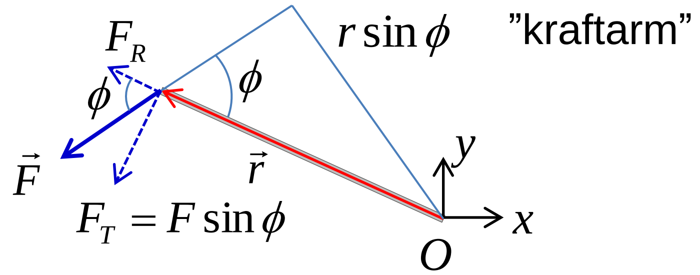
Stivt legemers dynamikk

23.04.2013

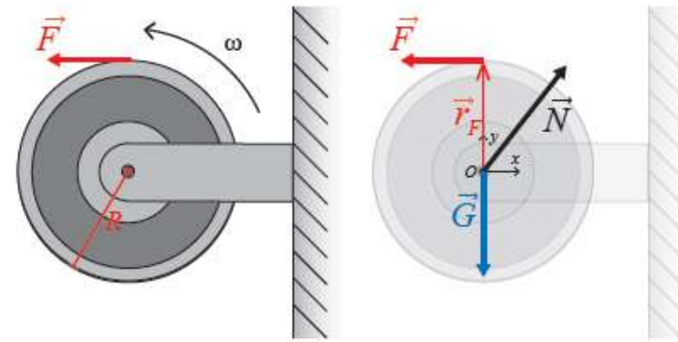
kraftmoment: $\vec{\tau}_O = \vec{r} \times \vec{F}$

$$\left|\vec{\tau}_O\right| = rF\sin\phi$$



N2L for rotasjoner: $\sum \tau_{O,z} = I_z \alpha$

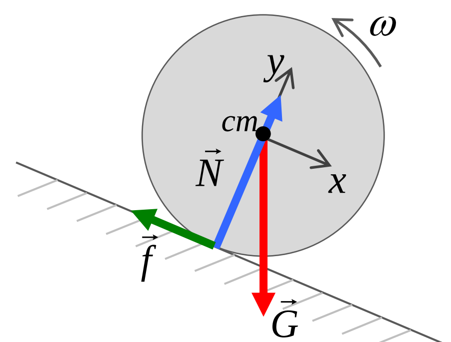
for et stivt legeme med treghetsmoment I_z



translasjon og rotasjon:

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = M\vec{A}_{cm}$$

$$\sum \tau_z = I_{cm}\alpha$$



rullebetingelse: $V_{cm,x} = -R\omega$

kinetisk energi: $K = \frac{1}{2}MV_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$

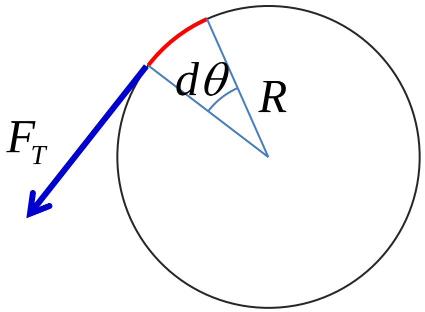
Arbeid:

en kraftmoment som virker på
et stivt legeme gjør arbeid:

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau_z d\theta$$

arbeid-energi teorem:

$$W = \frac{1}{2} I_z \omega_2^2 - \frac{1}{2} I_z \omega_1^2$$



Spinn:

for en punktmasse $\vec{l}_O = \vec{r} \times \vec{p}$

spinnsats: $\vec{\tau}_{\text{net}} = \frac{d}{dt}\vec{l}_O$

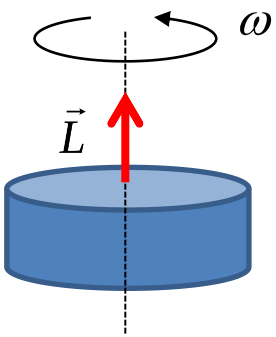
for flerpartikkelsystemer: $\vec{L} = \sum_i \vec{l}_i = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\text{ext}} = \vec{\tau}_O^{\text{ext}}$$

bare kraftmomenter fra ytre krefter endrer spinnet

for et stivt legeme:

