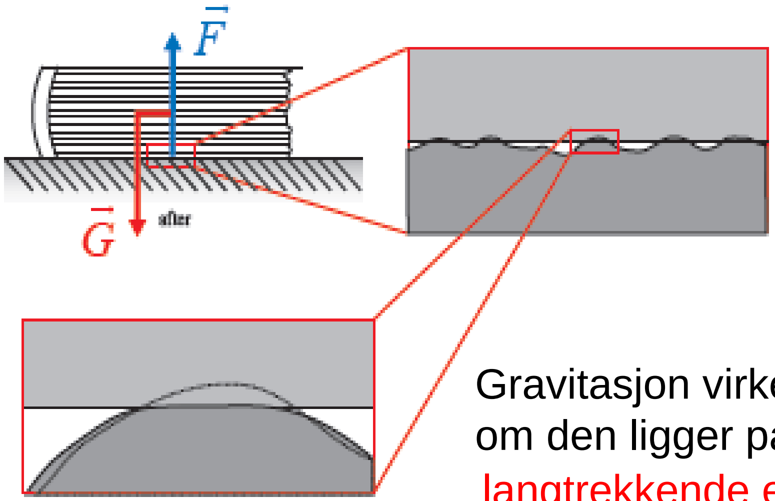
Newtons lover i én dimensjon

28.01.2015

Bok på bordet



Gravitasjon virker på boken
om den ligger på bordet eller ikke.
langtrekkende eller fjernkraft

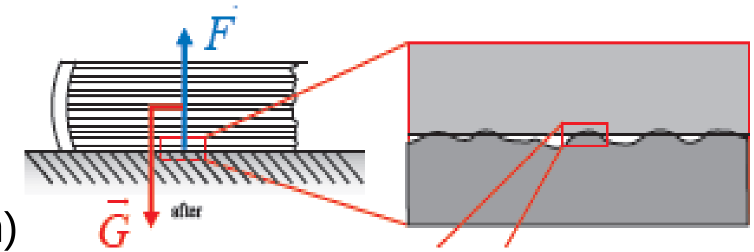
Hvis boken ligger på bordet må nettokraft være null
ellers vil boken beveger seg.

$\Rightarrow$ kraft fra bordet på boken som kompenserer gravitasjonskraften:

normalkraft

- normal (vinkelrett) til overflaten
- årsak: mikroskopisk deformasjon i overflaten
- kontaktkraft

Identifikasjon av krefter



Vi skiller mellom **systemet** (=bok)
og **omgivelsen** (= alt annet: bord, luft rundt boken)

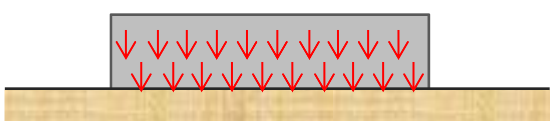
Alle krefter som virker på systemet har en **årsak** i omgivelsen.

Vi vurderer bare **eksterne krefter**, ikke interne (f.eks. krefter mellom sidene).

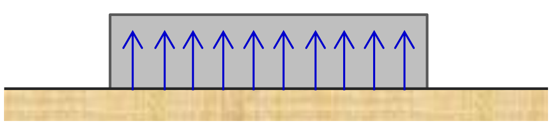
Krefter er enten **kontakt**- eller **langtrekkende** krefter.

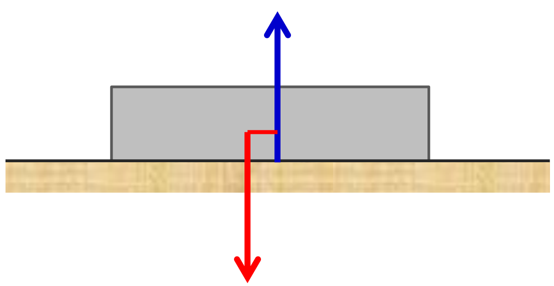
Vi identifiserer **angrepspunktene**, som er ofte symbolisk:

gravitasjon virker på hele boken



normalkraft virker på alle atomer i snittflaten





kraft er summen av alle små kontribusjoner:
superposisjonsprinsippet.

