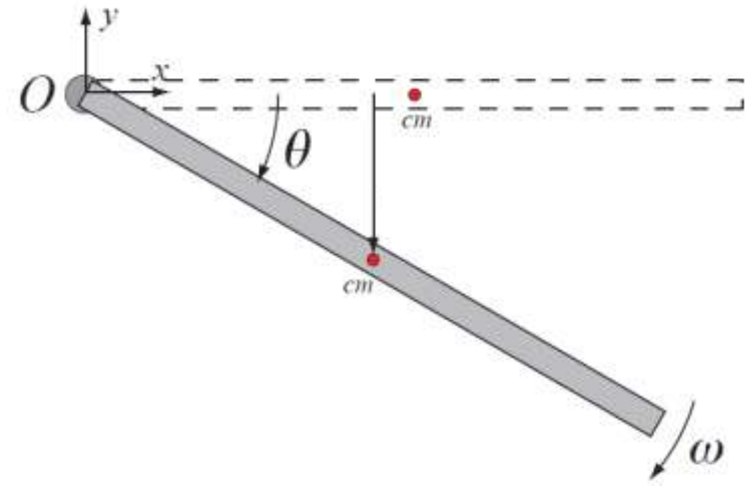




$$I_{cm} = \frac{1}{12} ML^2$$

$$I_A = I_C + Ms^2 = \frac{1}{12} ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} ML^2$$

En stav er festet i et friksjonsfritt hengsel og slippet fra en horisontal stilling. Vi ser bort fra luftmotstanden.



hengselet beveger seg ikke
$\Rightarrow$ normalkraft gjør ingen arbeid

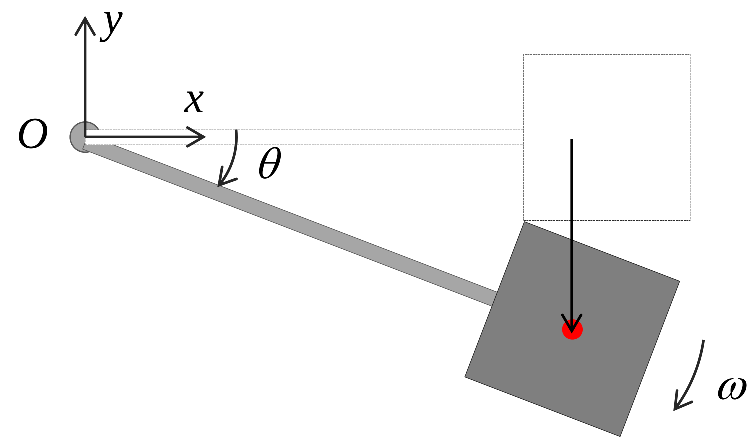
energibevaring: $K_0 + U_0 = K_1 + U_1$

$$0 = \frac{1}{2} I_O \omega_1^2 - Mg \frac{L}{2} \sin\theta$$

$$I_O = \frac{1}{3} M L^2$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{MgL}{I_O} \sin\theta} = \sqrt{\frac{3g}{L} \sin\theta}$$

Vi fester en tung masse til enden av staven.
Blir den maksimale vinkelhastigheten mindre, større eller like stor som for staven alene?



1. mindre
2. større
3. like stor

vi antar at massen til klossen er mye større enn massen til staven
$\Rightarrow$ massesenteret ligger i sentrum av klossen

treghetsmoment: $I_O = ML^2$

energibevaring: $0 = \frac{1}{2} I_O \omega^2 - MgL\sin\theta$

$$\frac{1}{2} ML^2 \omega^2 = MgL\sin\theta$$

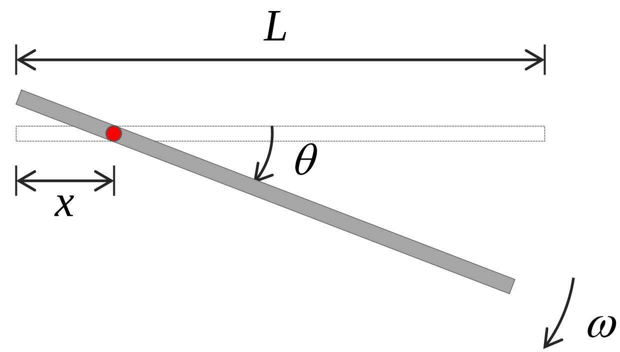
$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{L}\sin\theta}$$

for staven alene:

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}\sin\theta}$$

den maksimale vinkelhastigheten (ved θ=90°) er mindre med klossen festet til enden

Eksempel: stav som svinger i et vilkårlig punkt



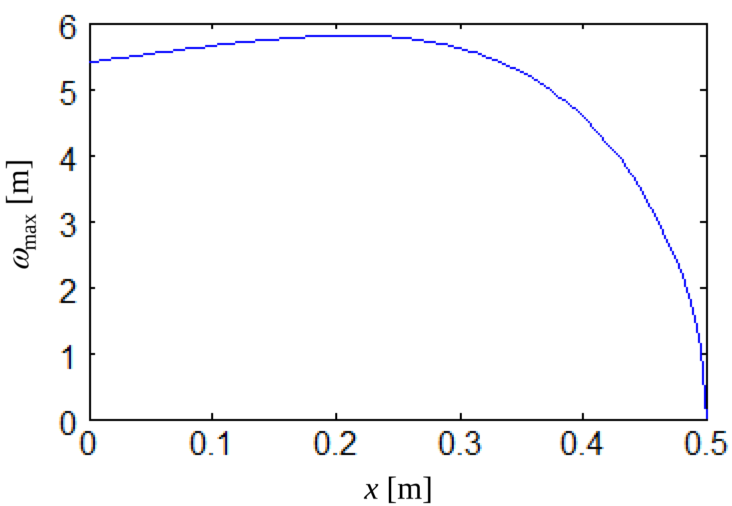
rotasjonspunkt i avstand x fra enden

finn ω som funksjon av θ

treghetsmoment: bruk parallellakseteoremet

$$I_x = I_{cm} + Ms^2 = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2} - x\right)^2$$

energibevaring: $$\frac{1}{2}I_x\omega^2 = Mg\left(\frac{L}{2} - x\right)\sin\theta$$



vi finner avhengighet av x numerisk:

```
M = 1.0;
L = 1.0;
g = 9.81;
x = linspace(0,L/2,100);
s = L/2-x;
Ix = M*L^2/12 + M*s.^2;
om = sqrt(2*M*g*s./Ix);
plot(x,om);
xlabel('x [m]');
ylabel('\omega_{max} [rad/s]');
```

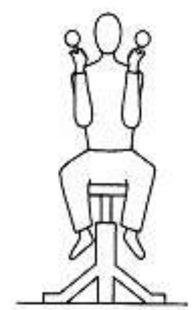
Stol

friksjon i rotasjonsaksen er neglisjerbar

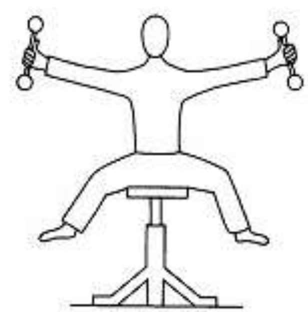
luftmotstand er neglisjerbar

energi er bevart: $K_0 = K_1$

$$\frac{1}{2} I_0 \omega_0^2 = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2$$



