Repetisjon

21.05.2013

Lorentz transformasjon

$$x' = \gamma(x - ut)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{u}{c^2}x\right)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

transformasjon tilbake:
omvendt fortegn for u og bytte S og S'

$$x = \gamma(x' + ut')$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$t = \gamma\left(t' + \frac{u}{c^2}x'\right)$$

små hastighet u: $\gamma \approx 1$ og $\frac{u}{c^2} \approx 0$

$\Rightarrow$ $x' = x - ut$

$t' = t$ Galileo transformasjon

Tidsdilatasjon

Et tidsintervall som er målt mellom to hendelser i et referansesystem der posisjonen er identisk for begge hendelser, kalles ***egentid*** Δt_0.

En annen observatør som beveger seg med konstant fart u relativ til den første måler et tidsintervall:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \gamma\, \Delta t_0$$

tidsdilatsjon: $\Delta t > \Delta t_0$

Lengdekontraksjon

Lengden til et legeme som er målt i et referansesystem hvor legemet er i ro kalles **egenlengde** Δx_0.

En annen observatør som beveger seg med konstant fart u relativ til den første måler en lengde:

$$\Delta x = \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\, \Delta x_0 = \frac{\Delta x_0}{\gamma}$$

lengdenkontraksjon: $\Delta x < \Delta x_0$

Lorentz transformasjon for hastighet

et partikkel beveger seg i system S med hastighet $v_x = \dfrac{dx}{dt}$

og i system S' med hastighet $v'_x = \dfrac{dx'}{dt'}$

Lorentz transformasjon: $dx' = \gamma(dx - u\,dt)$ $\qquad dt' = \gamma(dt - \dfrac{u}{c^2}dx)$

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - u\,dt}{dt - \frac{u}{c^2}dx} = \frac{\frac{dx}{dt} - u}{1 - \frac{u}{c^2}\frac{dx}{dt}} = \frac{v_x - u}{1 - \frac{u}{c^2}v_x}$$

hvis $u << c$: $\quad v'_x = v_x - u \quad \Rightarrow$ Galileo transformasjon

hvis: $v_x = c \quad v'_x = \dfrac{c-u}{1-\frac{u}{c^2}c} = \dfrac{c(1-u/c)}{1-u/c} = c \quad \Rightarrow$ Einsteins 2. postulat

programmering på papir i eksamen

... skriv et program som finner posisjonen og hastigheten...
Det er tilstrekkelig kun å ta med integrasjonsløkken.

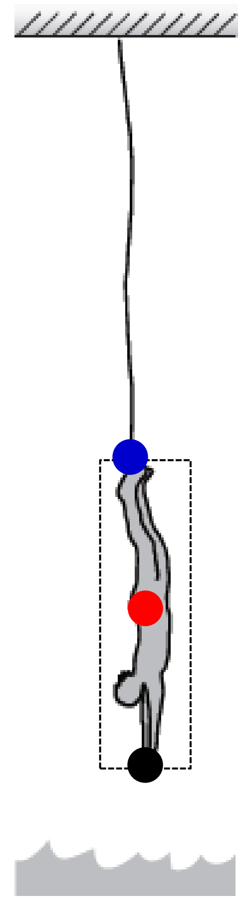
eksempel: $F = \frac{C}{x^2}$

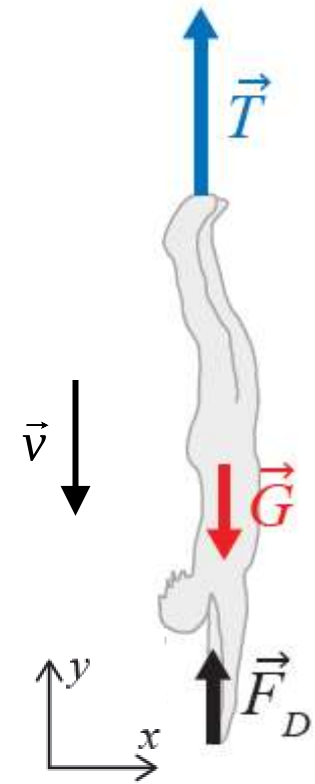
$$\vec{F} = \frac{C}{r^2}\hat{e}_r = \frac{C}{r^3}\vec{r}$$