et symmetrisk legeme som roterer om symmetriaksen: $\vec{L} = I\vec{\omega}$

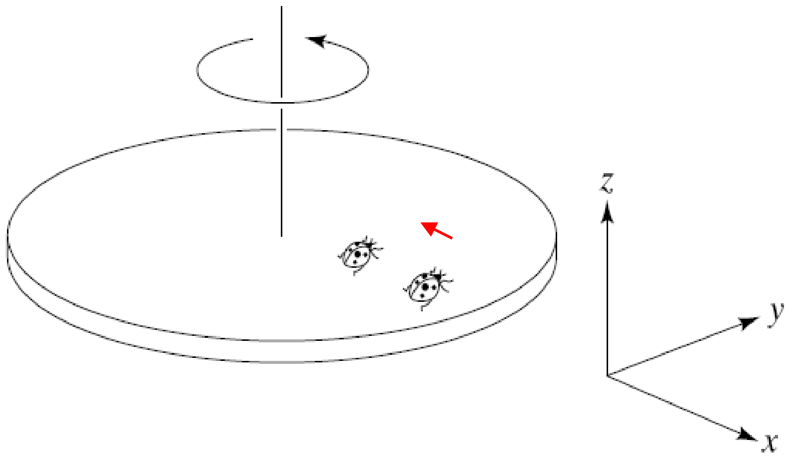


$\vec{L}$ og $\vec{\omega}$ er generelt ikke parallelle.

men for *z* komponent gjelder: $L_z = I\omega$

kraftmoment: $\tau_z = \frac{d}{dt}L_z = I\alpha$

En marihøne går innover på en plate
som roterer friksjonsfritt som vist.
Hva skjer med **spinnet** til hele systemet?



1. Spinnet øker
2. Spinnet forblir uendret
3. Spinnet avtar

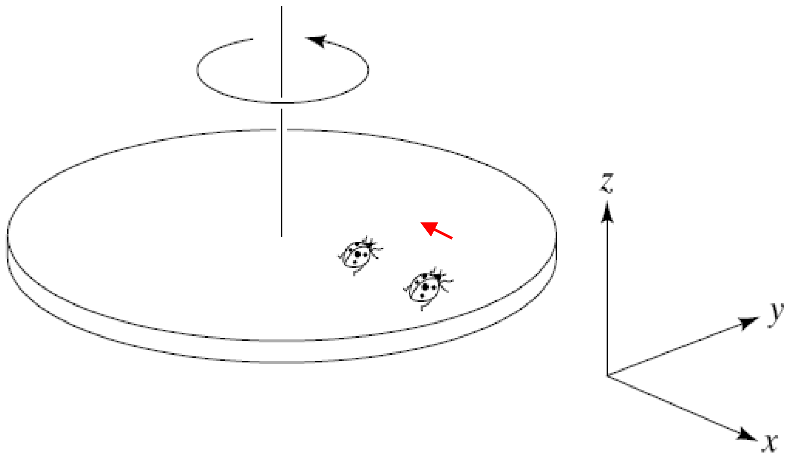
Hva skjer med **vinkelhastigheten** til platen?

1. Vinkelhastigheten øker
2. Vinkelhastigheten forblir uendret
3. Vinkelhastigheten avtar

Hva skjer med den **kinetiske energien** til systemet?

1. Den kinetiske energien øker
2. Den kinetiske energien forblir uendret
3. Den kinetiske energien avtar

(lite) kraftmoment om y aksen,
men ingen kraftmoment om z aksen:



$$\tau_{O,z} = \frac{dL_{O,z}}{dt} = 0$$

spinn er bevart: $L_{O,z}(0) = L_{O,z}(1)$

$$I_0 \omega_0 = I_1 \omega_1$$

treghetsmomentet blir mindre når marihønen går innover: $I_1 < I_0$

$$\omega_1 = \frac{I_0}{I_1}\omega_0 > \omega_0$$

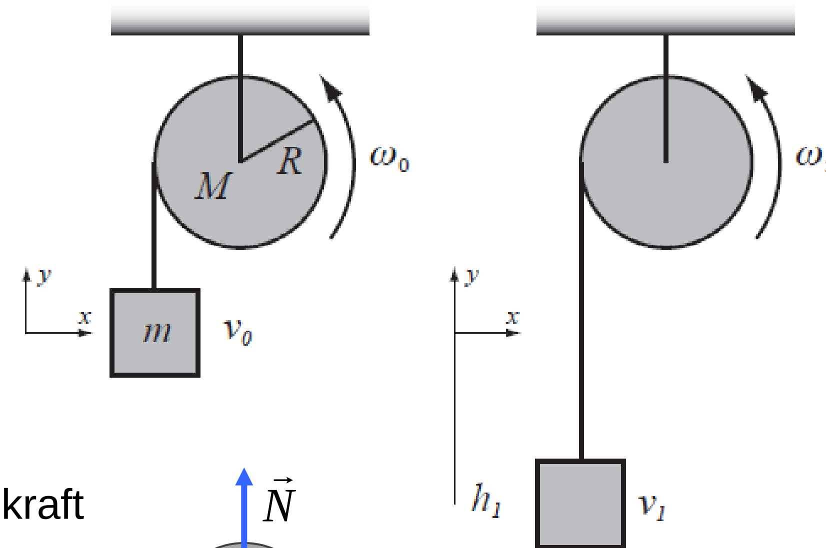
vinkelhastigheten øker

kinetisk energi: $K_1 = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 = \frac{1}{2} I_1 \frac{I_0^2}{I_1^2}\omega_0^2 = \frac{1}{2} I_0 \omega_0^2 \frac{I_0}{I_1} = \frac{I_0}{I_1} K_0 > K_0$