små trehetsmoment
stor vinkelhastighet

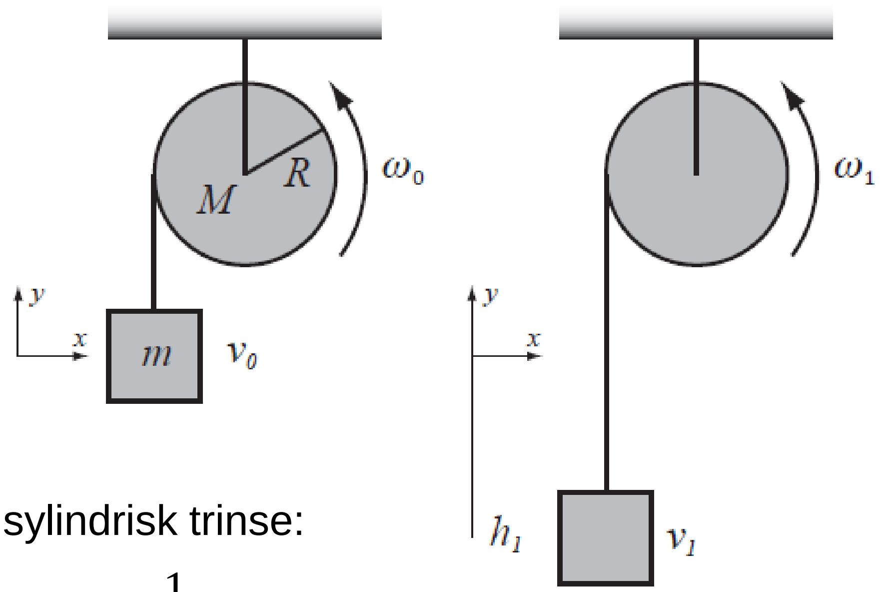


stor trehetsmoment
små vinkelhastighet

Eksempel: kloss i trinse

finn hastigheten till klossen som funksjon av h

(ingen friksjon, ingen luftmotstand)



kinetisk energi til klossen: $K_{\text{lin}} = \frac{1}{2} m v^2$

kinetisk energi til trinsen: $K_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I \omega^2$

sylindrisk trinse:

$$I = \frac{1}{2} M R^2$$

potensiell energi til klossen: $U = mg\,y$

energibevaring: $0 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 - mgh$

$$\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2} M R^2 \frac{v^2}{R^2} = mgh$$

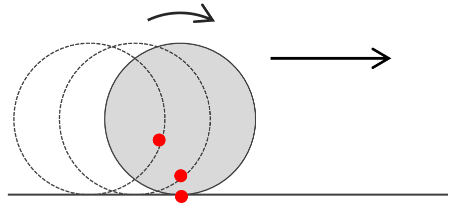
$$v = \sqrt{\frac{4mgh}{2m + M}}$$

to ukjente: v og ω koblet via snoren

hvis snoren ikke glipper: $s = R\theta$

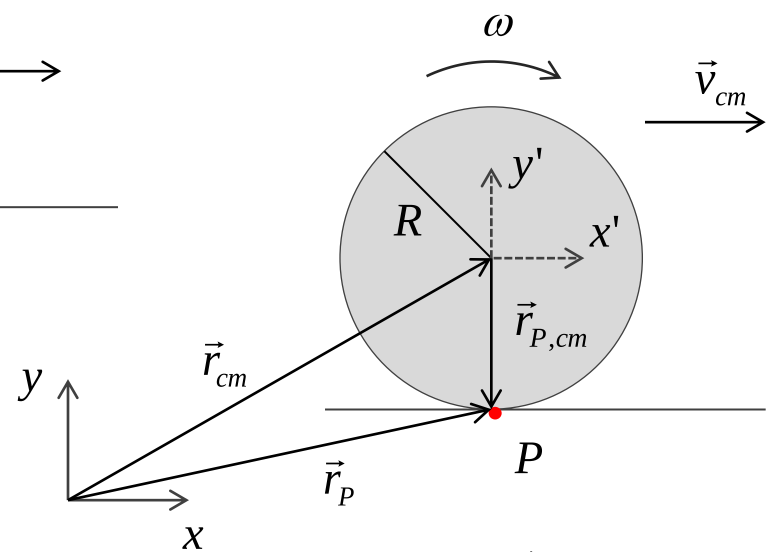
$$v = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} = R\omega$$

