

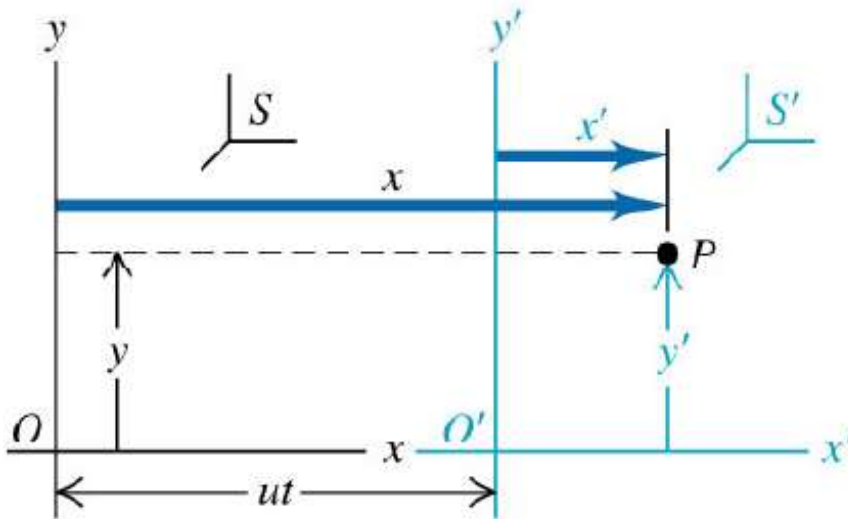
Spesiell relativitetsteori

16.05.2013

Einsteins postulatene

1. Fysikkens lover er de samme i alle inertialsystemer.

2. Lyshastigheten er den samme i alle inertialsystemer, og er uavhengig av observatørens bevegelse.



System S beveger seg relativ til system S' med hastighet u .

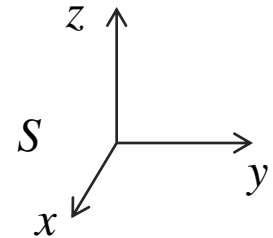
Galileo transformasjon:

$$x = x' + ut \quad v_x = v'_x + u$$

inkonsistent med Einsteins 2. postulat: $c = c'$

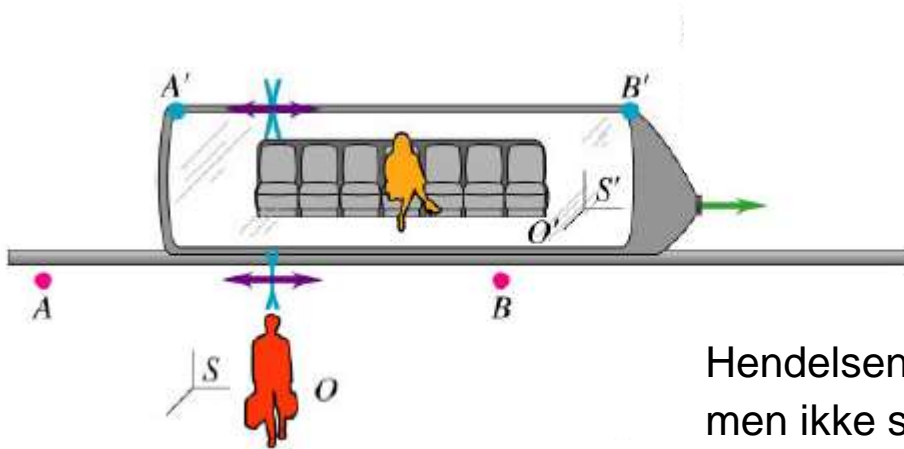
Definisjon av hendelse

En hendelse er en begivenhet (noe) som kan lokaliseres i rom og tid dvs. gis koordinater (x, y, z, t) .



Definisjon av samtidighet

To hendelser er samtidige dersom de inntreffer ved samme tid i ett og samme system S .



Hendelsene samtidig i system S ,
men ikke samtidig i system S'

Tidsdilatasjon

Et tidsintervall som er målt mellom to hendelser i et referansesystem der posisjonen er identisk for begge hendelser, kalles **egentid** Δt_0 .