kinetisk energien øker

marihønen må gjøre arbeid

Eksempel: Kloss i trinse

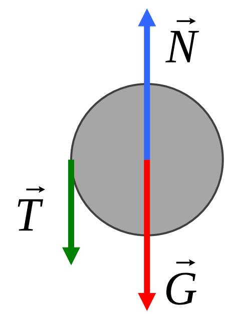


denne gangen ser vi på akselerasjon

krefter på klossen: gravitasjon og snordraget

N2L i y retningen: $T - mg = ma_y$

krefter på trinsen: gravitasjon, snordraget, normalkraft



bare snordraget gir et kraftmoment:

$$\tau_z = RT = I_z \alpha = \frac{1}{2} M R^2 \alpha$$

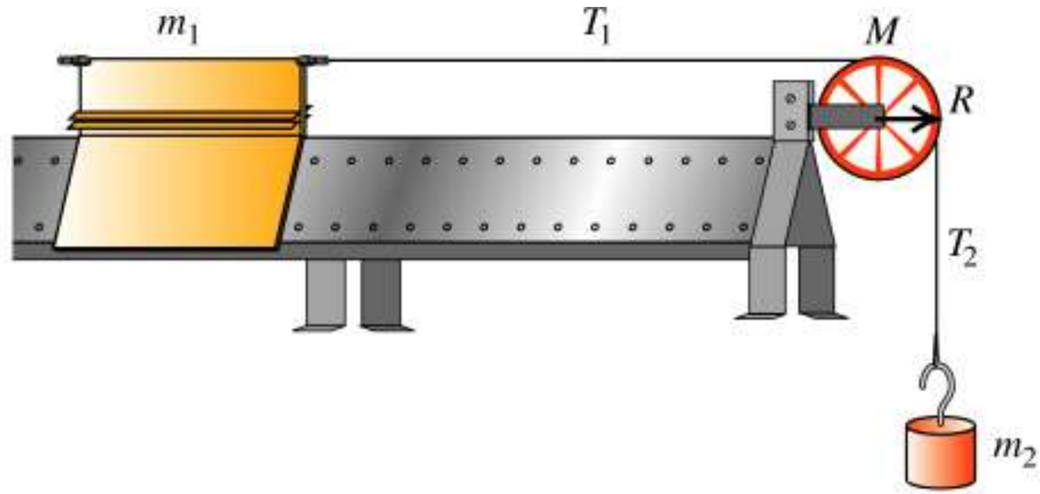
snoren sklir ikke: $\omega R = -v_y \qquad \alpha R = -a_y$

$$RT = -\frac{1}{2} M R^2 \frac{a_y}{R} \quad \Rightarrow \quad T = -\frac{1}{2} M a_y$$

$$-\frac{1}{2} M a_y - mg = ma_y \quad \Rightarrow \quad a_y = \frac{-mg}{m + \frac{1}{2} M}$$

hvis M er små: $a_y = -g$

Klossen glir friksjonsfritt og er festet til loddet med en masseløs snor som roterer hjulet uten å gli. Hva er relasjonene mellom snordragene idet klossen slippes?



1. $m_2 g = T_2 = T_1$
2. $m_2 g > T_2 = T_1$
3. $m_2 g > T_2 > T_1$
4. $m_2 g = T_2 > T_1$

klossen akselerer nedover

det kreves at $m_2 g > T_2$

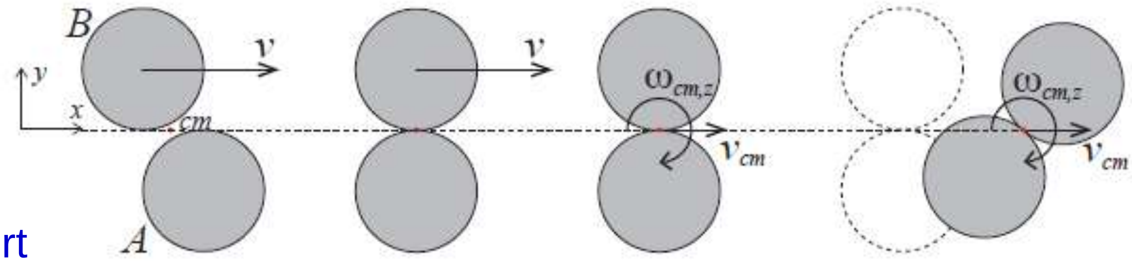
trinsen har masse og derfor et treghetsmoment

det kreves et kraftmoment for å gi trinsen vinkelakselerasjon $\tau = RT_2 - RT_1$