- syntaks må ligne matlab eller python
- beregningen må foregå i diskrete tidsskritt
  $\Rightarrow$ må bruke indeks
- ikke bland skalarer og vektorer

Fri-legeme diagram

1. Del problemet inn i system og omgivelser.
   system: person; omgivelse: tau, luft
2. Tegn figur av objektet og alt som berører det.
3. Tegn en lukket kurve rundt systemet.
4. Finn kontaktpunkter hvor kontaktkrefter angriper.
   Personen er i kontakt med tauet og med luften.
5. Navngi kontaktkrefter og definer symboler.
   Kraft fra tauet på personen: T
   Luftmotstand: F_D
6. Identifiser langtrekkende krefter og definer symboler.
   Gravitasjonskraft: G
7. Tegn objektet med skalerte krefter.
8. Tegn inn koordinatsystemet.
9. Det kan hjelpe å tegne inn en hastighetsvektor
   (f.eks. hvis det er hastighetsavhengige krefter).
   Ikke tegn hastighetsvektorer i kontakt med system:
   ikke bland hastigheter og krefter





	translasjon	rotasjon	
posisjon	$x(t)$	$\theta(t)$	vinkel
hastighet	$v(t) = \frac{dx}{dt}$	$\omega(t) = \frac{d\theta}{dt}$	vinkelhastighet
akselerasjon	$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}$	$\alpha(t) = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$	vinkelakselerasjon
masse	m	$I = \int_M \rho^2 dm$	treghetsmoment
translatorisk energi	$K_t = \frac{1}{2} m v^2$	$K_r = \frac{1}{2} I \omega^2$	rotasjonell energi
kraft	$\vec{F}$	$\vec{\tau}_O = \vec{r} \times \vec{F}$	kraftmoment
bevegelsesmengde	$\vec{p} = m\vec{v}$	$\vec{l}_O = \vec{r} \times \vec{p}$	spinn
N2L	$\vec{F} = \frac{d\,\vec{p}}{dt} = m\vec{a}$	$\tau_z = \frac{d}{dt} L_z = I\alpha$	spinnsats

Bevaring av energi, bevegelsesmengde, spinn

du må begrunne bruk av bevaringslover

- konservative krefter
- netto ytre krefter
- netto ytre kraftmomenter

konservativ kraft $\Leftrightarrow$ kraft som bare avhenger av posisjon

arbeid avhenger bare av start- og sluttposisjon,
ikke av veien i mellom

vi kan finne et potensial slik at $\frac{dU}{dx} = -F(x)$ 3-dim: $\vec{F} = -\vec{\nabla} U$

energi er bevart $K_0 + U(x_0) = K_1 + U(x_1)$

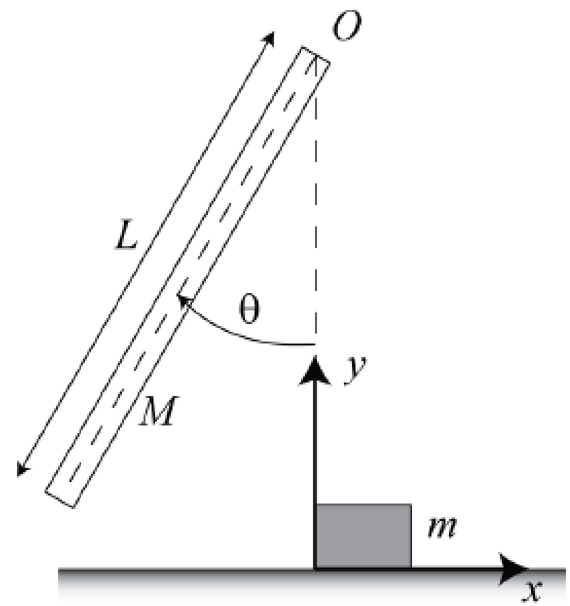
flere konservative krefter: $F_{\text{net}} = \sum_i F_i(x)$

potensial til hver kraft $\frac{dU_i}{dx} = -F_i(x)$

energibevaring: $K_0 + \sum_i U_i(x_0) = K_1 + \sum_i U_i(x_1)$

Eksempel: Vår 2007, oppgave 2

I denne oppgaven skal vi studere et støt mellom en stang og en liten kloss. Stangen er homogen og har masse M og lengde L. Stangen er festet med et friksjonsfritt hengsel til punktet O slik at det kan rotere som vist i figuren. Klossen er liten sammenliknet med stangen. Klossen har masse m og ligger til å begynne med i ro på et friksjonsfritt underlag. Stangen holdes i ro med vinkelutslaget θ_0 og slippes. Stangen treffer klossen idet stangen henger rett ned, det vil si idet $\theta = 0$. Stangens treghetsmoment om massesenteret er $I_{cm} = \frac{1}{12}ML^2$.