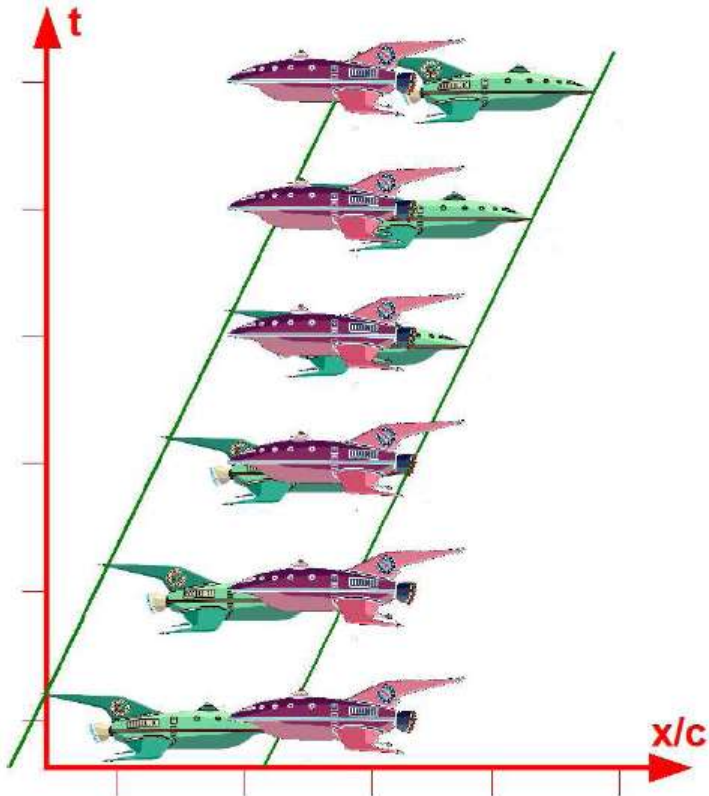
En annen observatør som beveger seg med konstant fart u relativ til den første måler et tidsintervall:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \gamma \Delta t_0$$

tidsdilatasjon: $\Delta t > \Delta t_0$

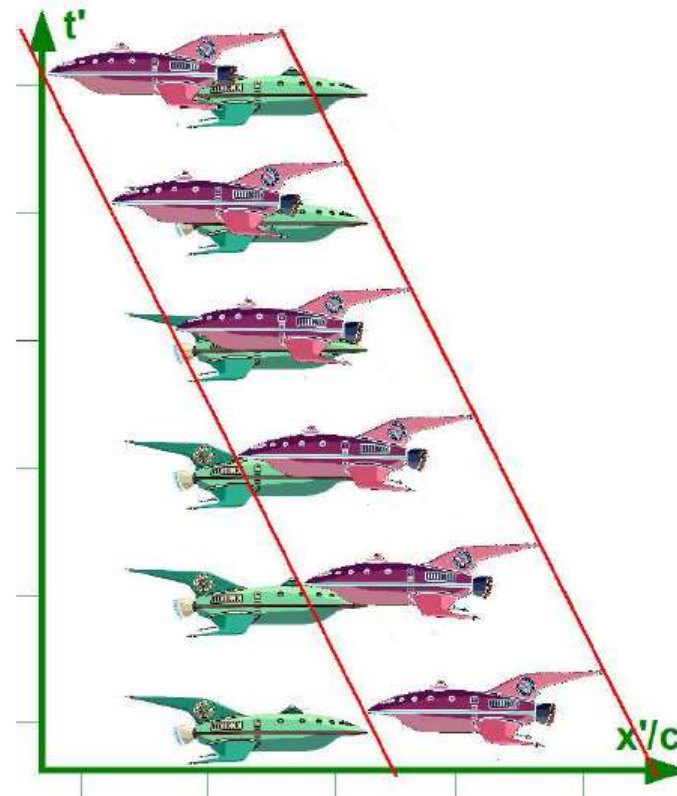
Minkowski diagrammer

to romskip passerer hverandre



system S hvor romskip 1 er i ro
stigning gir hastighet til romskip 2

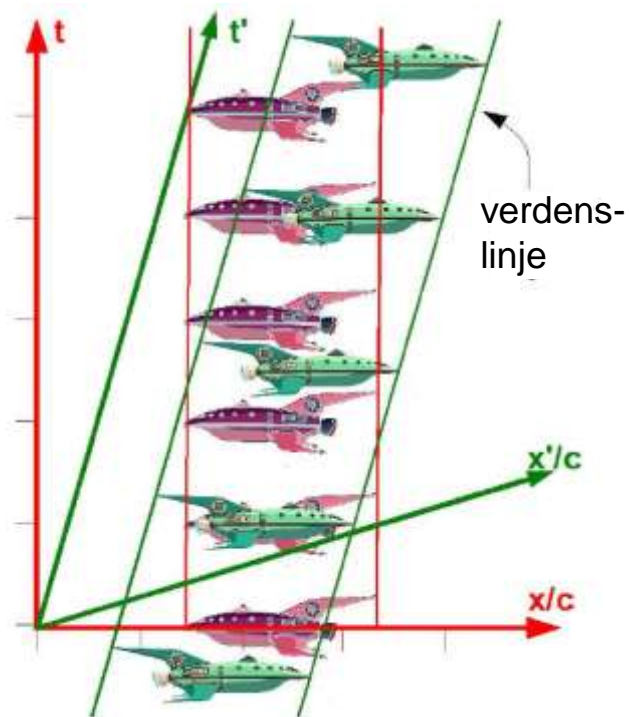
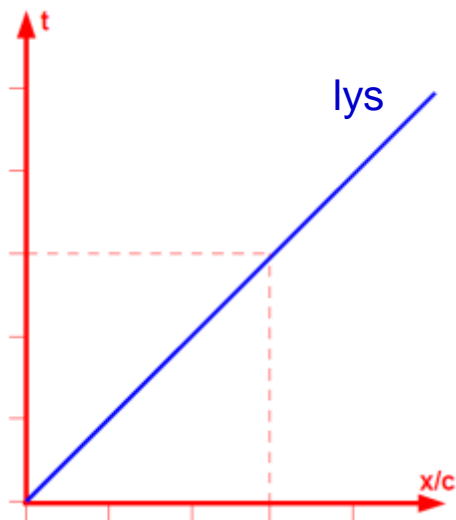
$$v_2 = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$