$T_2 > T_1$ for at hjulet skal kunne akselereres

Eksempel: Kollisjon mellom to atomer

To atomer med masse m og radius R kolliderer. Før kollisjonen er atom A i ro, mens atom B beveger seg med hastighet v. Etter kollisjonen henger atomene sammen. Vi ser bort fra gravitasjon og luftmotstand.



ingen ytre krefter
$\Rightarrow$ bevegelsesmengde er bevart $\qquad \vec{F}_{\text{net}} = \frac{d}{dt}\vec{P} = \vec{0}$

massesenter $\vec{R}$ beveger seg med konstant hastighet $\vec{V}$

$$\vec{r}_A = \vec{R} + \vec{r}_{A,cm} \qquad \vec{r}_B = \vec{R} + \vec{r}_{B,cm} \qquad \vec{R} = \frac{1}{2m}(m\vec{r}_A + m\vec{r}_B) = \frac{1}{2}(\vec{r}_A + \vec{r}_B)$$

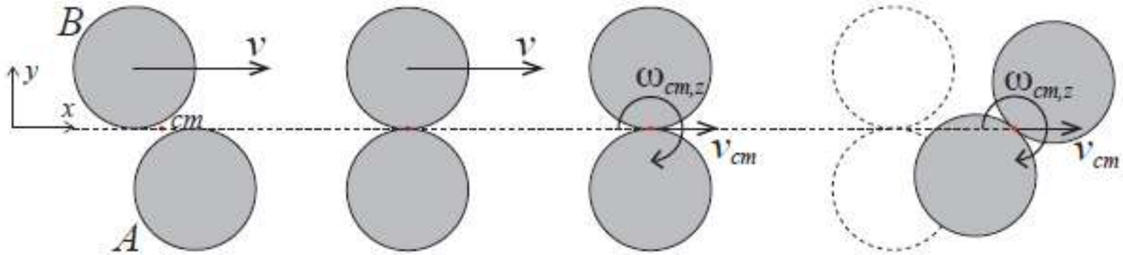
$$\vec{v}_A = \vec{V} + \vec{v}_{A,cm} = \vec{0} \qquad \vec{v}_B = \vec{V} + \vec{v}_{B,cm} = v\hat{i} \qquad \vec{V} = \frac{1}{2}(\vec{v}_A + \vec{v}_B) = \frac{1}{2}v\hat{i}$$

$$\vec{v}_{A,cm} = -\vec{V} = -\frac{1}{2}v\hat{i} \qquad \vec{v}_{B,cm} = \vec{v}_B - \vec{V} = v\hat{i} - \frac{1}{2}v\hat{i} = \frac{1}{2}v\hat{i}$$

Eksempel: Kollisjon mellom to atomer

ingen ytre krefter
$\Rightarrow$ ingen kraftmomenter
$\Rightarrow$ spinn er bevart

$$\vec{\tau}_{\text{net}} = \frac{d}{dt}\vec{L} = \vec{0}$$



spinn om massesenteret rett før kollisjonen:

$$\vec{L}_{A,cm} = \vec{r}_{A,cm} \times m\vec{v}_{A,cm} = -R\,\hat{j} \times (-\frac{1}{2}mv\hat{i}) = -\frac{1}{2}mRv\hat{k}$$

$$\vec{L}_{B,cm} = \vec{r}_{B,cm} \times m\vec{v}_{B,cm} = R\,\hat{j} \times \frac{1}{2}mv\hat{i} = -\frac{1}{2}mRv\hat{k}$$