Rullebetingelse



$$\vec{r}_P = \vec{r}_{cm} + \vec{r}_{P,cm}$$

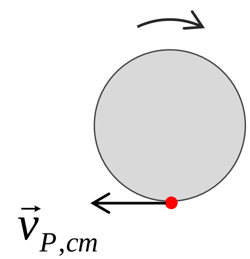
$$\vec{v}_P = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_{P,cm}$$



punktet P beveger seg på en
sirkelbane i massesentersystemet:

$$\vec{v}_{P,cm} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{P,cm} = -\omega \hat{k} \times (-R\,\hat{j}) = \omega R(\hat{k} \times \hat{j}) = -\omega R\,\hat{i}$$

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_{P,cm} = \vec{v}_{cm} - \omega R\,\hat{i}$$



rullebevegelse i laboratoriesystem:
P snu vertikal bevegelsesretning når den treffer bakken: $v_{P,y} = 0$

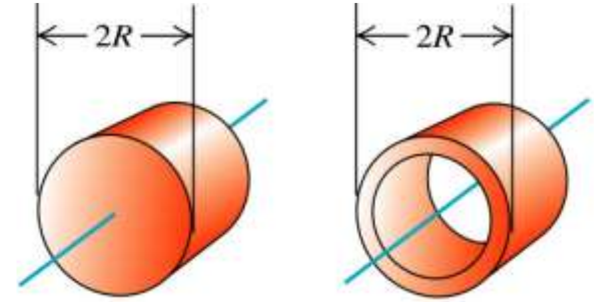
uten å skli: $v_{P,x} = 0$

rullebetingelse: $\vec{v}_P = \vec{0}$

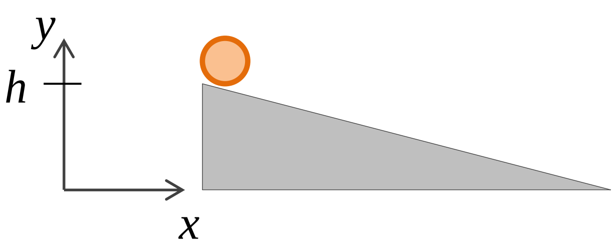
$$\Rightarrow \quad \vec{v}_{cm} = \omega R\,\hat{i}$$

legeme (sylinder, ball) ruller uten å skli:
$\Rightarrow$ finn hastighet til massesenteret fra vinkelhastighet

En sylinder og et sylinderskall med samme masse og radius ruller nedover et skråplan. Hvilken når bunnen først?



1. Sylinderen
2. Sylinderskallet
3. De kommer samtidig ned.



kinetisk energi i translasjon: $K_t = \frac{1}{2} m v_{cm}^2$

kinetisk energi i rotasjon: $K_r = \frac{1}{2} I \omega^2$

potensiell energi i tyngdefelt: $U = mg\, y_{cm}$

sylinder: $c = \frac{I}{mR^2} = \frac{1}{2}$

sylinderskall: $c = \frac{I}{mR^2} = 1$

energibevaring: $mg\, y_{cm,0} = \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 + mg\, y_{cm,1}$

$$mgh = \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I \frac{v_{cm}^2}{R^2} = \frac{1}{2} m v_{cm}^2 \left(1 + \frac{I}{mR^2}\right) = \frac{1}{2} m v_{cm}^2 (1 + c)$$

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{2gh}{1+c}}$$

sylinder når bunnen først

To sylindere med radius *R* og 2*R* men med samme masse m ruller nedover et skråplan. Hvilken har mest **translatorisk** kinetisk energi ved enden av skråplanet?

1. Den lille sylinderen
2. Den store sylinderen
3. De kinetiske energien er identiske

translatorisk kinetisk energi: $K_t = \frac{1}{2} m v_{cm}^2$

vi har funnet: $v_{cm} = \sqrt{\frac{2gh}{1+c}}$ hvor: $c = \frac{I}{mR^2} = \frac{1}{2}$ for en sylinder

$$K_t = \frac{mgh}{1+c}$$ uavhengig av R