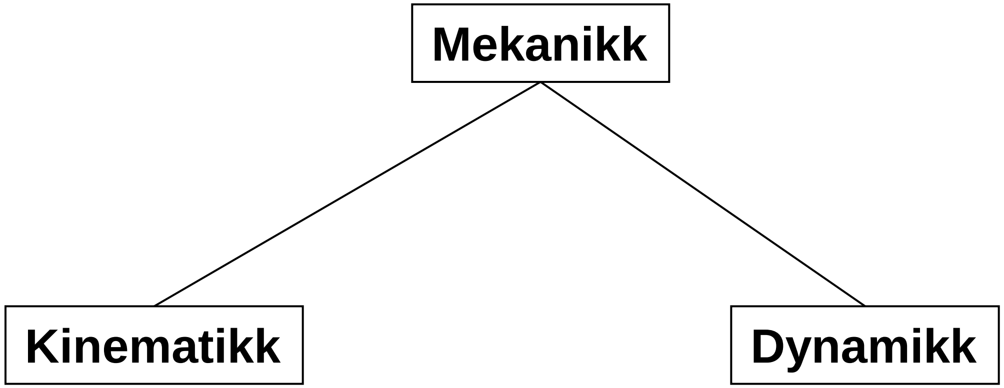
Bevegelse i én dimensjon

21.01.2015

Lærebok kan hentes på ekspedisjonskontoret.

Lenke til betalingsside:

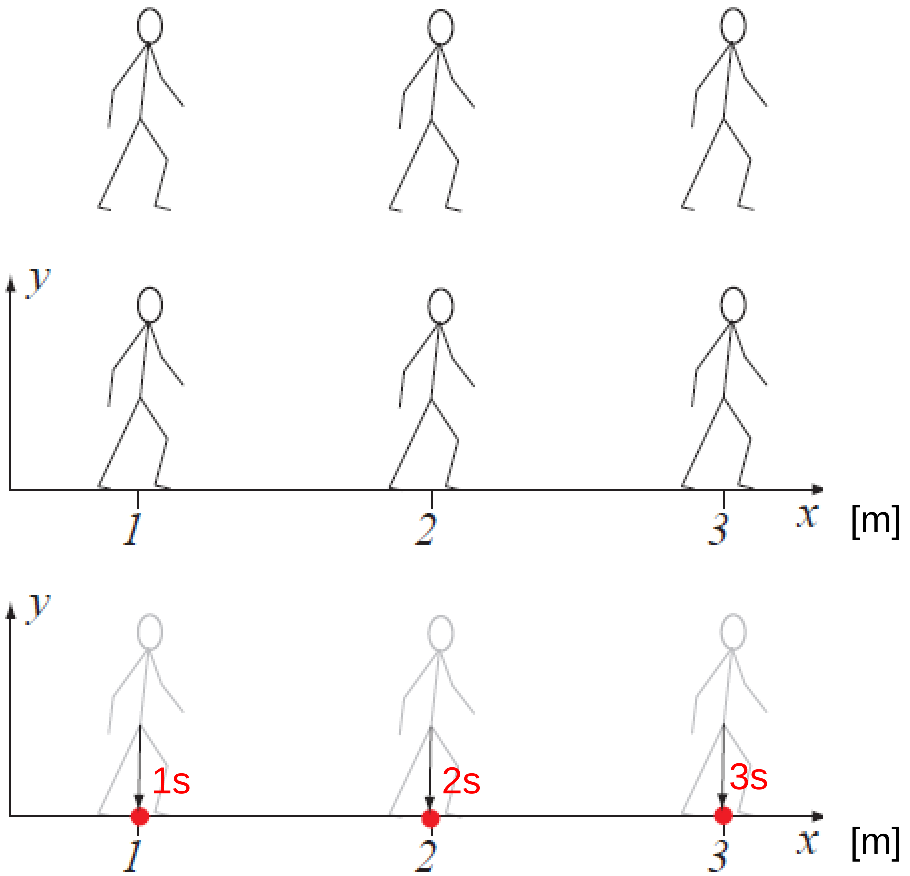
http://www.uio.no/studier/emner/matnat/fys/FYS-MEK1110/v15/bok.html



lÃ¦ren om bevegelser uten
Ã¥ ta hensyn til bevegelsens
Ã¥rsak

lÃ¦ren om krefter som endrer
et legemets bevegelse

Hvordan kan vi beskrive en bevegelse?



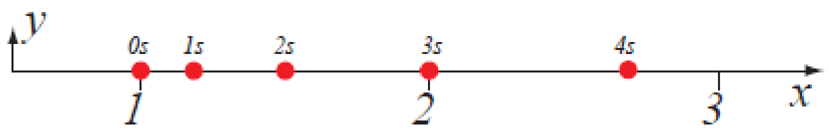
vi må kvantifisere posisjon

vi må også kvantifisere tidsskala

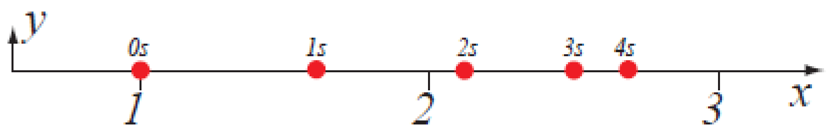
Bevegelsesdiagram

Bevegelsesdiagrammer

hvis jeg går fortere...



hvis jeg går saktere...