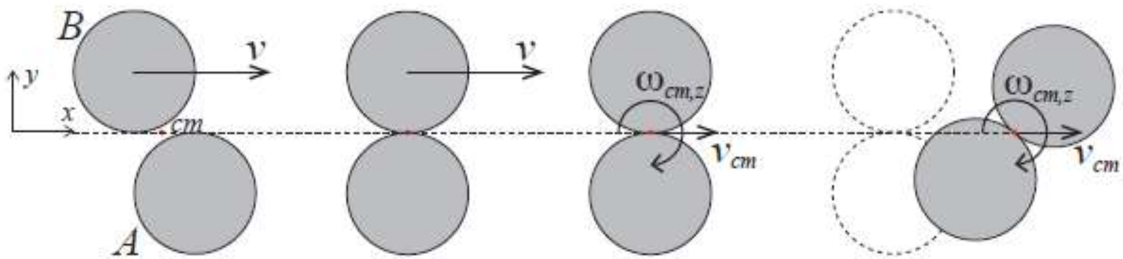
$$\vec{L}_{cm} = \vec{L}_{A,cm} + \vec{L}_{B,cm} = -mRv\hat{k}$$

etter kollisjonen roterer hele systemet med vinkelhastighet ω om massesenteret $L_{cm,z} = I_{cm}\omega$

treghetsmoment: $I_{cm} = 2(\frac{2}{5}mR^2 + mR^2) = \frac{14}{5}mR^2$

$$\omega = \frac{L_{cm,z}}{I_{cm}} = -\frac{mRv}{\frac{14}{5}mR^2} = -\frac{5}{14}\frac{v}{R}$$

Eksempel: Kollisjon mellom to atomer



er den kinetiske energien bevart?

1. ja
2. nei

kinetisk energi før kollisjonen: $K_0 = \frac{1}{2} m v^2$

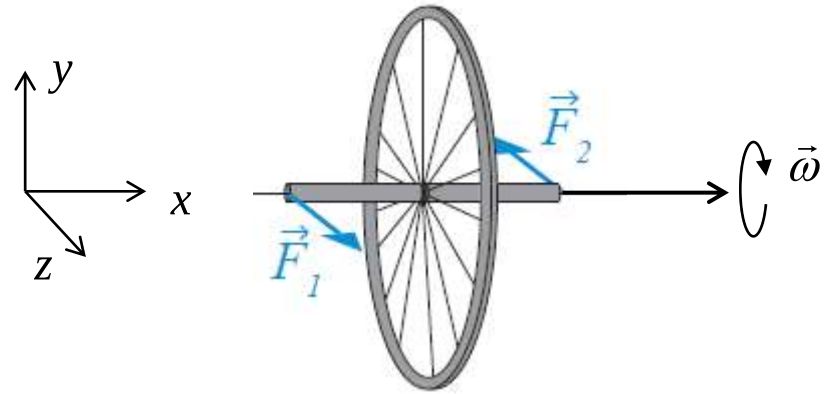
etter kollisjonen: $K_1 = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$

$$= \frac{1}{2} 2m (\frac{v}{2})^2 + \frac{1}{2} \frac{14}{5} m R^2 (\frac{5}{14} \frac{v}{R})^2$$

$$= \frac{1}{4} m v^2 + \frac{1}{2} \frac{5}{14} m v^2 = \frac{3}{7} m v^2$$

$K_1 < K_0$ kollisjonen er uelastisk ikke konservative indre krefter

Endring av spinnakse



hjulet roterer om x aksen: $\vec{L} = I_x \omega \hat{i}$

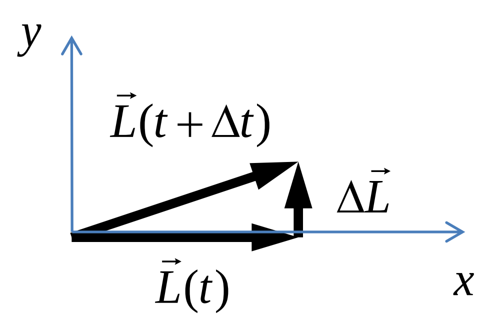
origo i massesenteret
kreftene angriper i avstand *x*

kraftmoment: $\vec{\tau} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = -x\hat{i} \times F\hat{k} + x\hat{i} \times (-F\hat{k}) = 2xF\,\hat{j}$

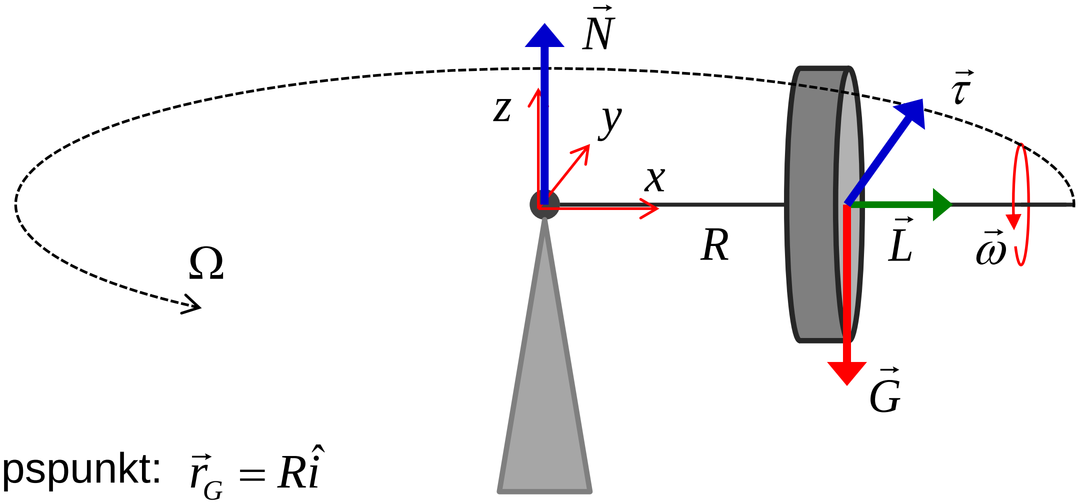
spinnsats: $\vec{\tau} = \frac{d}{dt}\vec{L}$