system S' hvor romskip 2 er i ro
stigning gir hastighet til romskip 1

$$v'_1 = \frac{\Delta s'}{\Delta t'}$$

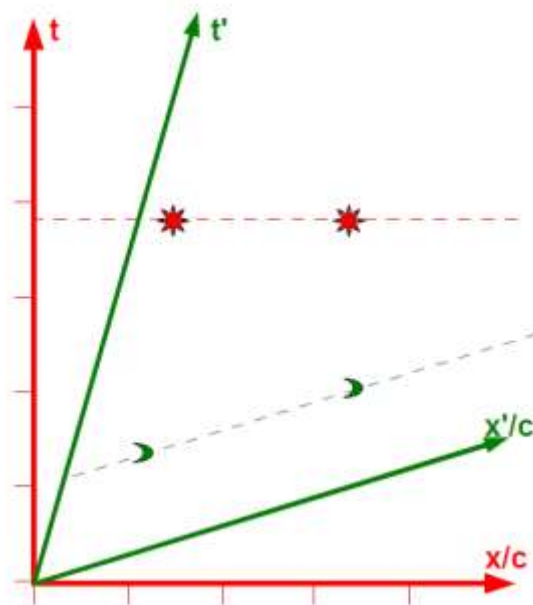
Minkowski diagrammer



vi tegner begge systemer i ett diagram:

jo fortere S' beveger seg relativ til S , jo mindre er vinkelen for S' .

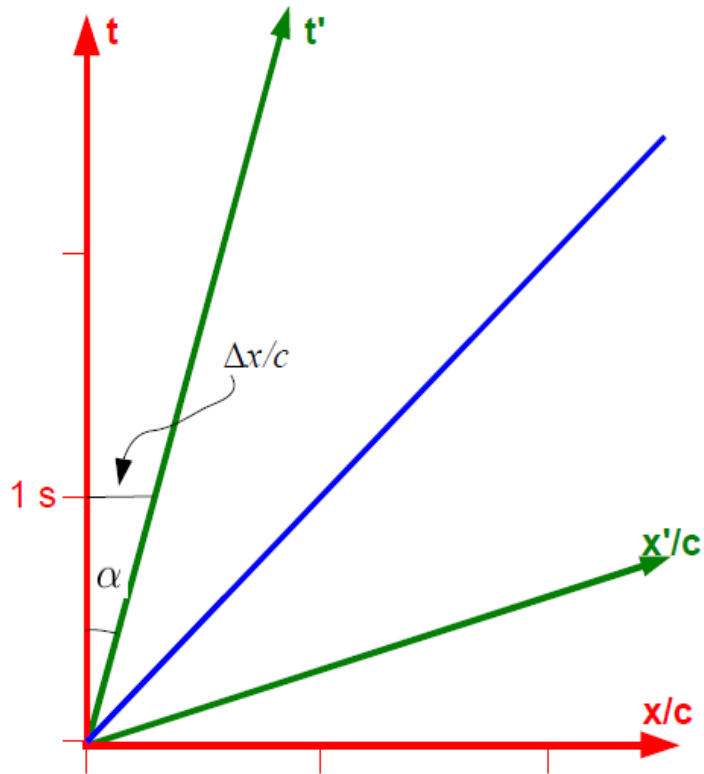
Objekter beveger seg langs verdenslinjer gjennom tiden.