Forandringen fra et punkt til et neste kalles forflytning: $\Delta x_i = x(t_{i+1}) - x(t_i)$

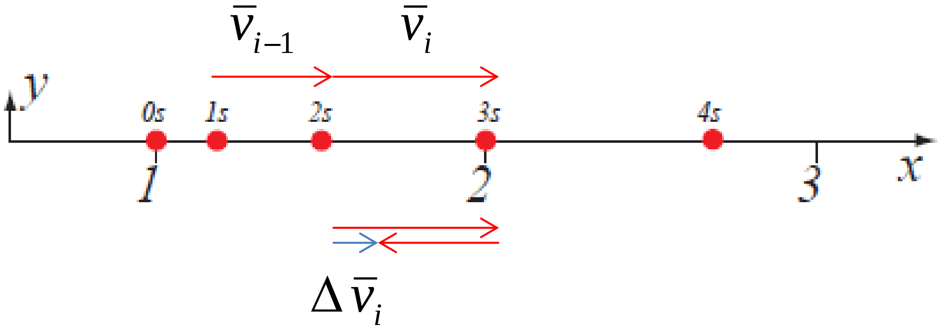
Vi definerer gjennomsnitts- eller middelhastighet fra t_i til $t_i + \Delta t$

$$\bar{v}(t_i) = \frac{\Delta x_i}{\Delta t} = \frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{t_{i+1} - t_i}$$

Enhet: m/s – meter per sekund.

Endring i hastighet:

$$\Delta \bar{v}_i = \bar{v}_i - \bar{v}_{i-1} = \bar{v}(t_i) - \bar{v}(t_{i-1})$$



Raten i endringen i hastighet: akselerasjon: $\bar{a}_i = \dfrac{\Delta \bar{v}_i}{\Delta t}$

Enhet: m/s^2

PINGO

http://pingo.upb.de/

access number: 8178

Participate

Please enter the access number:

Rock the vote!

På hvilket program er du student?

- FAM
- MENA
- MIT
- Lektor
- annet

FYS-MEK1110

1.1 Studieprogram

Time left: 1:52

Choose an option:

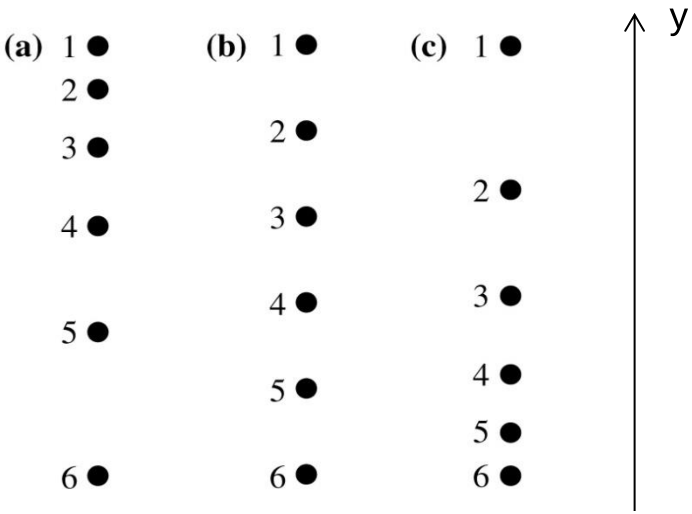
- FAM
- MENA
- MIT
- Lektor
- annet

Vote!

http://pingo.upb.de/ access number: 8178

Tre bevegelsesdiagrammer er vist. Hvilket viser en

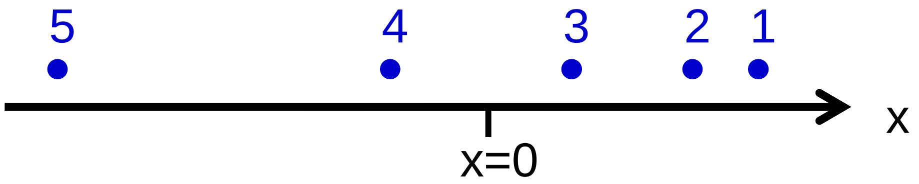
- støvpartikkel som faller med konstant fart,
- en ball som slippes fra taket,
- en rakett som bremser opp for å lande på Mars?



- (a) støv, (b) ball, (c) rakett
- (a) ball, (b) støv, (c) rakett
- (a) rakett, (b) støv, (c) ball
- (a) rakett, (b) ball, (c) støv
- (a) ball, (b) rakett, (c) støv

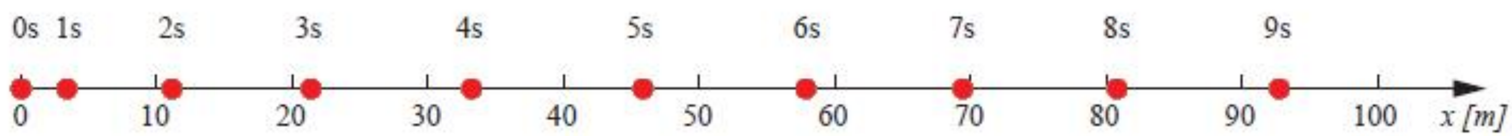
http://pingo.upb.de/ access number: 8178

