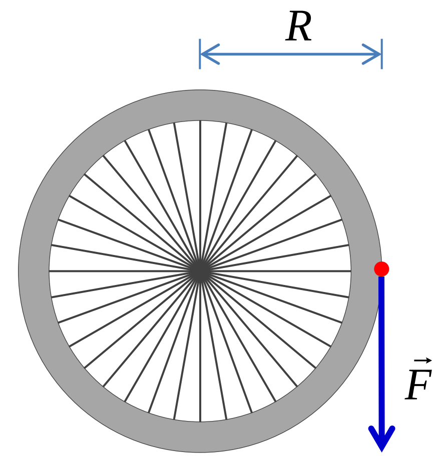
Stivt legemers dynamikk

16.04.2013

translasjon ⇔ rotasjon

	translasjon	**rotasjon**	
posisjon	$x(t)$	$\theta(t)$	vinkel
hastighet	$v(t) = \frac{dx}{dt}$	$\omega(t) = \frac{d\theta}{dt}$	vinkelhastighet
akselerasjon	$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$	$\alpha(t) = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$	vinkelakselerasjon
translatorisk energi	$K_t = \frac{1}{2}mv^2$	$K_r = \frac{1}{2}I\omega^2$	rotasjonell energi
masse	m	I	treghetsmoment
kraft	$\vec{F} = m\vec{a}$	$\vec{\tau}_O = \vec{r} \times \vec{F}$	kraftmoment
bevegelsesmengde	$\vec{p} = m\vec{v}$	$\vec{l}_O = \vec{r} \times \vec{p}$	spinn

å spinne et hjul



hvordan får vi et hjul å rotere?

vi bruker en tangensial kraft F_T
i et punkt med radius R

$$\vec{F} = F_T \hat{u}_T$$

kraften virker i en kort tidsperiode Δt
langs en kort strekning Δs

arbeid-energi teorem: $W = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F} \cdot \vec{v} dt = K_1 - K_0$

kinetisk energi: $K = \frac{1}{2} I \omega^2$

over Δt er kraften konstant: $\Delta W = F_T \Delta s \; = F_T R \Delta\theta \; = K(t+\Delta t) - K(t)$

$$F_T R \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{K(t+\Delta t) - K(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta K}{\Delta t}$$

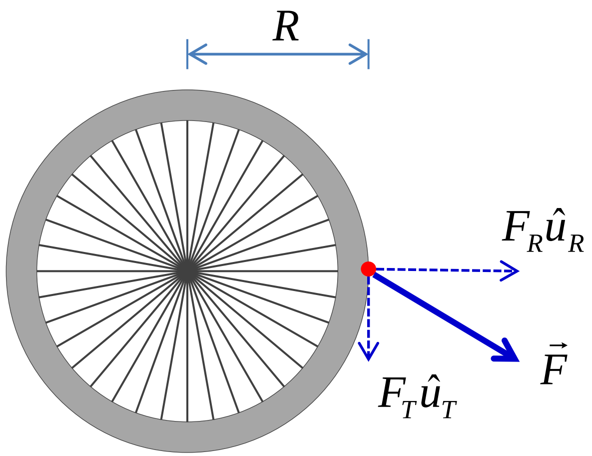
$$F_T R \frac{d\theta}{dt} = F_T R \omega = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} I \omega^2\right) = I \omega \frac{d\omega}{dt}$$

N2L for translasjoner: $F = ma$

N2L for rotasjoner: $F_T R = I\alpha$

$$F_T R = I\alpha$$

Kraftmoment



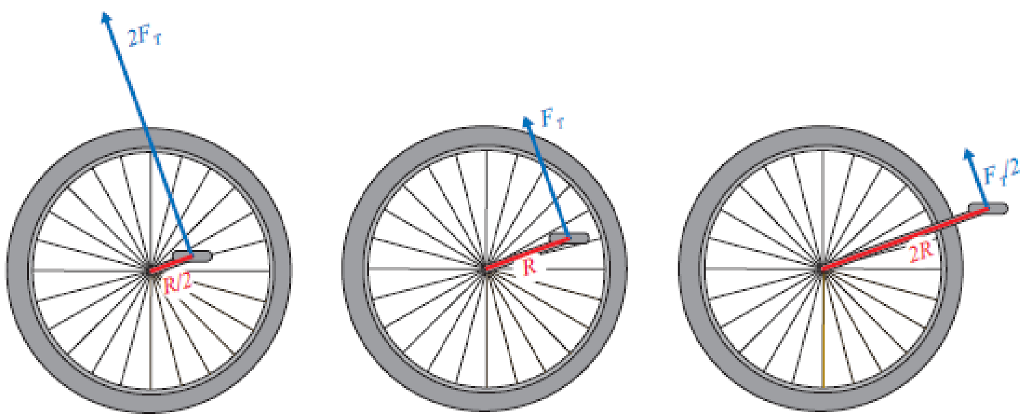
bare den tangensiale kraftkomponenten bidrar til å få hjulet å rotere