to hendelser som er samtidig i romskip 1

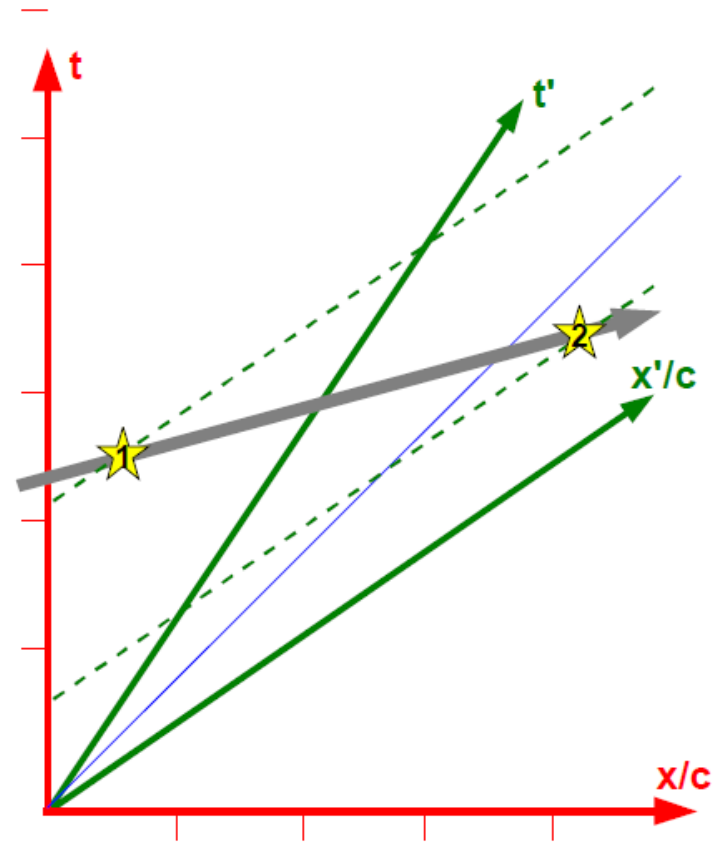
to hendelser som er samtidig i romskip 2

Minkowski diagrammer



$$\tan \alpha = \frac{\Delta x / c}{\Delta t} = \frac{v}{c}$$

warp drive?



hvis et romskip kunne bevege seg med $v > c$:

hendelse 1 før hendelse 2 i system S
 hendelse 2 før hendelse 1 i system S'

Tvillingparadokset

Stella er astronaut og tar en tur til Betelgeuse og tilbake.
Hennes tvillingbror Stein forbli på jorden.

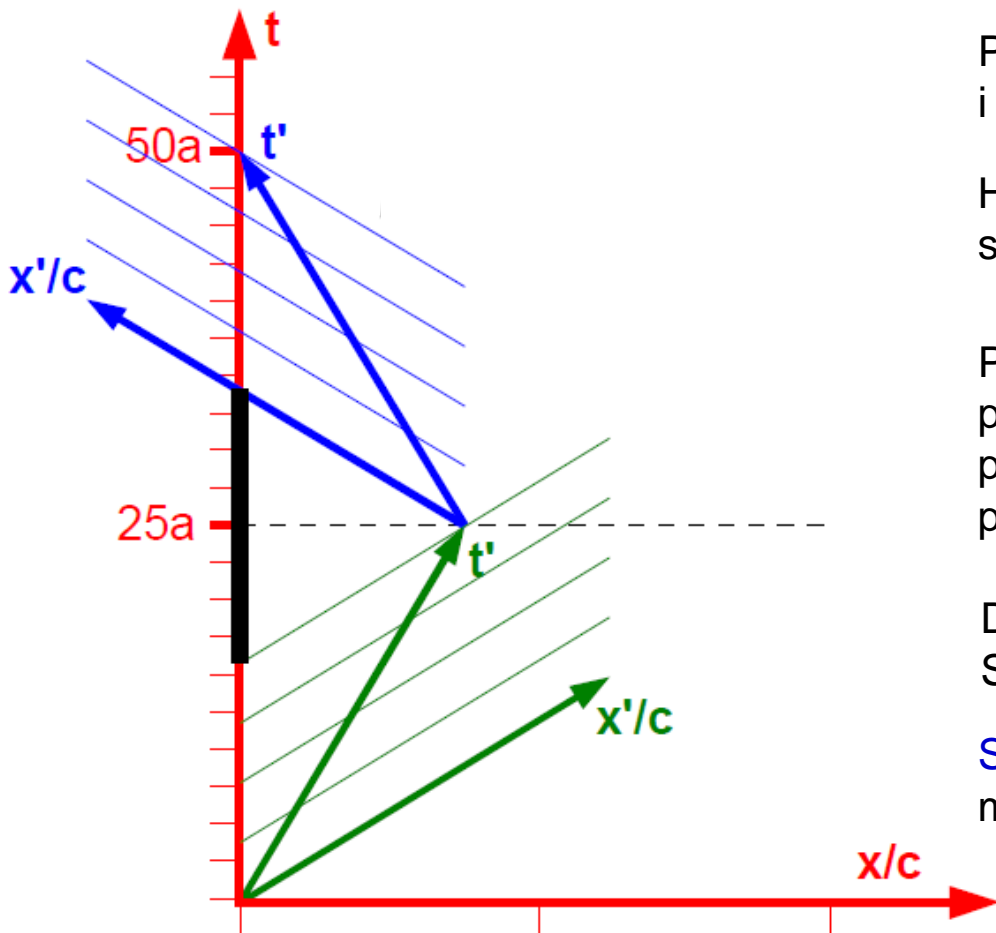
Pga. av hennes høy hastighet går tiden saktere for Stella (tidsdilatasjon) og hun er yngre enn Stein når hun kommer tilbake.