Et legeme beveger seg langs x-aksen med konstant akselerasjon. Prikkene 1,2,3, … angir posisjonen til legemet med konstante tidsintervaller Δt. Ved punktet 3 har legemet:

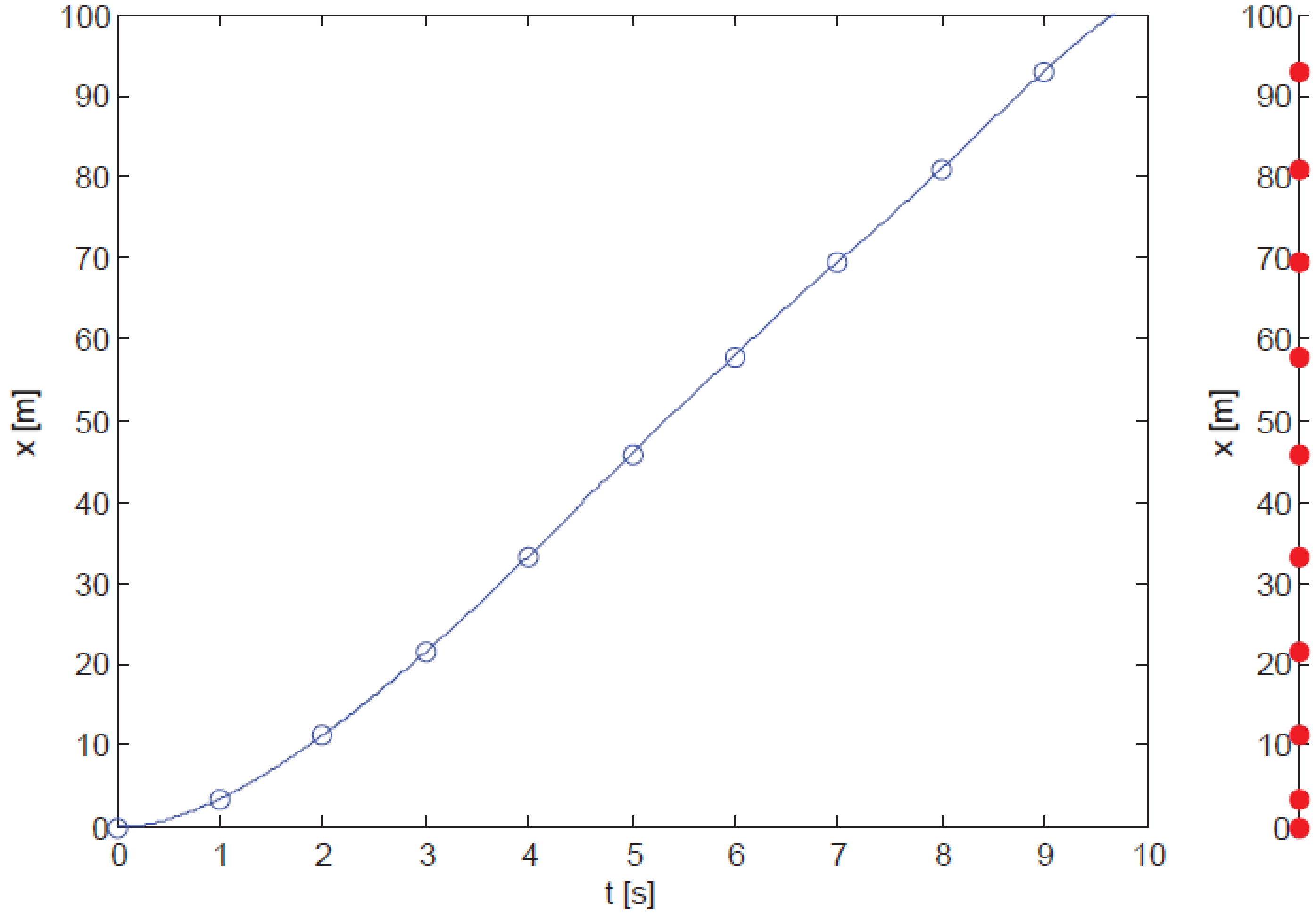


- negativ hastighet og positiv akselerasjon
- negativ hastighet og negativ akselerasjon
- positiv hastighet og positiv akselerasjon
- positiv hastighet og negativ akselerasjon