over et tidsintervall Δt: $\vec{L}(t+\Delta t) = \vec{L}(t) + \vec{\tau}\Delta t = I_x \omega \hat{i} + 2xF\,\Delta t\,\hat{j}$

kreftene virker i $\pm z$ retning
spinnet reagerer i *y* retning



Eksempel: Gyroskop



spinn i x retning: $\vec{L} = I\vec{\omega}$

normalkraft virker i rotasjonspunkt
$\Rightarrow$ ingen kraftmoment

gravitasjon: $\vec{G} = -mg\hat{k}$ angrepspunkt: $\vec{r}_G = R\hat{i}$

kraftmoment: $\vec{\tau} = \vec{r}_G \times \vec{G} = R\hat{i} \times (-mg\hat{k}) = mgR\hat{j}$

spinnsats: $\vec{\tau} = \frac{d}{dt}\vec{L}$ $\Delta\vec{L} = \vec{L}(t+\Delta t) - \vec{L}(t) = \vec{\tau}\,\Delta t$

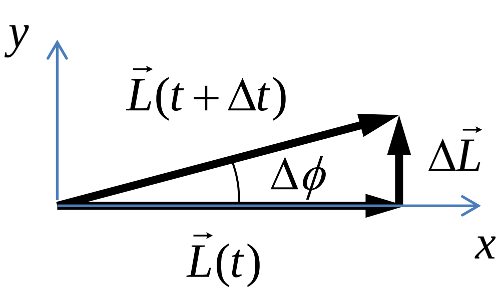
spinnaksen dreier i horisontalplanet om z aksen