Sett fra Stellas synspunkt i romskipet beveger Stein seg med høy hastighet, så tiden går saktere for Stein og Stella er eldre når hun kommer tilbake.

Når Stella kommer tilbake:

1. er Stella yngre enn Stein
2. er begge like gammelt
3. er Stella eldre enn Stein
4. dette er et paradoks og det finnes ingen svar

Tvillingparadokset



Stein forbli i et inertialsystem, men **Stella** trenger en akselerasjon for å snu retningen og returnere til jorden.

På veien tilbake befinner **Stella** seg i et annet inertialsystem.

Horisontale linjer tilsvarer hendelser som **Stein** oppfatter som samtidig.

På veien bort oppfatter **Stella** hendelser på de grønne linjene som samtidig, mens på veien tilbake oppfatter **Stella** hendelser på de blå linjene som samtidig.

Det er en periode i **Steins** liv som **Stella** aldri oppfatter som samtidig.

Stella oppfatter at **Stein** eldes meget rask mens hun snu retningen.

⇒ **Stella** er yngre enn **Stein** nor hun kommer tilbake til jorden.

Hvordan kan vi måle en lengde?



Det er enkelt hvis objektet er i ro:
Vi bestemmer posisjon til begge endene,
og det spiller ingen rolle når vi gjøre det.

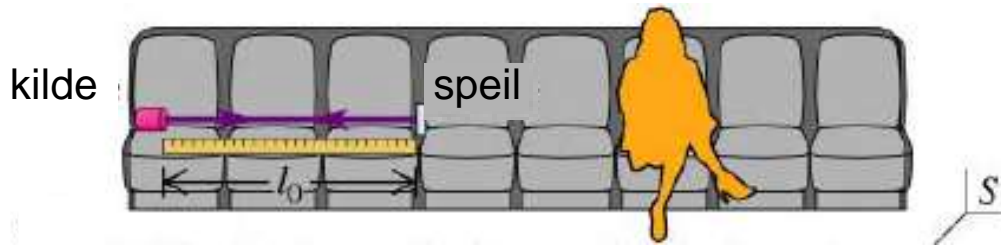


Hva hvis vi vil måle lengden
til en bil som kjører?

Vi kan bestemme posisjonen
til begge endene, men vi må
gjøre de samtidig.

Problem: to hendelser som er samtidig i ett
referansesystem er ikke samtidig i et annet.

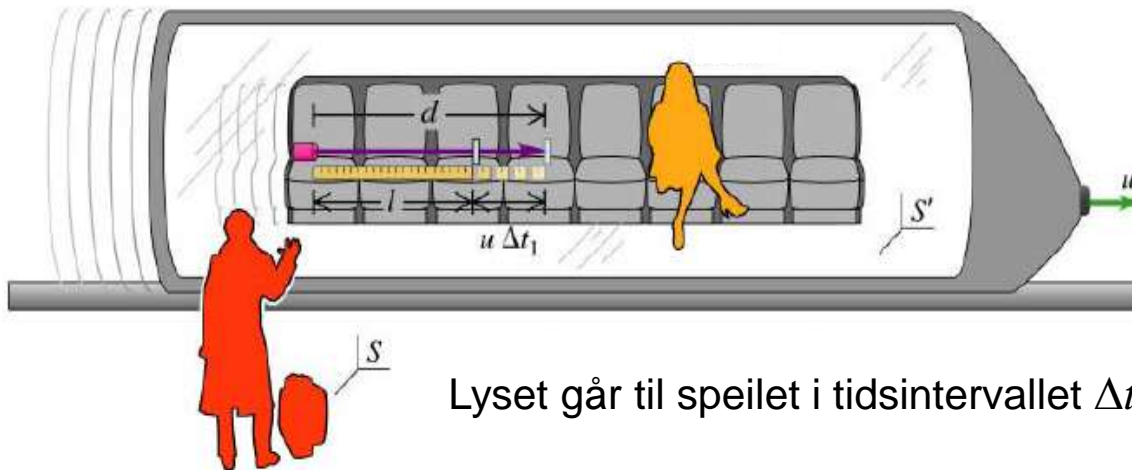
Tankeeksperiment



En lyskilde er festet på venstre enden av en linjal og et speil på høyre enden.