N2L for rotasjoner: $F_T R = I\alpha$

$F_T R = \tau$ kraftmoment

kraftmomentet er årsak for vinkelakselerasjonen

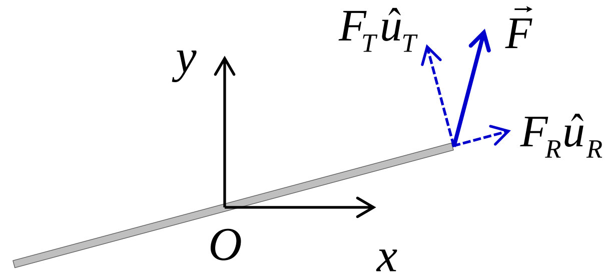
avstand R fra rotasjonsaksen er viktig:



Treghetsmomentet er legemets motstand mot å få rotasjonshastigheten endret.

Det krever et kraftmoment: $\tau = I\alpha$

Kraftmoment



angrepspunkt for kraften: $\vec{r} = r\hat{u}_R$

bare den tangensiale kraftkomponenten bidrar.

rotasjon om z aksen: $\vec{\alpha} = \alpha\hat{k}$

kraftmoment: $\vec{\tau}_O = \vec{r} \times \vec{F} \quad = r\hat{u}_R \times (F_R\hat{u}_R + F_T\hat{u}_T)$

$$= r\hat{u}_R \times F_T\hat{u}_T \;\; = rF_T\hat{k} = \tau_{O,z}\hat{k}$$

N2L for rotasjoner: $\tau_{O,z} = I_z\alpha$

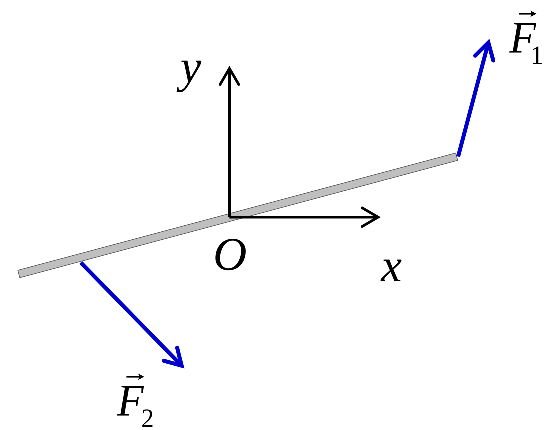
"kraftmoment om O"

kraftmomentet tilknyttet til en kraft avhenger av punktet O det refererer seg til

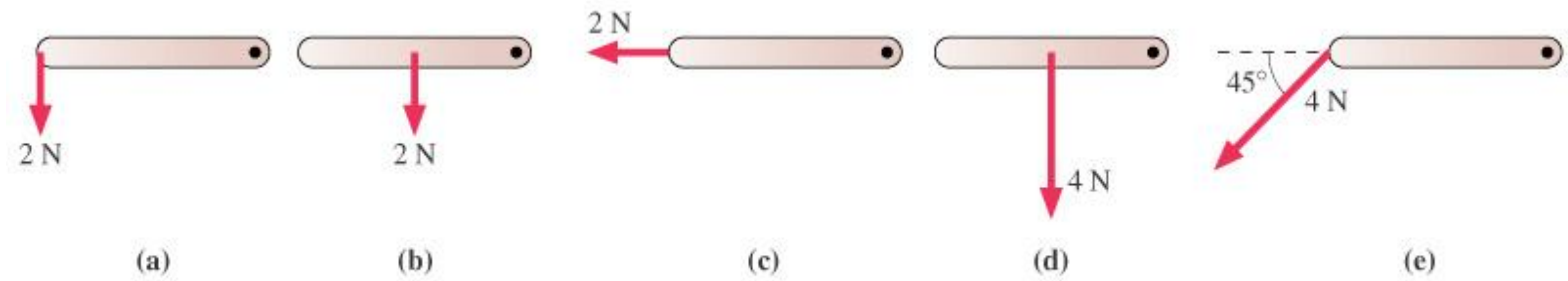
hvis flere krefter virker:

$$\sum_i \tau_{z,i} = I_z\alpha \qquad \text{(N2Lr)}$$

$$\vec{\tau}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$



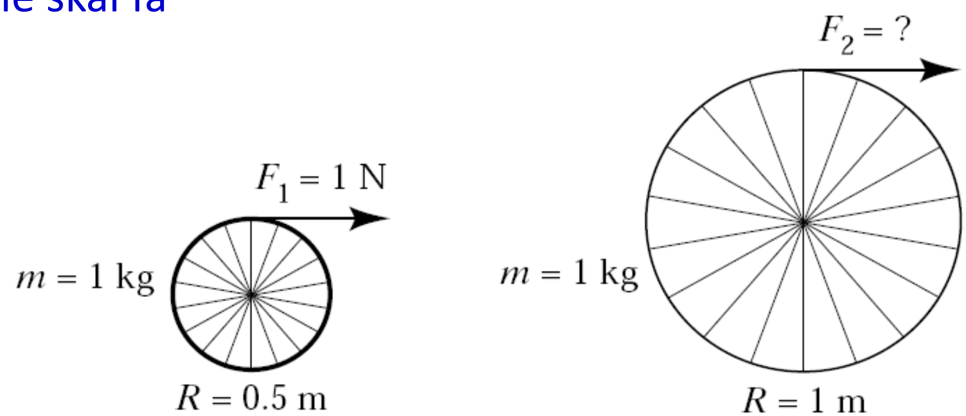
Ranger kraftmomentene



1. $\tau_e > \tau_a = \tau_d > \tau_b > \tau_c \qquad \Leftarrow$
2. $\tau_d > \tau_e > \tau_a = \tau_b > \tau_c$
3. $\tau_e > \tau_a > \tau_d > \tau_b > \tau_c$
4. $\tau_d = \tau_e > \tau_a = \tau_b = \tau_c$
5. $\tau_d = \tau_e > \tau_a = \tau_b > \tau_c$

To hjul med fiksert nav har begge massen 1 kg.
Anta at navet og eikene er masseløse.
Hvor stor må F_2 være for at hjulene skal få samme vinkelakselerasjon?

1. 0.25 N
2. 0.5 N
3. 1 N
4. 2 N
5. 4 N



N2Lr: $\tau = RF = I\alpha$

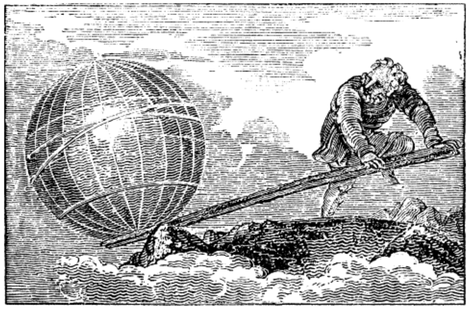
for å få samme vinkelakselerasjon: $\alpha = \frac{R_1 F_1}{I_1} = \frac{R_2 F_2}{I_2}$