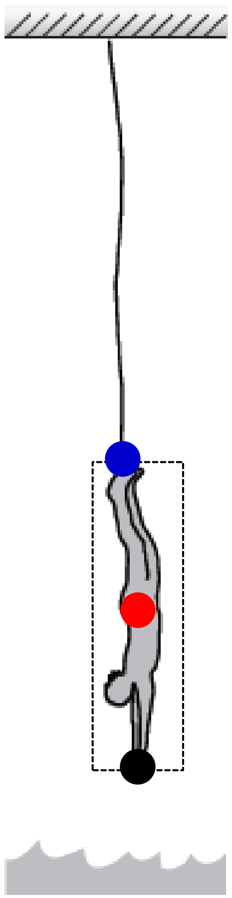
Fri-legeme diagram

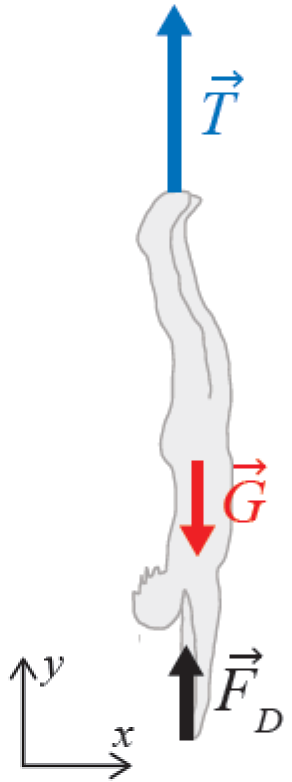
- diagram som inneholder alle kreftene som virker på et legeme
- viktig verktøy for å finne ut hvordan et legeme beveger seg

Oppskrift:

1. Del problemet inn i system og omgivelser.
   system: person; omgivelse: tau, luft
2. Tegn figur av objektet og alt som berører det.
3. Tegn en lukket kurve rundt systemet.
4. Finn kontaktpunkter hvor kontaktkrefter angriper.
   Personen er i kontakt med tauet og med luften.
5. Navngi kontaktkrefter og definer symboler.
   Kraft fra tauet på personen: T
   Luftmotstand: F_D
6. Identifiser langtrekkende krefter og definer symboler.
   Gravitasjonskraft: G
7. Tegn objektet med skalerte krefter.
8. Tegn inn koordinatsystemet.