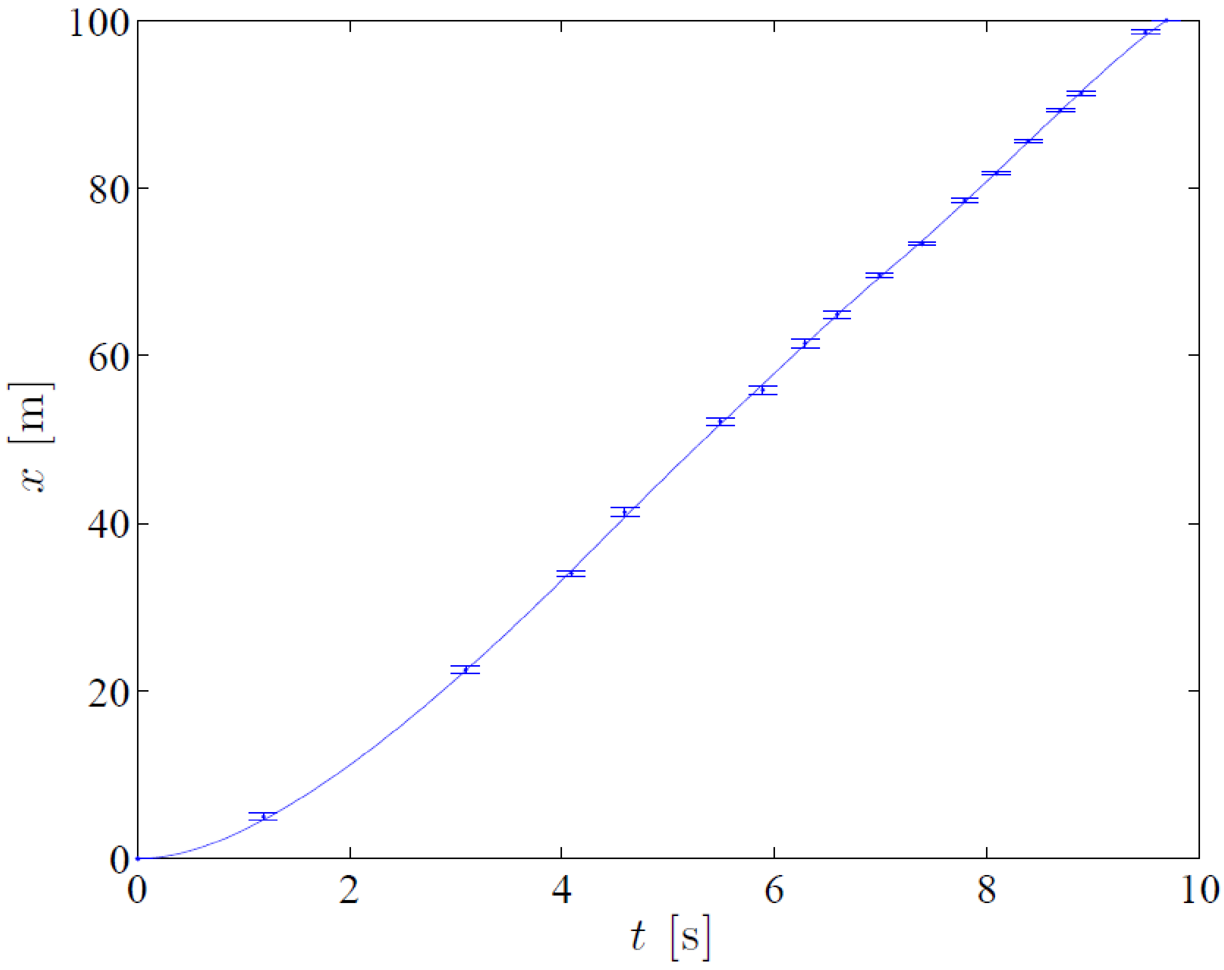
OL-finalen i 100m i Beijing 2008



Posisjonen til Usain Bolt som funksjon av tiden

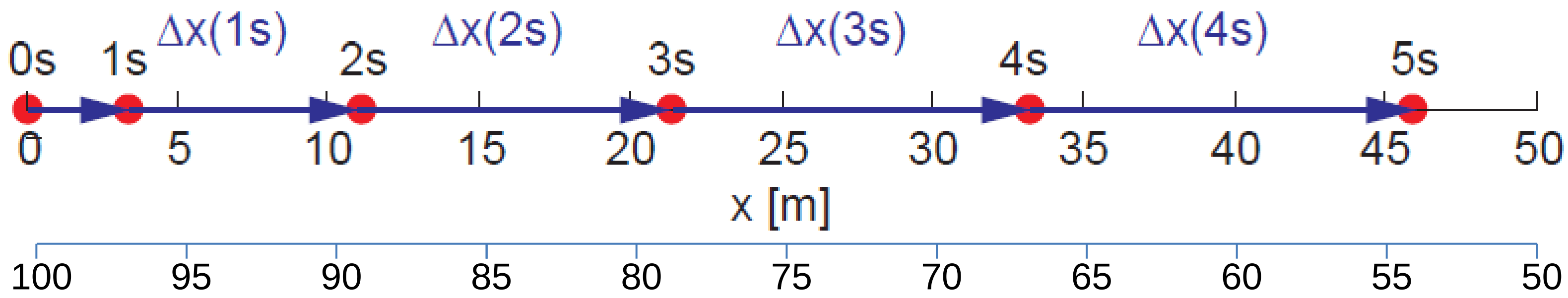


Målefeil



Hver måling har feilmarginer.