$$F_2 = \frac{I_2}{I_1}\frac{R_1}{R_2}F_1 = 4\frac{1}{2}F_1 = 2\,\text{N}$$

treghetsmomenter: $I_1 = mR_1^2 = 0.25\,\text{kgm}^2$

$$I_2 = mR_2^2 = 1\,\text{kgm}^2$$

Arkimedes: *"Gi meg et fast punkt, og jeg skal flytte jorden."*



fast punkt: *O*

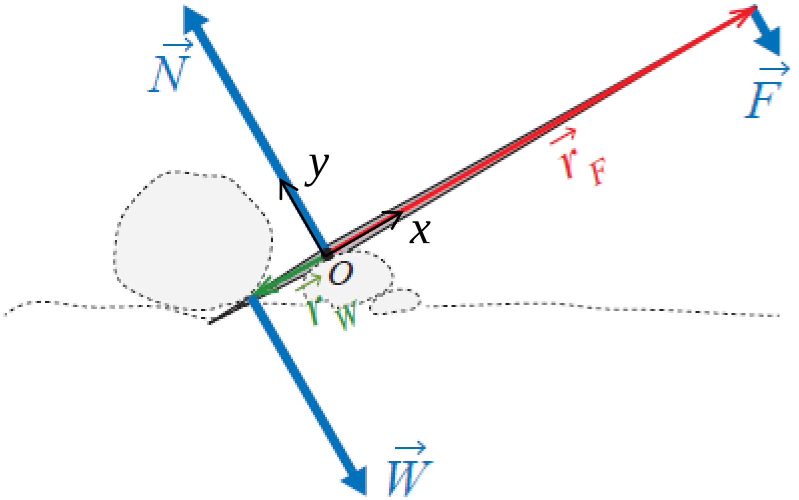
netto kraftmoment om *O*:

$$\vec{\tau}_{\text{net}} = \vec{r}_W \times \vec{W} + \vec{r}_F \times \vec{F} + \vec{r}_N \times \vec{N}$$

$$= -r_W \hat{i} \times (-W \hat{j}) + r_F \hat{i} \times (-F \hat{j}) + \vec{0} \times N \hat{j}$$

$$= r_W W (\hat{i} \times \hat{j}) - r_F F (\hat{i} \times \hat{j})$$

$$= (r_W W - r_F F) \hat{k}$$



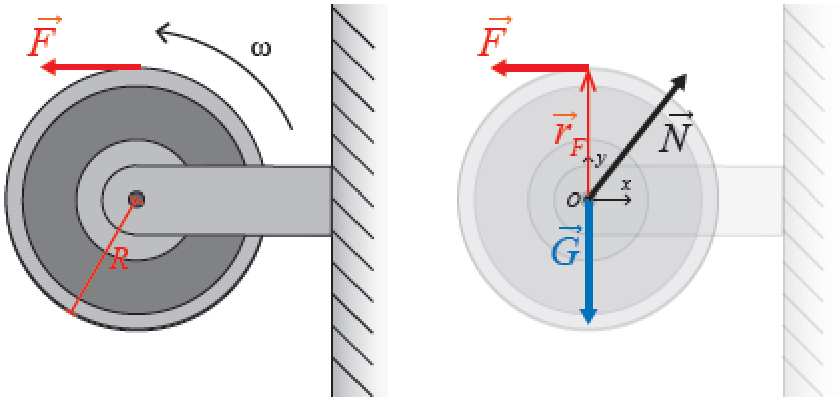
for å få et negativt kraftmoment
om z aksen (med klokken):

$$r_W W < r_F F$$

$$F > \frac{r_W}{r_F} W$$

Eksempel

En konstant kraft F virker tangensial på et hjul (homogen sylinder).
Finn vinkel θ som funksjon av tiden.



krefter:

- gravitasjon: $\vec{G} = -Mg\,\hat{j}$
- konstant kraft: $\vec{F} = -F\,\hat{i}$
- normalkraft fra aksen på hjulet: $\vec{N}$

massesenteret beveger seg ikke

$$\sum F_{\text{ext}} = \vec{G} + \vec{F} + \vec{N} = \vec{0}$$

$$\vec{N} = -\vec{F} - \vec{G} = -F\,\hat{i} - Mg\,\hat{j}$$

kraftmomenter:

$$\vec{\tau}_G = \vec{r}_G \times \vec{G} = \vec{0} \times (-Mg\,\hat{j}) = \vec{0}$$

$$\vec{\tau}_N = \vec{r}_N \times \vec{N} = \vec{0} \times (-F\,\hat{i} - Mg\,\hat{j}) = \vec{0}$$

$$\vec{\tau}_F = \vec{r}_F \times \vec{F} = R\,\hat{j} \times (-F\,\hat{i}) = RF\,\hat{k}$$