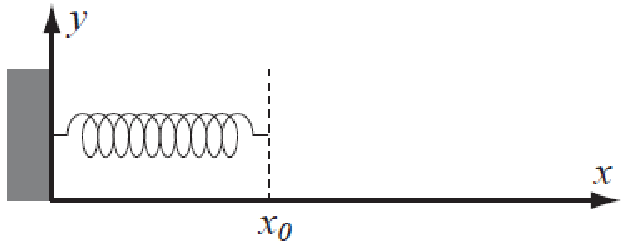
Eksempel: bungee jump

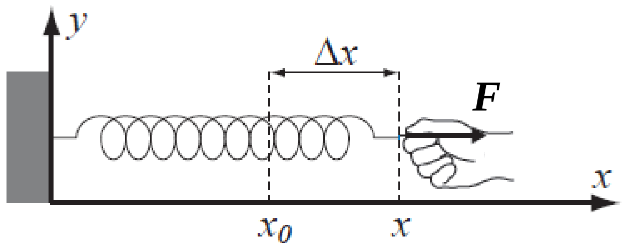




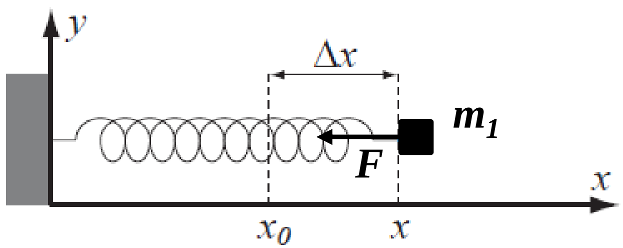
kraft ⇔ akselerasjon

(Gedanken-) Eksperiment

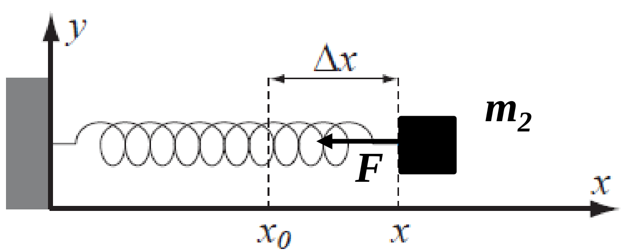




Vi trekker på en fjær med kraft F
slik at lengden blir $x = x_0 + \Delta x$



Vi fester en masse m_1 og slipper.
Fjæren trekker på massen med kraft F
og vi måler akselerasjonen $a_{1.}$



Vi fester en masse m_2 og slipper.
Fjæren trekker på massen med kraft F
og vi måler akselerasjonen $a_{2.}$

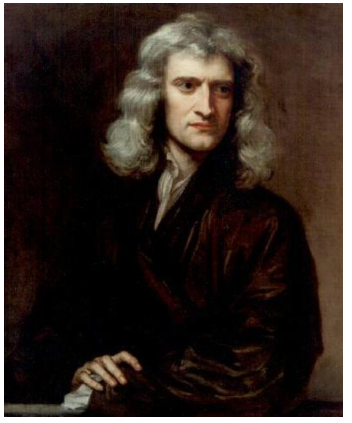
Vi finner: $F = m_1 a_1 = m_2 a_2$

Newtons andre lov: $\sum \vec{F} = m\vec{a}$

Vi kan ikke bevise loven.
Eksperimenter viser at loven er riktig.

”Endringen av bevegelsen er alltid proporsjonal med den motiverende kraft som blir påført, og blir gjort i den rettlinjede retning i hvilken denne kraft blir påført.”

Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica, 1687



Isaac Newton
1643-1727

Newtons andre lov: $\sum \vec{F} = m\vec{a}$

- er gyldig i inertialsystemer.
  I et akselerert referansesystem må vi innføre fiktive krefter.

- gjelder punkt-partikkler.
  Vi kan bruke N2L for utstrakte objekter hvis vi bruker massesenteret.

- inertialmasse *m* er en egenskap av et legeme:
  motstanden mot akselerasjon (= treghet)
  enhet: kg

- gjelder summen av alle ytre krefter som påvirker objektet: netto kraft $\vec{F}_{\text{net}} = \sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}$
  Ytre krefter har årsak i omgivelsen.

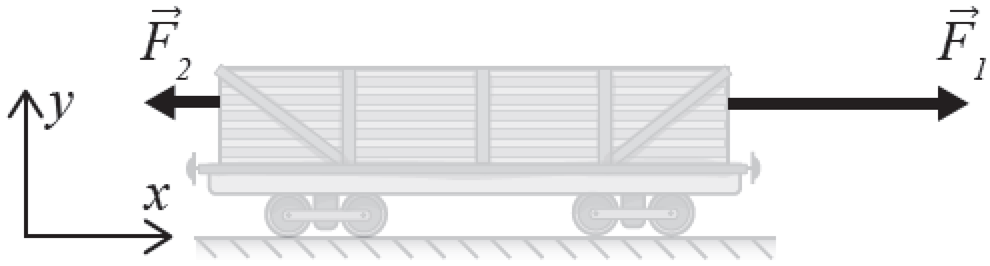
- er en vektor likning – gyldig for hver komponent: $\sum F_x = ma_x = m\frac{d^2x}{dt^2}$

- kreftene er additiv: superposisjonsprinsippet

- krefter måles i enhet: 1 kg m/s^2 = 1 N = 1 Newton

Eksempel

To krefter virker på en vogn: F_1 trekker til høyre med 6000 N, F_2 trekker til venstre med 1000 N. Massen til vogn er 2500 kg. Du kan se bort fra andre krefter. Hva er akselerasjonen?