b) Finn stangens kinetiske energi som funksjon av vinkelen θ. Se bort fra luftmotstand.

staven beveger seg ned til den treffer på klossen.

krefter: tyngdekraft, normalkraft i hengselen, ingen friksjon, ingen luftmotstand

tyngdekraften er konservativ

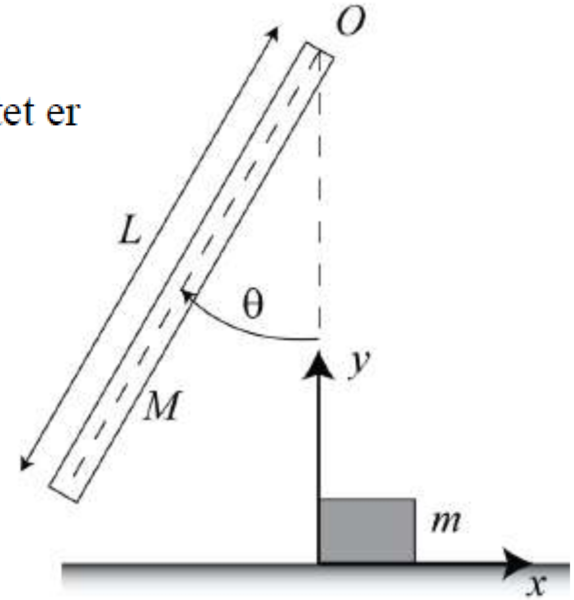
normalkraften gjør ingen arbeid fordi hengselen beveger seg ikke

$\Rightarrow$ vi kan bruke energibevaring

Anta at støtet er fullstendig elastisk.

d) (Noe vanskelig) Vis at klossens hastighet umiddelbart etter støtet er

$$v_1 = \frac{2\omega_0 L}{1 + mL^2 / I_O}$$



støtet er fullstendig elastisk
$\Rightarrow$ energi er bevart (per definisjon)

i kollisjonen oppstår krefter fra hengselen på stangen
$\Rightarrow$ det virker ytre krefter og bevegelsesmengden er ikke bevart

normalkraft i hengselen gir ingen kraftmoment om O
tyngdekraft til stangen gir ingen kraftmoment siden "kraftarm" er null
$\Rightarrow$ ingen kraftmoment fra ytre krefter om O
$\Rightarrow$ spinn om O er bevart

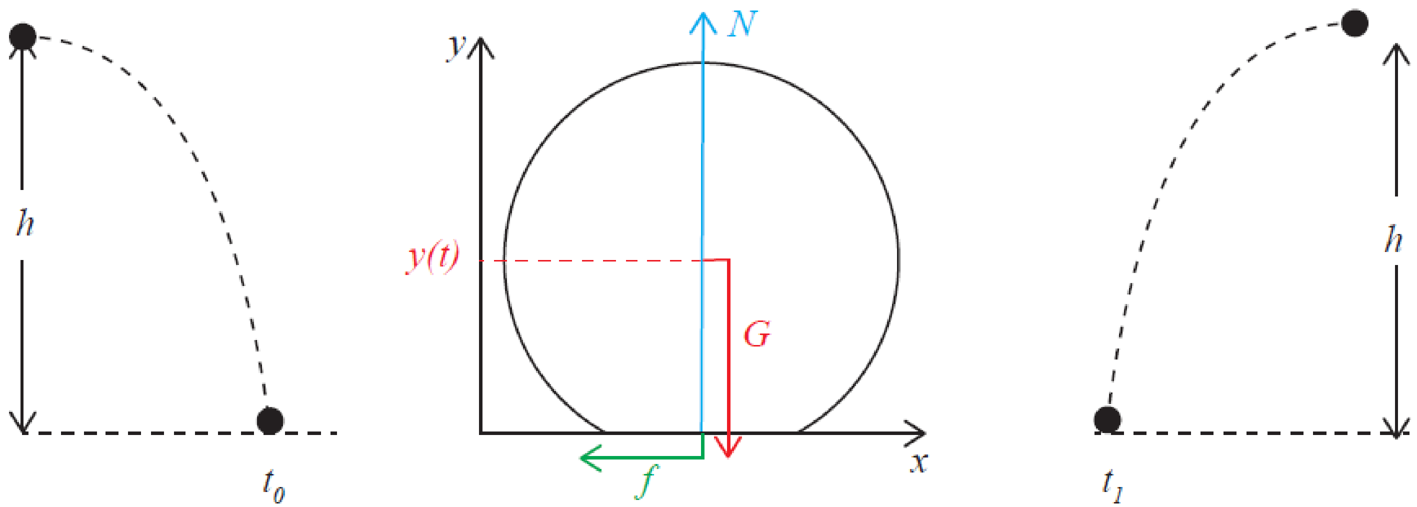
Anta nå at støtet er fullstendig uelastisk