Middelhastighet

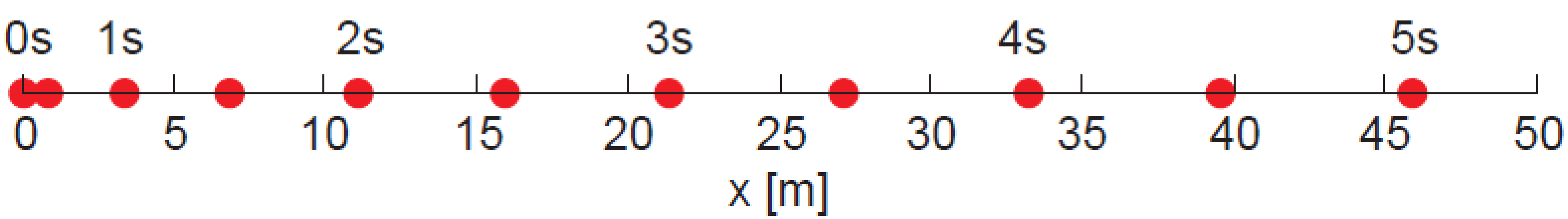


$$\bar{v}(1.0\text{s}) = \frac{x(2.0\text{s}) - x(1.0\text{s})}{\Delta t} = \frac{7.7\text{m}}{1.0\text{s}} = 7.7\text{m/s}$$

$$\bar{v}(2.0\text{s}) = \frac{x(3.0\text{s}) - x(2.0\text{s})}{\Delta t} = \frac{10.2\text{m}}{1.0\text{s}} = 10.2\text{m/s}$$

Middelhastigheten

- øker,
- er uavhengig av origo,
- men fortegn er avhengig av retning.



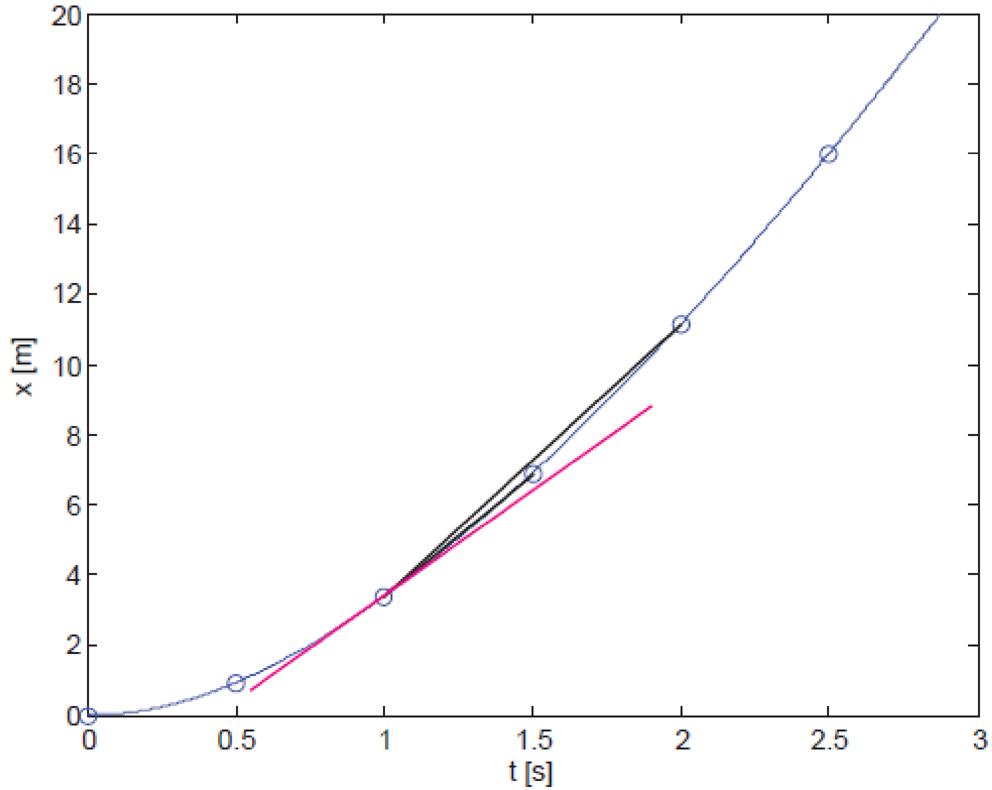
$$\bar{v}(1.0\text{s}) = \frac{x(1.5\text{s}) - x(1.0\text{s})}{\Delta t} = \frac{3.5\text{m}}{0.5\text{s}} = 7.0\text{m/s}$$

$$\bar{v}(2.0\text{s}) = \frac{x(2.5\text{s}) - x(2.0\text{s})}{\Delta t} = \frac{4.9\text{m}}{0.5\text{s}} = 9.8\text{m/s}$$

Middelhastigheten er avhengig av tidsintervallet.

Det blir viktig når vi analyserer bevegelser numerisk: Tidsintervaller må være tilpasset!