$$\vec{F}_1 = 6000\,\mathrm{N}\,\hat{i}$$

$$\vec{F}_2 = -1000\,\mathrm{N}\,\hat{i}$$

$\hat{i}$: enhetsvektor i x retning

$$\vec{F}_{\mathrm{net}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 6000\,\mathrm{N}\,\hat{i} - 1000\,\mathrm{N}\,\hat{i} = 5000\,\mathrm{N}\,\hat{i}$$

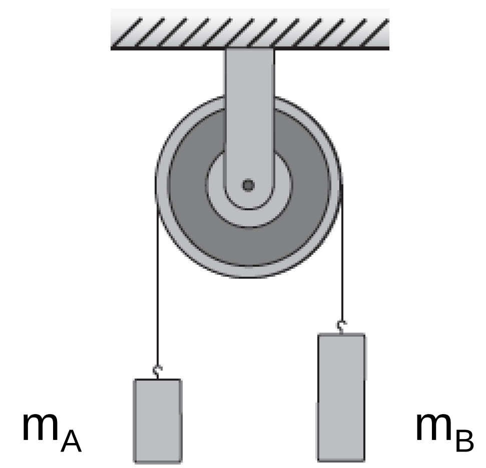
N2L: $\vec{F}_{\mathrm{net}} = m\vec{a} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} = \dfrac{\vec{F}_{\mathrm{net}}}{m} = \dfrac{5000\,\mathrm{N}\,\hat{i}}{2500\,\mathrm{kg}} = 2\,\mathrm{m/s}^2\,\hat{i}$

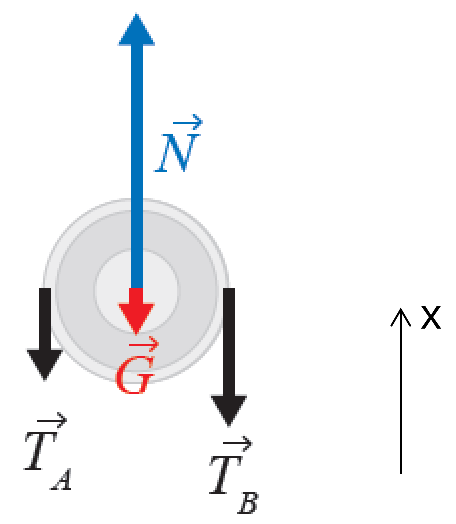
Eksempel: trinse

system: trinse
omgivelse: tau, akse, luft
(loddene og taket er ikke i kontakt med trinsen)

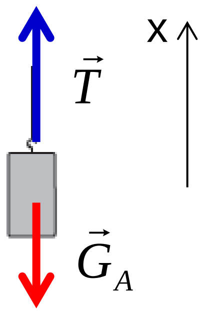
kontaktkrefter:
- normalkraft fra aksen på trinsen: N
- kraft fra tauet på trinsen venstre/høyre: T_A, T_B

langtrekkende krefter:
- gravitasjonskraft: G
  (på grunn av massen til trinsen, ikke loddene)

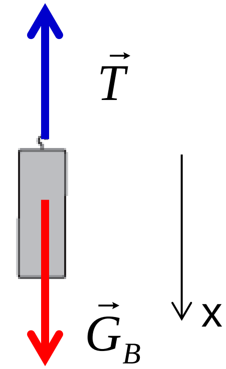




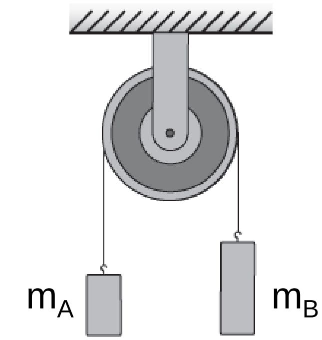
Eksempel:
lodd i trinsen



system: lodd A
omgivelse: tau



system: lodd B
omgivelse: tau



N2L for lodd A: $T - m_A g = m_A a$

N2L for lodd B: $m_B g - T = m_B a$

$m_A = 0.55$ kg, $m_B = 0.56$ kg
Beregn akselerasjonen.

summe $(m_B - m_A)g = (m_A + m_B)a$

akselerasjon: $a = \dfrac{m_B - m_A}{m_A + m_B} g$

$$a = \frac{0.01}{1.11} g = 0.088\,\mathrm{m/s}^2$$

$m_A < m_B$ m_A går opp, m_B går ned

Jeg velger x aksen slik at akselerasjonen er positiv for begge loddene.