$\Rightarrow$ presesjon om z aksen med vinkelhastighet Ω

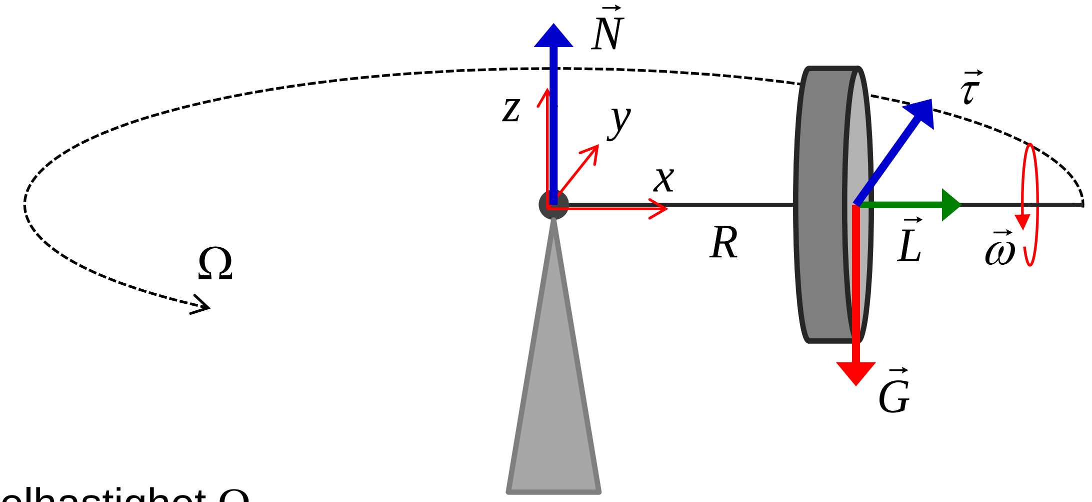
vi antar at $\omega >> \Omega$

gyroskopet spinner fortere om sin egen akse
enn presesjonen om aksen z

$\Rightarrow$ spinnvektor er i xy-planet



Eksempel: Gyroskop

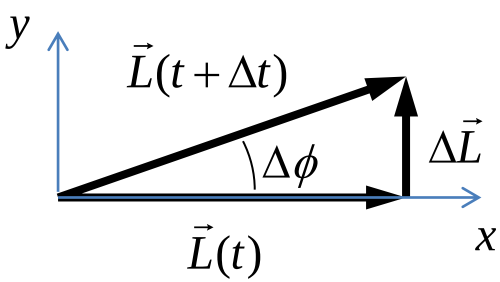


spinn i x retning: $\vec{L} = I\vec{\omega}$

kraftmoment: $\vec{\tau} = \dfrac{\Delta\vec{L}}{\Delta t} = mgR\,\hat{j}$

$\Rightarrow$ presesjon om z aksen med vinkelhastighet Ω

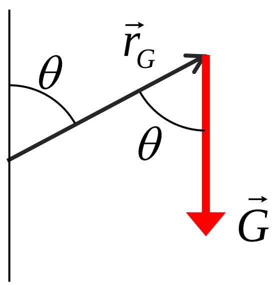
$$\Omega = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}\frac{|\Delta\vec{L}|}{|\vec{L}|} = \frac{|\vec{\tau}|}{|\vec{L}|} = \frac{mgR}{I\omega}$$