N2Lr: $\tau_z = I_z \alpha$

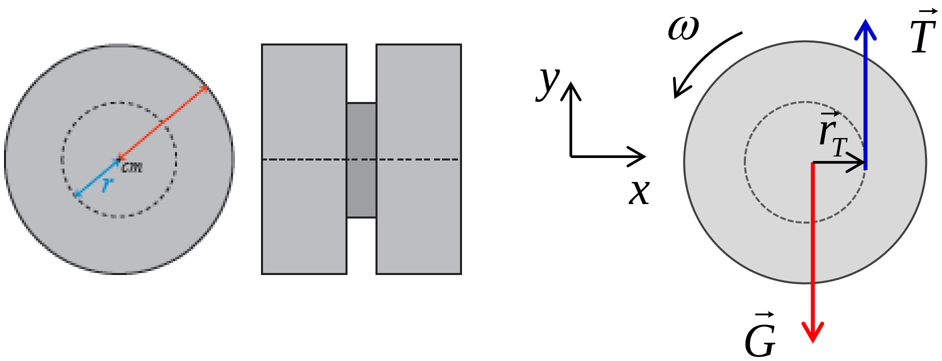
$$\alpha = \frac{\tau_z}{I_z} = \frac{RF}{\frac{1}{2}MR^2} = \frac{2F}{MR}$$

$$\omega(t) - \omega(0) = \int_0^t \alpha dt = \frac{2F}{MR} t$$

$$\theta(t) - \theta(0) = \int_0^t \omega(t) dt = \frac{2F}{MR} \int_0^t t dt$$

$$\theta(t) = \frac{F}{MR} t^2$$

Eksempel: jojo



gravitasjon: $\vec{G} = -Mg\,\hat{j}$

snordrag: $\vec{T} = T\,\hat{j}$

N2L: $\vec{T} + \vec{G} = M\vec{A}$

$$T - Mg = MA_y$$

N2Lr: $\vec{0}\times\vec{G} + r\hat{i}\times T\,\hat{j} = \vec{\tau}_z = I_z\vec{\alpha}$

$$rT\hat{k} = I_z\vec{\alpha}$$

$$rT = I_z\alpha$$

$$rT = -\frac{A_y}{r} I_z$$

$$T - Mg = -\frac{A_y}{r^2} I_z - Mg = MA_y$$

$$-g = A_y\left(1 + \frac{I_z}{Mr^2}\right)$$

rullebetingelse: $\vec{v}_T = \vec{V} + \vec{v}_{T,cm} = \vec{0}$

$$\vec{v}_{T,cm} = \vec{\omega}\times\vec{r}_{T,cm} = \omega\hat{k}\times r\hat{i} = \omega r\,\hat{j}$$

$$\vec{V} = -\vec{v}_{T,cm} = -\omega r\,\hat{j}$$

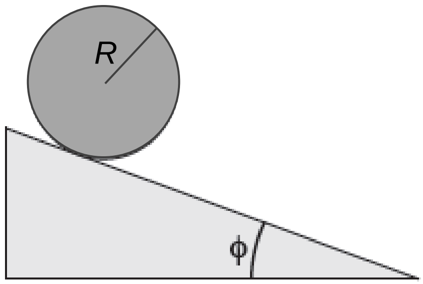
$$A_y = \frac{d}{dt}V_y = -r\frac{d\omega}{dt} = -r\alpha$$

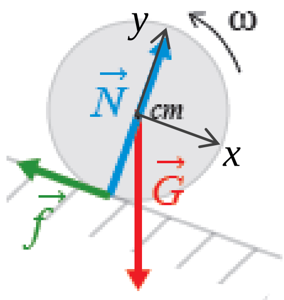
treghetsmoment: $I_z \approx \frac{1}{2}MR^2$

f.eks.: $R = 2r \quad \Rightarrow \quad I_z \approx \frac{1}{2}M\,4r^2 = 2Mr^2$

$$A_y = -\frac{1}{3}g$$

Eksempel





Et legeme av masse M, radius R, og treghetsmoment ruller ned et skråplan.

koordinatsystem med *x* aksen langs planet
origo i massesenteret
rotasjon langs *z* aksen $\Rightarrow \omega < 0$

krefter og kraftmomenter:

normalkraft: $\vec{N} = N\,\hat{j}$

$$\vec{\tau}_N = \vec{r}_N \times \vec{N} = -R\,\hat{j} \times N\,\hat{j} = \vec{0}$$

friksjon: $\vec{f} = -f\,\hat{i}$

$$\vec{\tau}_f = \vec{r}_f \times \vec{f} = -R\,\hat{j} \times (-f\,\hat{i}) = -Rf\,\hat{k}$$

gravitasjon:

$$\vec{G} = Mg(\sin\phi)\hat{i} - Mg(\cos\phi)\,\hat{j}$$

$$\vec{\tau}_G = \vec{r}_G \times \vec{G} = \vec{0} \times \vec{G} = \vec{0}$$

N2L for translasjon: $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{N} + \vec{f} + \vec{G} = M\vec{A}$