Lodd B starter med v_0=0 m/s ved posisjon x_0=0 m. Hvor mye tid bruker lodd B for å komme til x=1 m?

$$x = \frac{1}{2} a t^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2x}{a}}$$

$$t = \sqrt{\frac{2\,\mathrm{m}}{0.088\,\mathrm{m/s}^2}} = 4.76\,\mathrm{s}$$

Vi tester Newtons andre lov: http://mit.tv/wzqKHQ

Kraftmodeller

- vi har en oppskrift for å identifisere kreftene
  $\Rightarrow$ fri-legeme diagram

- vi bruker Newtons andre lov for å finne akselerasjonen fra summen av ytre krefter

- vi kan løse bevegelsesligningene (analytisk eller numerisk)

vi vet ikke hvordan vi kan beskrive / kvantifisere de forskjellige krefter – vi trenger kraftmodeller

Modeller:

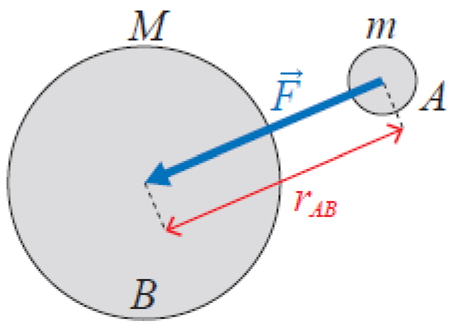
Finn kreftene som påvirker objektet.

Beskriv kreftene med en modell.

Bruk Newtons andre lov for å finne akselerasjonen.

Gravitasjon

Isaac Newton har også oppdraget gravitasjonsloven
(fra empirisk observasjon)



$$\vec{F}_{\text{fra B på A}} = \gamma \frac{mM}{r_{\text{AB}}^3} \vec{r}_{\text{AB}}$$

γ: gravitasjonskonstant
m: gravitasjonsmasse til A
M: gravitasjonsmasse til B
$\vec{r}_{\text{AB}}$: vektor fra senteret av A til senteret av B

inertialmasse: treghet – et legemes motstand mot å forandre hastighet

gravitasjonsmasse: definert av gravitasjonsloven

Eksperimenter finner ingen forskjell mellom inertialmasse og gravitasjonsmasse.

på jorden

$$\vec{F}_{\text{fra B på A}} = \gamma \frac{mM}{r_{\text{AB}}^3} \vec{r}_{\text{AB}}$$

$$\gamma = 6.67384 \cdot 10^{-11} \ \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$$

$$M = 3.9736 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

$$r_{\text{AB}} = 6.378 \cdot 10^{6} \text{ m}$$ (posisjonsavhengig)

Gravitasjonskraft er rettet mot jordens senteret.

$$F = \gamma \frac{mM}{r_{\text{AB}}^2} = mg \qquad g \approx 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

hvis ingen andre krefter enn gravitasjon virker:

$$F_{\text{net}} = m_g g = m_i a$$

m_i: inertialmasse, m_g: gravitasjonsmasse

$$a = \frac{m_g}{m_i} g$$

$m_i = m_g \Rightarrow$ alle legemer faller med samme akselerasjon

Eksempel: legeme som faller

Du slipper en ball fra en høyde på 1m over bakken.
Du kan se bort fra luftmotstanden.
Hvor lang tid tar det før den treffer bakken?

meget enkelt eksempel for å demonstrere den generelle løsningsoppskriften.

Identifiser:

Hvilket objekt beveger seg?

Hvordan måler vi? Definer et koordinatsystem.

Finn initialbetingelsene.

Modeller:

Finn kreftene som påvirker objektet.

Beskriv kreftene med en modell.