Posisjonen til Usain Bolt



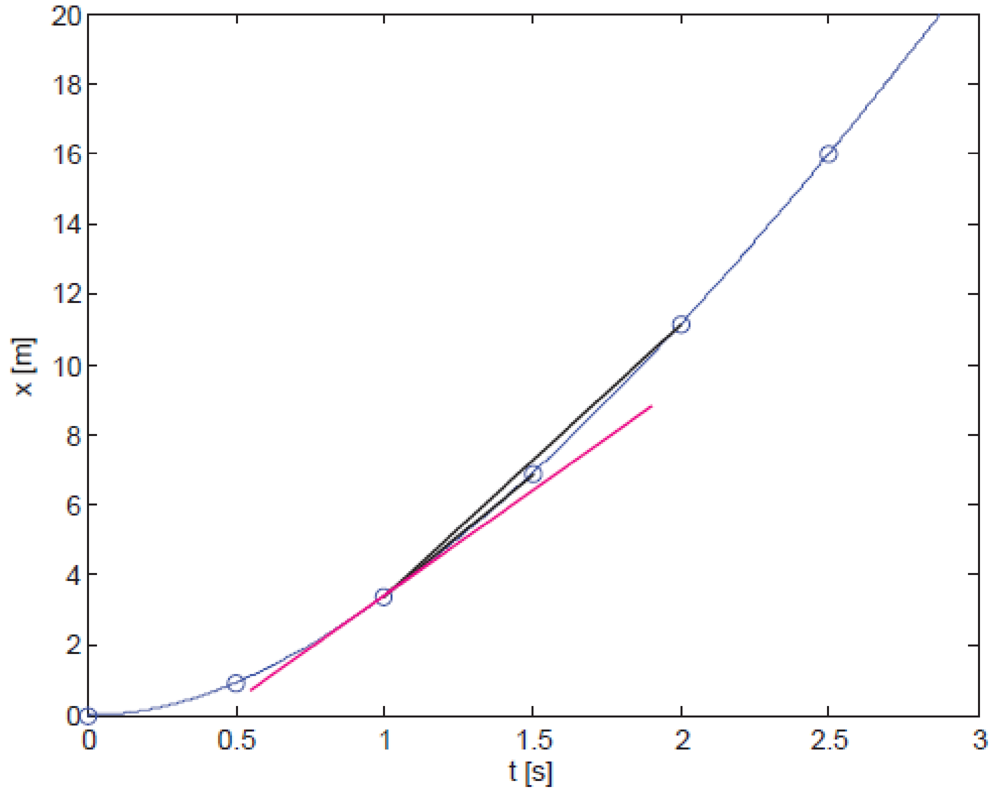
$$\bar{v}(1.0\text{s}) = \frac{x(2.0\text{s}) - x(1.0\text{s})}{\Delta t} = 7.7\text{m/s}$$

$$\bar{v}(1.0\text{s}) = \frac{x(1.5\text{s}) - x(1.0\text{s})}{\Delta t} = 7.0\text{m/s}$$

Middelhastighet kan tolkes som stigningstall til kurven.

$$\bar{v}(t_i) = \frac{\Delta x(t_i)}{\Delta t}$$

Posisjonen til Usain Bolt



$$\bar{v}(1.0\mathrm{s}) = \frac{x(2.0\mathrm{s}) - x(1.0\mathrm{s})}{\Delta t} = 7.7\mathrm{m/s}$$

$$\bar{v}(1.0\mathrm{s}) = \frac{x(1.5\mathrm{s}) - x(1.0\mathrm{s})}{\Delta t} = 7.0\mathrm{m/s}$$