g) Finn vinkelhastigheten til stangen og hastigheten til klossen umiddelbart etter støtet.

argumentene for spinnbevaring er fortsatt gyldig

energi er ikke bevart, men vi kan løse problemet allikevel
siden begge legemer beveger seg som ett.

Eksempel: Vår 2011, oppgave 3 en kule som spretter på gulvet



d) Finn vinkelhastigheten ω_1 til kula umiddelbart etter kollisjonen. Beskriv bevegelsen til kula etter kollisjonen.

rotasjon om massesenteret til kulen:
gravitasjon angriper i massesenteret $\Rightarrow$ ingen kraftmoment

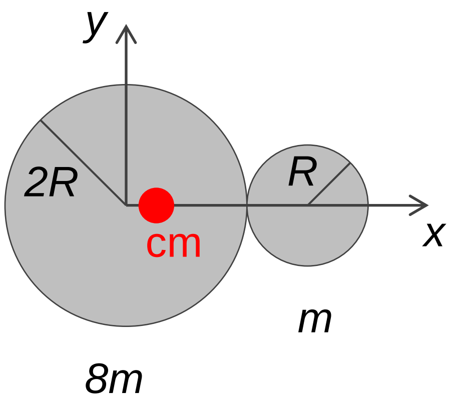
normalkraft er parallell med vektoren fra massesenteret til angrepspunktet
$\Rightarrow$ ingen kraftmoment

bare friksjon gir et kraftmoment $\tau_z = -Rf$

spinnsats: $\tau_z = I\alpha$

det kreves ofte beregning av treghetsmoment

Eksempel: et system av to kuler roterer om sitt massesenter



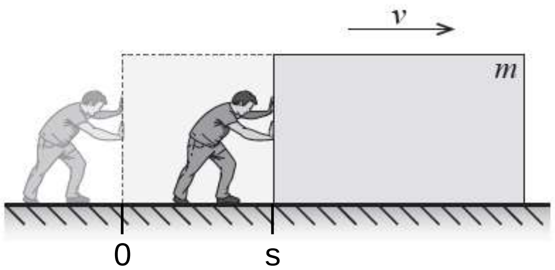
$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i} = \frac{0 + 3Rm}{8m + m} = \frac{1}{3} R$$

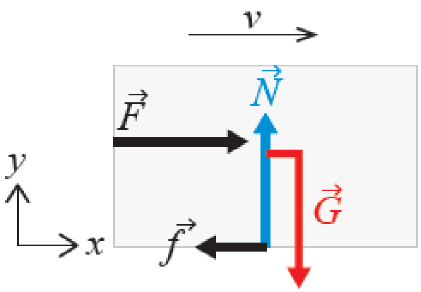
treghetsmoment for en kule som roterer om sitt massesenter: $I_{cm} = \frac{2}{5} mR^2$

parallellaksteoremet: $I_A = I_{cm} + ms^2$

$$I_{tot} = \frac{2}{5} 8m(2R)^2 + 8m(\frac{1}{3}R)^2 + \frac{2}{5} mR^2 + m(\frac{8}{3}R)^2 = \frac{106}{5} mR^2$$