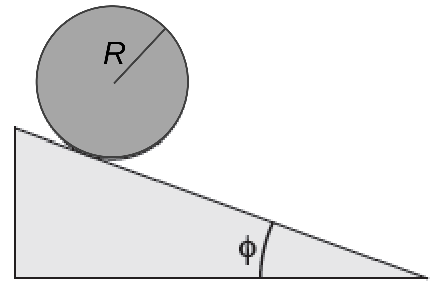
x retning: $\boxed{Mg\sin\phi - f = MA_x}$

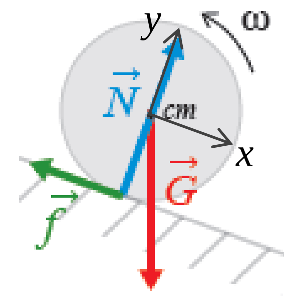
y retning: $N - Mg\cos\phi = MA_y = 0$

$$N = Mg\cos\phi$$

N2L for rotasjon: $\sum \tau_{z,cm} = \boxed{-Rf = I_{z,cm}\alpha}$

2 ligninger
3 ukjente: A_x, α, f





$$Mg\sin\phi - f = MA_x \qquad (1)$$

$$-Rf = I_{z,cm}\alpha \qquad (2)$$

vi antar at legemet ruller:

rullebetingelse: $V_x = -\omega R \quad (\omega < 0)$

$$\frac{d}{dt}V_x = A_x = -R\frac{d\omega}{dt} = -R\alpha$$

(2) $$f = -\frac{I_{z,cm}}{R}\alpha = \frac{I_{z,cm}}{R^2}A_x$$

(1) $$Mg\sin\phi - \frac{I_{z,cm}}{R^2}A_x = MA_x$$

$$g\sin\phi = \left(1 + \frac{I_{z,cm}}{MR^2}\right)A_x$$

$$A_x = \frac{g\sin\phi}{1+c}$$

friksjon: $$f = \frac{I_{z,cm}}{R^2}\frac{g\sin\phi}{1+c} = Mg\sin\phi\frac{c}{1+c}$$

friksjon øker med stigning ϕ

betingelse for at legemet ikke sklir: $f < \mu_s N$

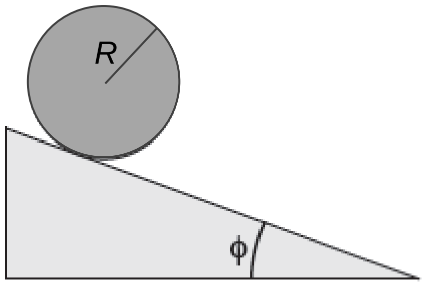
$$Mg\sin\phi\frac{c}{1+c} < \mu_s Mg\cos\phi$$

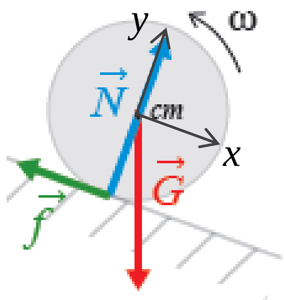
$$\tan\phi < \mu_s\frac{1+c}{c}$$

	$I_{z,cm}$	$\tan\phi_{\max}$
kule	$\frac{2}{5}MR^2$	$\frac{7}{2}\mu_s$
sylinder	$\frac{1}{2}MR^2$	$3\mu_s$
sylinderskall	MR^2	$2\mu_s$

$$Mg\sin\phi - f = MA_x \qquad (1)$$

$$-Rf = I_{z,cm}\alpha \qquad (2)$$





stor stigning: legemet sklir

i denne tilfelle kjenner vi friksjon:
dynamisk friksjon:

$$f = \mu_d N = \mu_d Mg\cos\phi$$

(1) $$Mg\sin\phi - \mu_d Mg\cos\phi = MA_x$$

$$A_x = g(\sin\phi - \mu_d\cos\phi)$$

legemet vil fortsatt ruller:

(2) $$\alpha = -\frac{Rf}{I_{z,cm}} = -\mu_d\frac{RMg\cos\phi}{I_{z,cm}}$$

jo større ϕ jo mindre α