Linjalen er i ro i system S' og har lengden l_0 . Lyset går til speilet og tilbake i tidsintervall Δt_0 (egentid).

$$\Delta t_0 = \frac{2l_0}{c}$$



I system S beveger linjalen seg med fart u og en observatør måler lengden l .

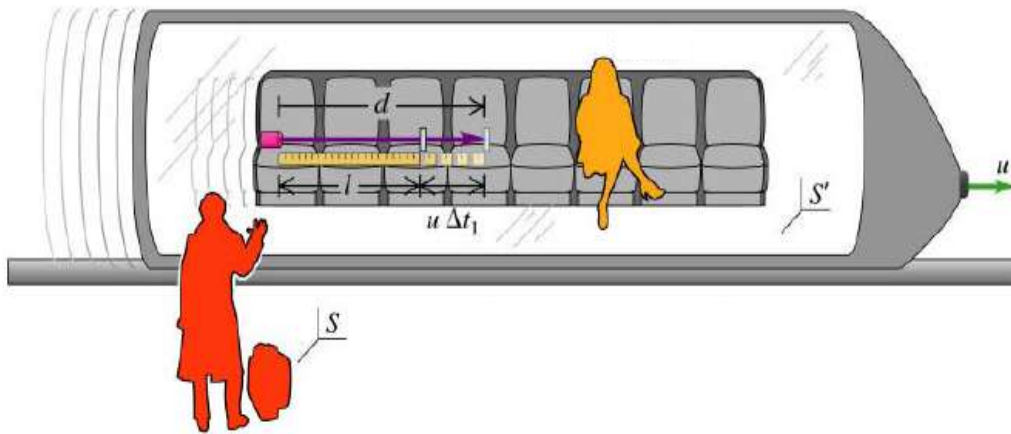
Lyset går til speilet i tidsintervallet Δt_1 og dekker avstanden $d_1 = l + u\Delta t_1$

Lyset beveger seg med hastighet c : $d_1 = c\Delta t_1$

$$c\Delta t_1 = l + u\Delta t_1$$

$$\Delta t_1 = \frac{l}{c - u}$$

(det betyr ikke at lyset beveger seg med hastighet $c - u$)



Lyset går tilbake i tidsintervallet Δt_2 og dekker avstanden:

$$d_2 = l - u\Delta t_2 = c\Delta t_2$$

$$\Delta t_2 = \frac{l}{c+u}$$

tiden lyset bruker for å gå frem og tilbake:

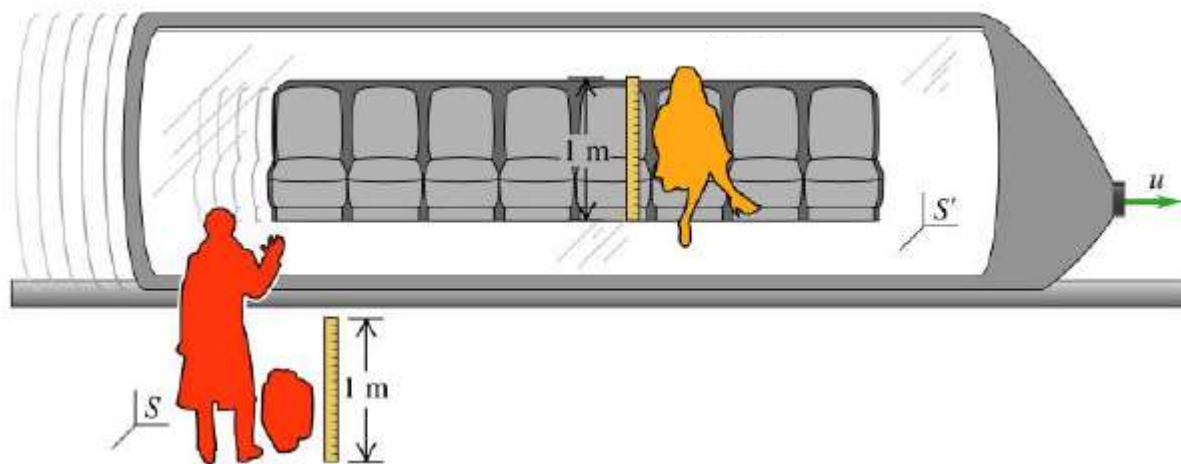
$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \frac{l}{c-u} + \frac{l}{c+u} = \frac{l(c+u) + l(c-u)}{c^2 - u^2} = \frac{2l}{c\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)} = \gamma^2 \frac{2l}{c}$$

tidsdilatasjon: $\Delta t = \gamma \Delta t_0 = \gamma \frac{2l_0}{c} = \gamma^2 \frac{2l}{c}$

lengdekontraksjon: $l = \frac{l_0}{\gamma}$

En lengde som måles i et koordinatsystem hvor legemet er i ro kalles **egenlengde**.