Bruk Newtons andre lov for å finne akselerasjonen.

Løs:

Løs bevegelsesligningen

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a\left(x, \frac{dx}{dt}, t\right)$$

med initialbetingelser (analytisk eller numerisk).

Finn hastighet og posisjon.

Analyser:

Er resultatene for $x(t)$ og $v(t)$ fornuftig?

Bruk resultatene for a svare på spørsmålet.

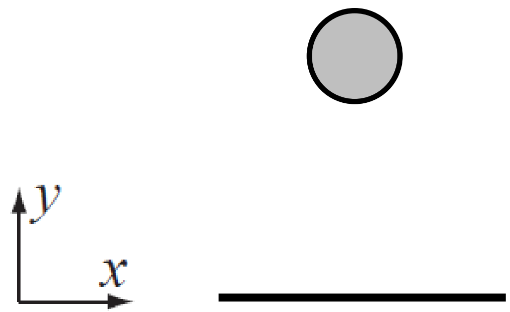
Interpreter resultatene.

Identifiser:

Hvilket objekt beveger seg?

Hvordan måler vi? Definer et koordinatsystem.

Finn initialbetingelsene.



Ballen beveger seg.

Vi måler posisjon med $y(t)$ oppover med nullpunkt på bakken.

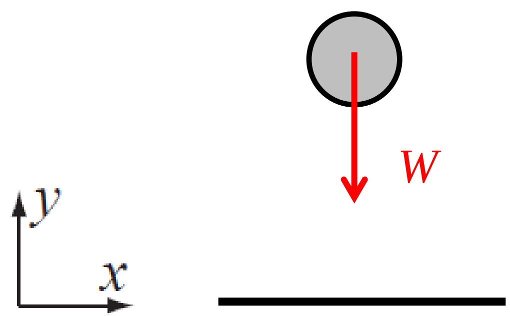
Ved $t_0 = 0$ er $y_0 = 1$ m og $v_0 = 0$ m/s.

Modeller:

Finn kreftene som påvirker objektet.

Beskriv kreftene med en modell.

Bruk Newtons andre lov for å finne akselerasjonen.



Vi ser bort fra luftmotstand.
Det er ingen kontaktkrefter som virker.
Langtrekkende kraft:

- gravitasjon: $\vec{W} = -W\ \hat{j}$

Kraftmodell: $W = mg$

N2L: $\sum \vec{F} = \vec{W} = -mg\ \hat{j} = m\vec{a}$

$\vec{a}(t) = -g\ \hat{j}$

Løs:

Løs bevegelsesligningen

- $$\frac{d^2x}{dt^2} = a\left(x, \frac{dx}{dt}, t\right)$$

med initialbetingelser (analytisk eller numerisk).

Finn hastighet og posisjon.

Vi løser analytisk:

$$a(t) = -g$$
$$v_0 = 0\,\text{m/s}$$
$$y_0 = 1.0\,\text{m}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -g$$

$$v(t) - v_0 = \int_0^t (-g)dt = -gt$$

$$v(t) = -gt$$

$$v = \frac{dy}{dt} = -gt$$

$$y(t) - y_0 = \int_0^t (-gt)dt = -\frac{1}{2}gt^2$$

$$y(t) = y_0 - \frac{1}{2}gt^2$$

Analyser:

Er resultatene for
$x(t)$ og $v(t)$ fornuftig?
.

Bruk resultatene for
a svare på spørsmålet.

Interpreter resultatene.

$$v(t) = -gt$$

$$y(t) = y_0 - \frac{1}{2} g t^2$$

Hastighet er rettet nedover.
For $t = 0$ finner vi initialbetingelser.

Hvor lang tid tar det før den treffer bakken?

$$y(t_1) = y_0 - \frac{1}{2} g t_1^2 = 0\,\text{m}$$

$$t_1 = \pm\sqrt{\frac{2y_0}{g}} = \pm\sqrt{\frac{2\,\text{m}}{9.81\,\text{m/s}^2}} = \pm 0.45\,\text{s}$$

Bare den positive verdien er meningsfylt.