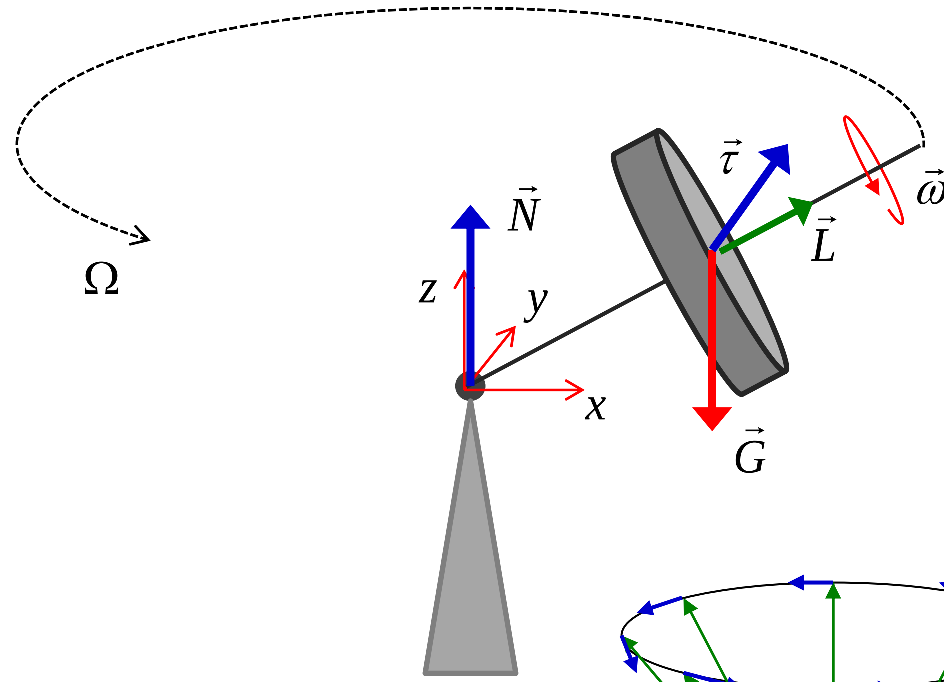


Ω øker når ω blir mindre på grunn av friksjon

Eksempel: Gyroskop

spinn i xz planet: $\vec{L} = I\vec{\omega}$



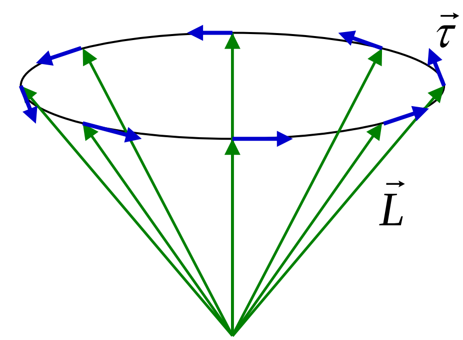


kraftmoment: $\vec{\tau} = \vec{r}_G \times \vec{G}$

$$= (R\sin\theta\,\hat{i} + R\cos\theta\,\hat{k}) \times (-mg\hat{k})$$

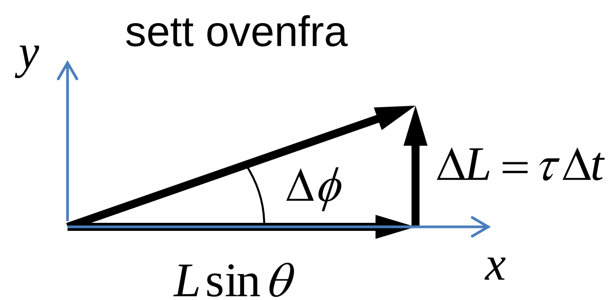
$$= mgR\sin\theta\,\hat{j}$$

presesjon om z aksen



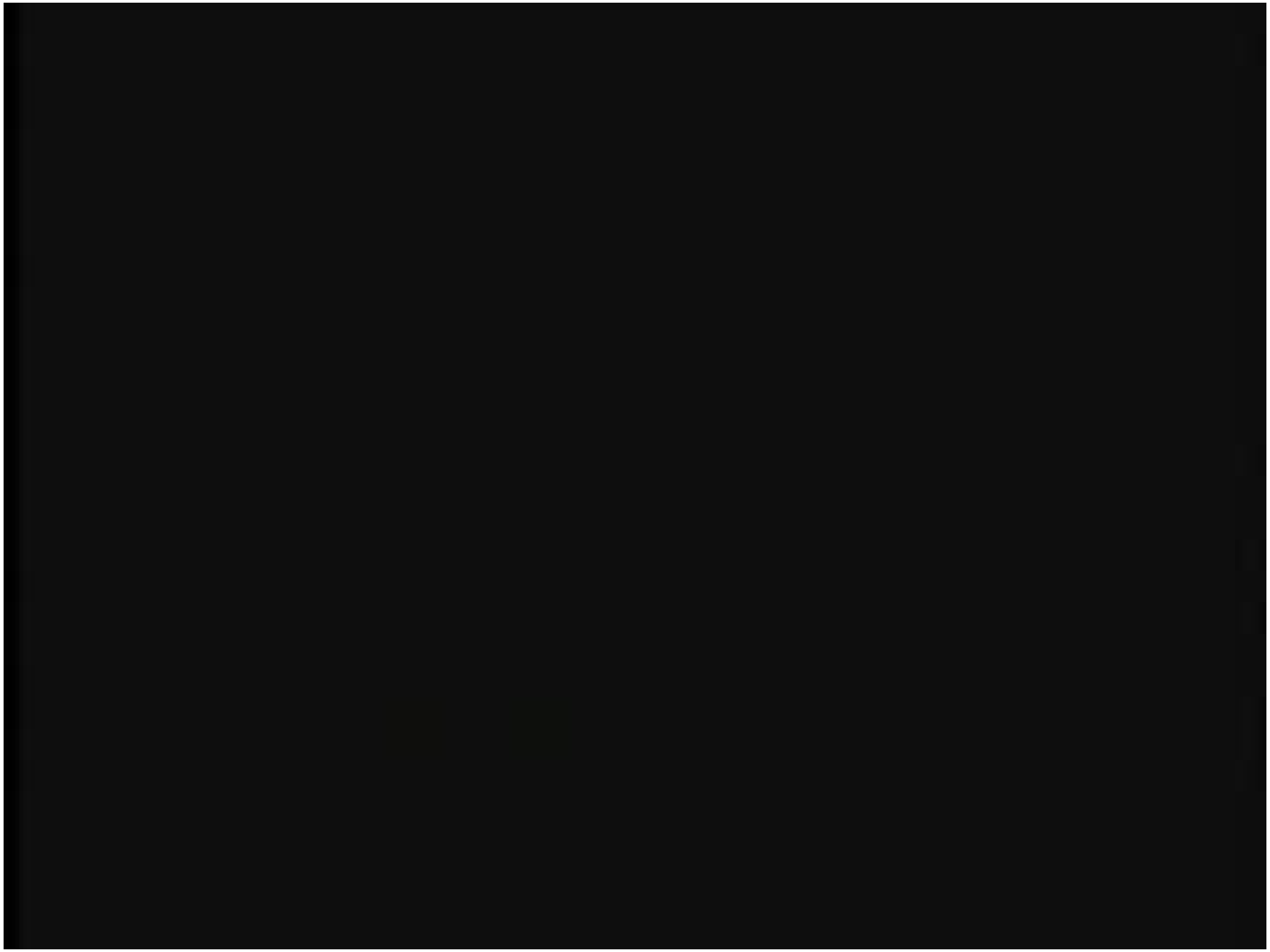
$$\Delta L = \Delta\phi\, L\sin\theta$$

$$\Omega = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{\tau}{L\sin\theta} = \frac{mgR\sin\theta}{I\omega\sin\theta} = \frac{mgR}{I\omega}$$



Space shuttle mission STS-54, Endeavour, Jan. 1993

Pilot Donald R. McMonagle



http://aesp.nasa.okstate.edu/ftp/anderson/toysweb/T2gravitron.wmv