v(1.0s) = 6.1 m/s

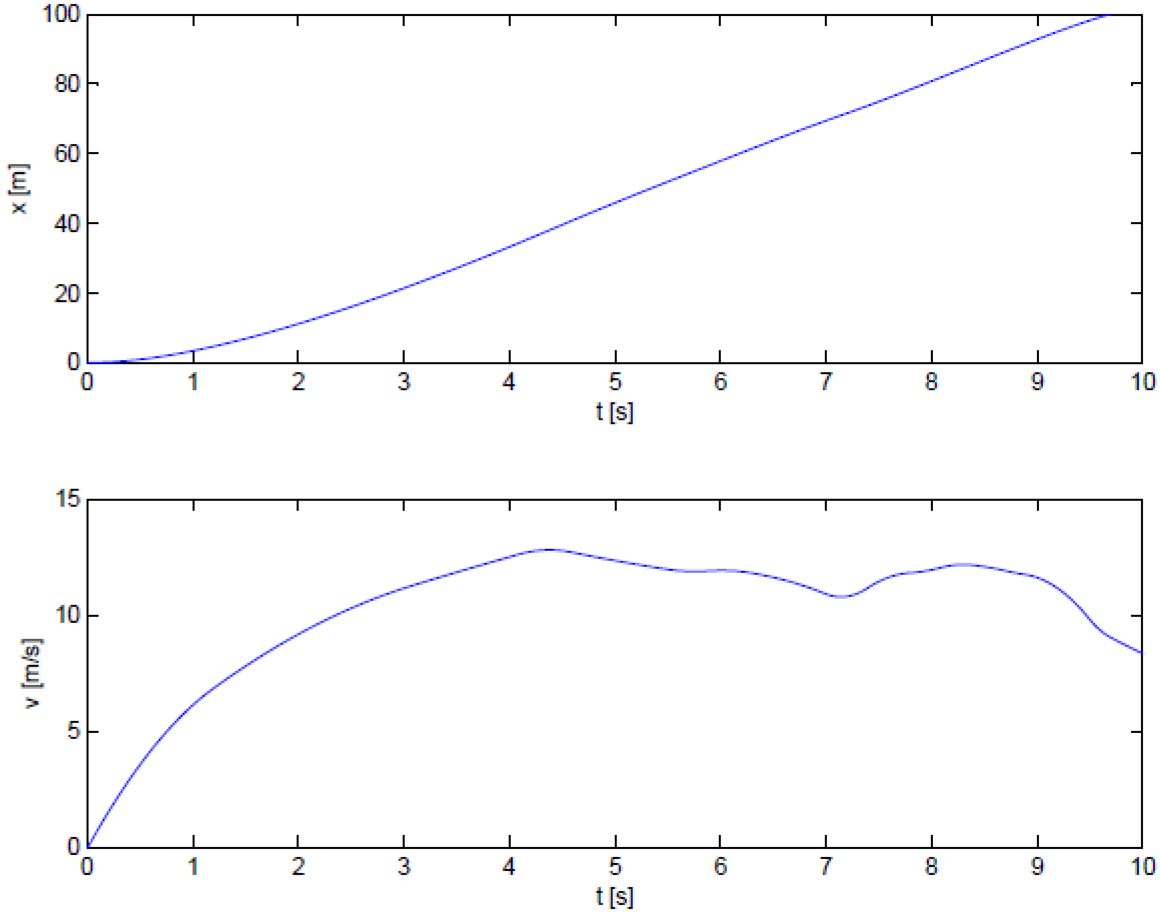
v(1.5s) = 7.8 m/s

Hvis vi bruker kortere og kortere tidsintervaller:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$$

(Momentan)-hastighet

Vi finner hastighet for hvert tidspunkt ved derivasjon:



Hastigheten øker kraftig og er mer eller mindre konstant etterpå.
Forandringen i hastighet beskriver vi med akselerasjonen.

Akselerasjon

Gjennomsnitts- eller middelakselerasjon:

$$\bar{a}(t) = \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

obs.: her bruker vi momentanhastigheten

(Momentan) akselerasjon:

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{dx}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

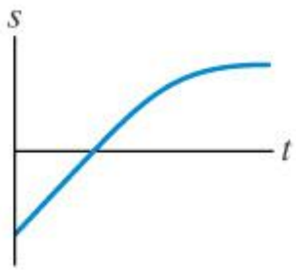
For tidsderiverte bruker
vi også ’dot’ notasjonen:

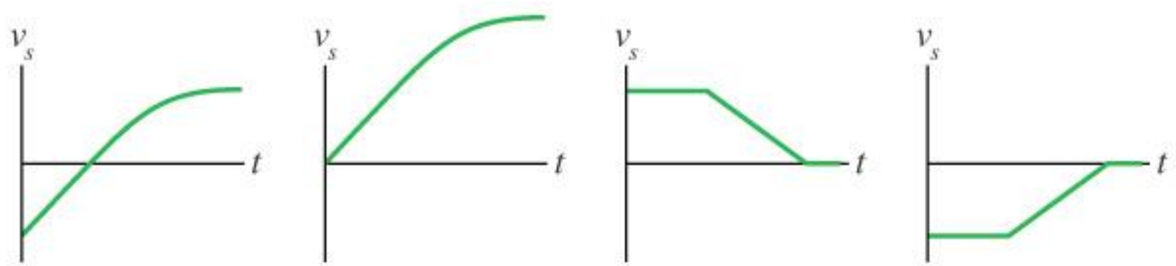
$$\frac{dv}{dt} = \dot{v}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$$

http://pingo.upb.de/ access number: 8178

Hvilken hastighet-vs-tid graf passer til posisjon-vs-tid grafen til venstre?

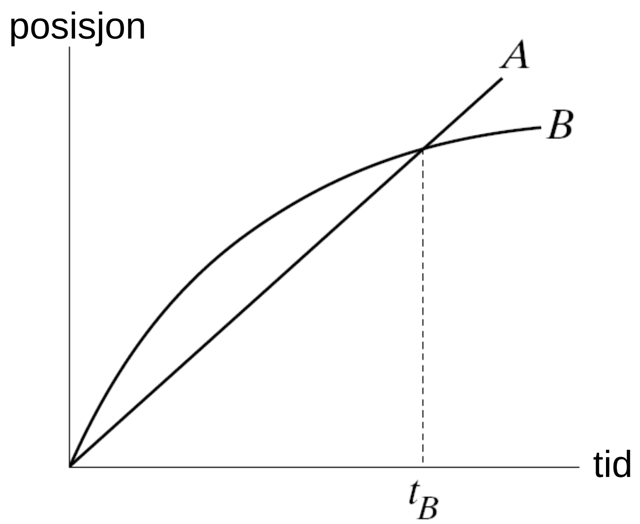




(1) (2) (3) (4)

http://pingo.upb.de/ access number: 8178

Grafen viser posisjon som funksjon av tid for to tog som kjører på parallelle spor. Hvilket av følgende utsagn er korrekt?



A Ved tiden t_B har begge togene samme hastighet.

B Begge togene øker hastigheten hele tiden.

C Begge togene har samme hastighet ved en tid før t_B.

D Et sted på grafen har begge togene samme akselerasjon.

Integrasjon av hastighet

$$\text{posisjon} \underset{\text{integrasjon}}{\overset{\text{derivasjon}}{\rightleftarrows}} \text{hastighet}$$

Vi kjenner $v(t)$ – finn $x(t)$ når $x(t_0) = x_0$

Definisjon av hastighet: $$v(t) = \frac{dx}{dt}$$

$$\int_{t_0}^{t} v(t)dt = \int_{t_0}^{t} \frac{dx}{dt} dt = x(t) - x(t_0)$$

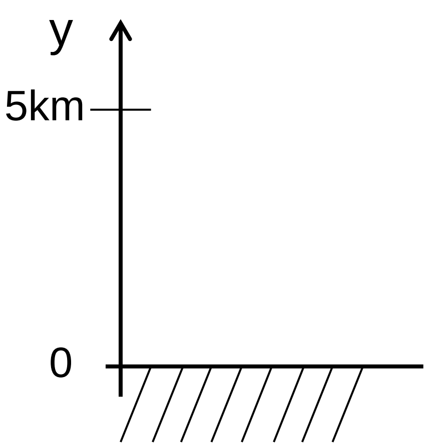
$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(t)dt$$

Det holder ikke å kjenne hastigheten alene,
vi må også kjenne minst én posisjon:
$\Rightarrow$ integrasjonskonstant

Vi kan integrere hastigheten
enten analytisk eller numerisk.