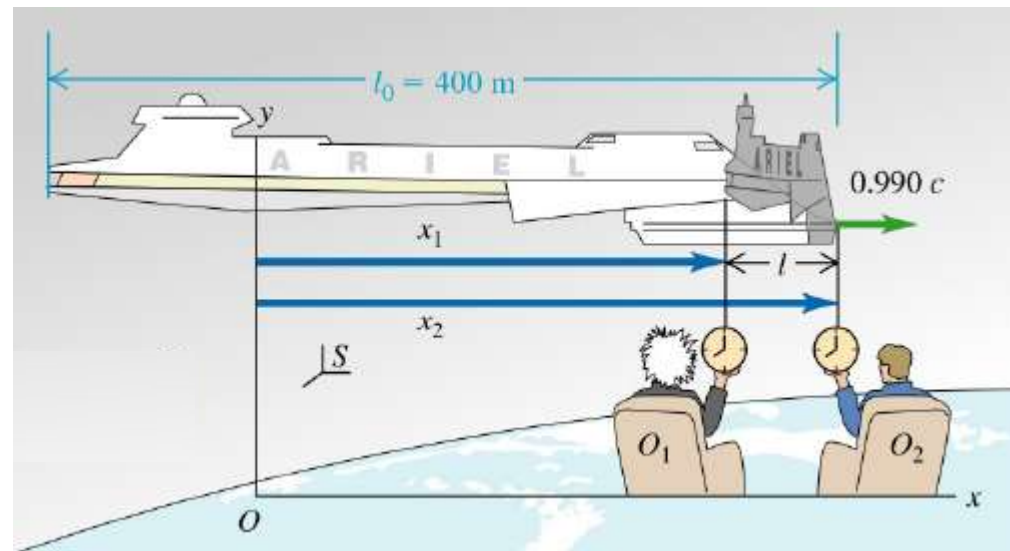
Lengden vi måler i et koordinatsystem som beveger seg relativ til legemet er kortere: **lengdekontraksjon**.



det er ingen lengdekontraksjon
vinkelrett på bevegelsesretningen

Et romskip flyr forbi jorden med $v = 0.99 c$. En person i romskipet måler at romskipet er 400 m lang. Hvilken lengde måler en observatør på jorden?

1. 56.4 m
2. 400 m
3. 2.84 km



$l_0 = 400$ m er egenlengden til romskipet

En observatør på jorden beveger seg med hastighet $v = 0.99 c$ relativ til romskipet.

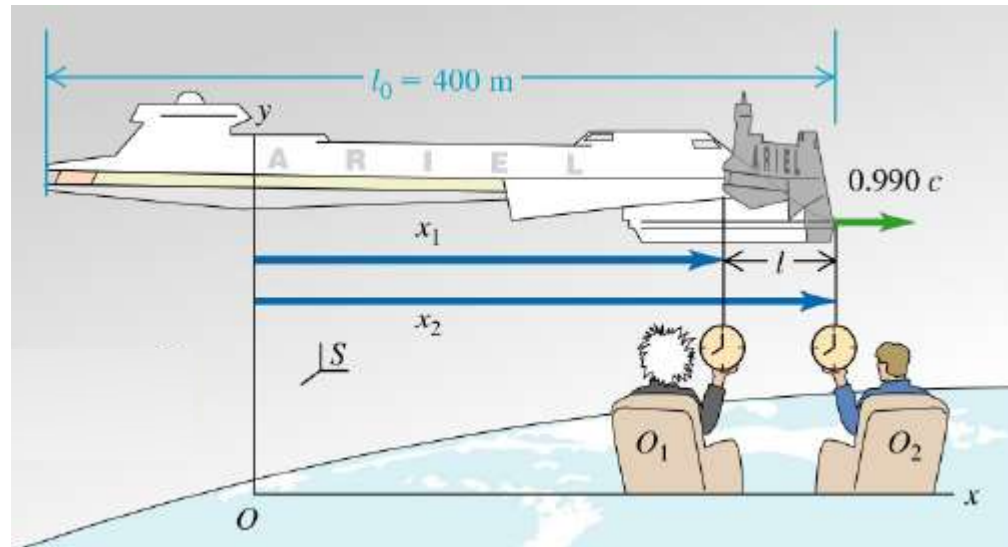
lengdekontraksjon: $l = \frac{l_0}{\gamma}$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = 7.1$$

$$l = \frac{400 \text{ m}}{7.1} = 56.4 \text{ m}$$

To observatører O_1 og O_2 sitter i avstand 56.4 m på jorden. Hvilken avstand vil mannskapet måle fra et romskip som beveger seg med $v = 0.99 c$ relativ til jorden?

1. 7.96 m
2. 56.4 m
3. 400 m



I system jorden er observatørene i ro.