Friksjon og arbeid





friksjon: $\vec{f} = -\mu_d N \hat{i}$

kraft fra mannen på kisten: $\vec{F} = F \hat{i}$

normalkraft: $\vec{N} = N \hat{j}$

gravitasjon: $\vec{G} = -mg \hat{j}$

ingen bevegelse i vertikalretning:

$$N - mg = ma_y = 0 \quad \Rightarrow \quad N = mg$$

$$\vec{f} = -\mu_d mg \hat{i}$$

arbeid fra mann på kisten: $W_F = \int_0^s F\, dx = F \int_0^s dx = Fs > 0$

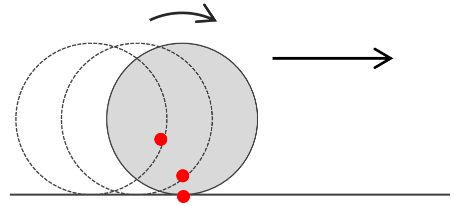
arbeid fra friksjon på kisten: $W_f = \int_0^s f\, dx = -\mu_d mg \int_0^s dx = -\mu_d mgs < 0$

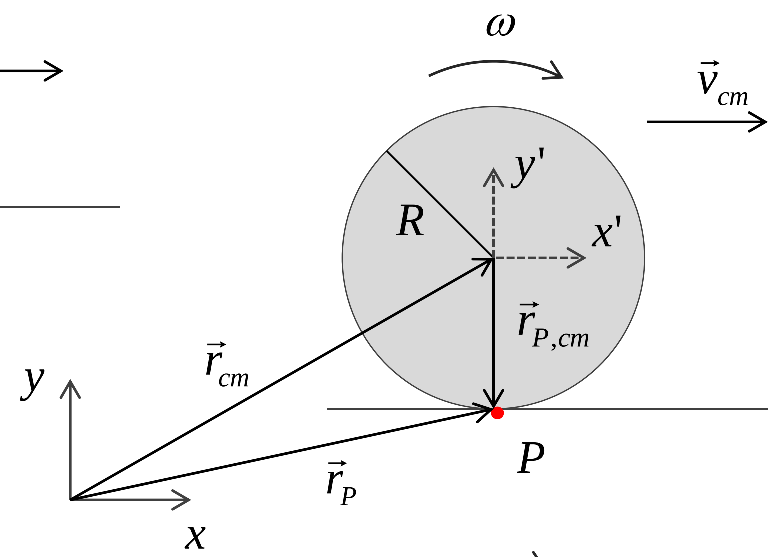
nettoarbeid: $W_{\text{net}} = \int_0^s F_{\text{net}}\, dx = \int_0^s (F - \mu_d mg)\, dx = Fs - \mu_d mgs = W_F + W_f$

arbeid-energi teorem: $W_{\text{net}} = K_1 - K_0$

$$Fs - \mu_d\, mgs = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_0^2$$

Rullebetingelse

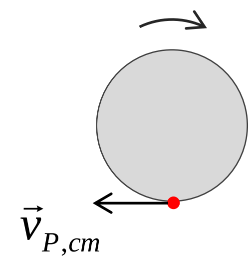




$$\vec{r}_P = \vec{r}_{cm} + \vec{r}_{P,cm}$$

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_{P,cm}$$

punktet P beveger seg på en sirkelbane i massesentersystemet:



$$\vec{v}_{P,cm} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{P,cm} = -\omega \hat{k} \times (-R\hat{j}) = \omega R(\hat{k} \times \hat{j}) = -\omega R\hat{i}$$

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_{P,cm} = \vec{v}_{cm} - \omega R\hat{i}$$

rullebevegelse i laboratoriesystem:
P snu vertikal bevegelsesretning når den treffer bakken: $v_{P,y} = 0$

uten å skli: $v_{P,x} = 0$

rullebetingelse: $\vec{v}_P = \vec{0}$

$$\Rightarrow \quad \vec{v}_{cm} = \omega R\hat{i}$$

legeme (sylinder, ball) ruller uten å skli:
$\Rightarrow$ finn hastighet til massesenteret fra vinkelhastighet