Eksempel: Fallskjermhopp

Du hopper i fallskjerm og trekker i snoren når du er 5000m over bakken.
Deretter faller du med konstant hastighet på 20m/s.
Hvor lang tid tar det før du treffer bakken?



Vi definerer et koordinatsystem:
Vi måler høyden i y retning fra bakken ved y=0.

Vi finner initialbetingelsene:
Ved tiden $t_0 = 0$ er posisjonen $y(0) = y_0 = 5000$ m.

Du beveger deg med konstant hastighet $v_0 = -20$ m/s.
(Fortegnet er negativ fordi du faller i negativ y-retning.)

Vi finner y(t) ved integrasjon: $$v(t) = \frac{dy}{dt}$$

$$y(0) = y_0 = 5000\ \mathrm{m}$$
$$v(t) = v_0 = -20\ \mathrm{m/s}$$

$$\int_0^t v(t)\, dt = \int_0^t \frac{dy}{dt}\, dt = y(t) - y_0$$

$$v_0 \int_0^t dt = v_0 t = y(t) - y_0$$

$$y(t) = y_0 + v_0 t = 5000\ \mathrm{m} - 20\ \mathrm{m/s}\ t$$

Du treffer bakken når $y(t) = 0$: $$y(t) = 5000\ \mathrm{m} - 20\ \mathrm{m/s}\ t = 0$$

$$t = \frac{5000\ \mathrm{m}}{20\ \mathrm{m/s}} = 250\ \mathrm{s}$$

Du treffer bakken etter 250 s.

Bevegelsesligninger

Vi vil snart studere sammenhengen mellom kraft og akselerasjon:
Newtons andre lov: $F = m\,a$

Vi er ofte i en situasjon der vi kjenner akselerasjonen fordi vi kjenner kraften.

Er bevegelsen da fullstendig karakterisert?

Bevegelsesligninger

Vi starter fra definisjonen av akselerasjonen: $$a(t) = \frac{dv}{dt}$$

$$\int_{t_0}^{t} a(t)\,dt = \int_{t_0}^{t} \frac{dv}{dt}\,dt = v(t) - v(t_0)$$

$$v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt$$

Gitt *a*(*t*) og *v*(t_0) kan vi finne *v*(*t*).

Vi integrerer hastigheten for å finne posisjonen: $$v(t) = \frac{dx}{dt}$$

$$\int_{t_0}^{t} v(t)\,dt = \int_{t_0}^{t} \frac{dx}{dt}\,dt = x(t) - x(t_0)$$

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} \left(v(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt \right) dt$$

$$x(t) = x(t_0) + v(t_0)(t - t_0) + \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt\,dt$$

Bevegelsesligninger

Vi vil snart studere sammenhengen mellom kraft og akselerasjon:
Newtons andre lov: $F = m\,a$

Vi er ofte i en situasjon der vi kjenner akselerasjonen fordi vi kjenner kraften.

Er bevegelsen da fullstendig karakterisert?

$$v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt$$

$$x(t) = x(t_0) + v(t_0)(t - t_0) + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} a(t)\,dt\,dt$$

Vi kan finner hastigheten og posisjonen som funksjon av tiden dersom vi kjenner akselerasjonen $a(t)$ og initialbetingelsene v_0 og x_0.

Bevegelsesligningene: $$v(t) = v_0 + \int_0^t a(t)\, dt$$

$$x(t) = x_0 + v_0\, t + \int_0^t \int_0^t a(t)\, dt\, dt$$

Spesielle tilfeller:

ingen akselerasjon:

$$a(t) = 0$$

$$v(t) = v_0$$

$$x(t) = x_0 + v_0\, t$$

konstant akselerasjon:

$$a(t) = a_0$$

$$v(t) = v_0 + a_0 t$$

$$x(t) = x_0 + v_0\, t + a_0 \int_0^t \int_0^t dt\, dt = x_0 + v_0\, t + \frac{1}{2} a_0 t^2$$

Generell løsningsmetode

Identifiser:

Hvilket objekt beveger seg?

Hvordan måler vi? Definer et koordinatsystem.

Finn initialbetingelsene.

Modeller:

Finn kreftene som påvirker objektet.

Beskriv kreftene med en modell.

Bruk Newtons andre lov for å finne akselerasjonen.

Løs:

Løs bevegelsesligningen

.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a\left(x, \frac{dx}{dt}, t\right)$$

med initialbetingelser (analytisk eller numerisk).

Finn hastighet og posisjon.

Analyser:

Er resultatene for $x(t)$ og $v(t)$ fornuftig?

.

Bruk resultatene for a svare på spørsmålet.

Interpreter resultatene.

Denne oppskriften kommer vi å bruke mye.