Avstand mellom de to målt på jorden er egenlengden: $l_0 = 56.4 \text{ m}$

Romskipet beveger seg med hastighet $v = 0.99 c$ relativ til jorden:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = 7.1$$

lengdekontraksjon: $l = \frac{l_0}{\gamma} = \frac{56.4 \text{ m}}{7.1} = 7.96 \text{ m}$

Eksempel: myon

I systemet hvor myonet er i ro er levetid $\Delta t_0 = 2.2 \mu\text{s}$ (egentid)

I laboratoriesystemet er levetid lenger på grunn av tidsdilatasjon:
for $v = 0.99 c$ har vi funnet:

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0 = 15.6 \mu\text{s}$$

Sett fra jorden beveger myonet seg en strekning: $l_0 = c \Delta t = 4630 \text{ m}$

Det er egenlengden siden jeg som observatør måle strekningen i ro.

I myonets system beveger jorden seg,
og myonet ser strekningen kontrahert:

$$l = \frac{l_0}{\gamma} = 653 \text{ m}$$

Det tilsvarer lengden myonet
beveger seg i sin egentid: $l = c \Delta t_0$



$v = 0$



$v = 0.8c$



$v = 0.95c$



$v = 0.99c$

Lorentz transformasjon

Vi vil finne relasjonen mellom koordinatene (x, y, z, t) i system S og (x', y', z', t') i system S' , som beveger seg med hastighet u relativ til S .

posisjon av O' i system S ved tid t er ut

x' er egenlengde i S' ,

men den er kontrahert i S : $x = ut + \frac{x'}{\gamma}$

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

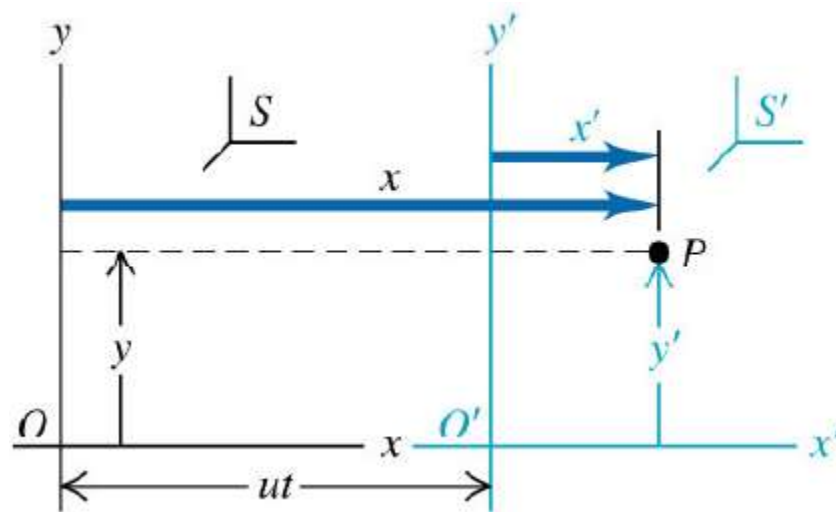
transformasjon fra S til S' er den samme som fra S' til S bare med motsatt fortegn for relativhastigheten u :

$$x' = -ut' + \frac{x}{\gamma}$$

$$\frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = -ut' + x\sqrt{1 - u^2/c^2}$$

$$ut' = \frac{x(1 - u^2/c^2) - (x - ut)}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

$$t' = \frac{t - ux/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \gamma\left(t - \frac{u}{c^2}x\right)$$



Lorentz transformasjon

$$x' = \gamma(x - ut)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{u}{c^2}x\right)$$

transformasjon tilbake:

omvendt fortegn for u og bytte S og S'

$$x = \gamma(x' + ut')$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$t = \gamma\left(t' + \frac{u}{c^2}x'\right)$$

lengdekontraksjon

et legeme i ro i system S' har **egenlengde**: $L' = x'_1 - x'_2$

legemet beveger seg i system S

hvis vi vil finne lengden i system S må

vi måle posisjonene x_1 og x_2 **samtidig** ($t_1 = t_2$)

$$\begin{aligned} L' &= x'_1 - x'_2 = \gamma(x_1 - ut_1) - \gamma(x_2 - ut_2) \\ &= \gamma(x_1 - x_2) - \gamma u(t_1 - t_2) = \gamma(x_1 - x_2) = \gamma L \end{aligned}$$

$$L = \frac{L'}{\gamma}$$

tidsdilatasjon

egentid: vi maler et tidsintervall $\Delta t'$ på samme sted: $x'_1 = x'_2$

$$\begin{aligned} \Delta t = t_1 - t_2 &= \gamma\left(t'_1 + \frac{u}{c^2} x'_1\right) - \gamma\left(t'_2 + \frac{u}{c^2} x'_2\right) \\ &= \gamma(t'_1 - t'_2) + \gamma \frac{u}{c^2} (x'_1 - x'_2) = \gamma \Delta t' \end{aligned}$$