Ballen treffer bakken etter 0.45 s.

Eksempel: heis

En heis med masse m_H = 2400 kg beveger seg opp med en maksimal akselerasjon a_{max} = 2.0 m/s^2. Den maksimale nyttelasten er m_L = 1600 kg. Hva er den maksimale kraften som virker på kabelen?

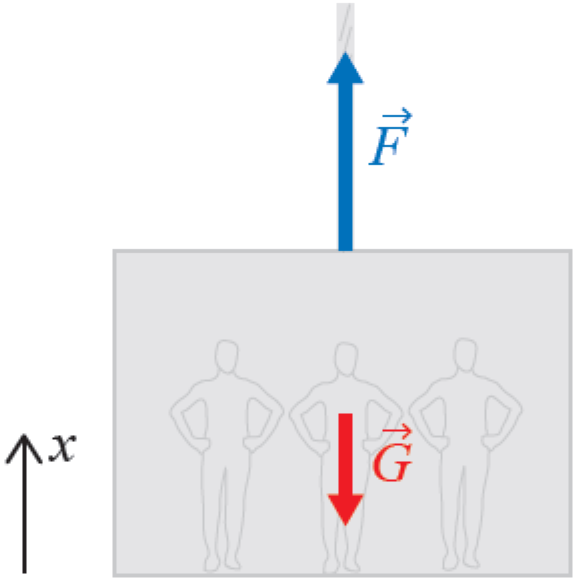
Det er heisen som beveger seg.
Vi måler posisjonen i x retning oppover.

Heisen er i kontakt med kabelen og med luften rund seg.
Nyttelast er innenfor systemet og forårsaker ingen ytre krefter.

Kontaktkrefter:
- Kraft fra kabelen på heisen: F

Vi ser bort fra luftmotstand.

Langtrekkende krefter:
- Gravitasjon: G

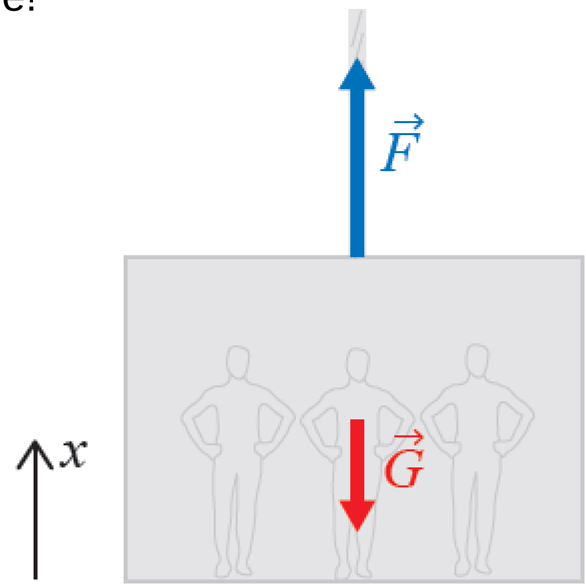


Kraftmodeller:

Kraft F fra kabelen på heisen er ukjent – den skal vi beregne!

Vi vet at den virker oppover: $\vec{F} = F\,\hat{i}$

Gravitasjon: $\vec{G} = -mg\,\hat{i}$



N2L: $\vec{F}_{\mathrm{net}} = \vec{F} + \vec{G} = F\,\hat{i} - mg\,\hat{i} = ma\,\hat{i}$

$$F = m(g + a)$$

Kraften F avhenger akselerasjonen av heisen.
Den maksimale kraften oppstår hvis $a = a_{max}$
og med den maksimale nyttelasten ($m = m_H + m_L$).

$$F_{\mathrm{max}} = m_{\mathrm{max}}(g + a_{\mathrm{max}}) = (m_H + m_L)(g + a_{\mathrm{max}})$$

$$F_{\mathrm{max}} = (2400\ \mathrm{kg} + 1600\ \mathrm{kg})(9.81\ \mathrm{m/s}^2 + 2\ \mathrm{m/s}^2) = 47.24\ \mathrm{kN}$$

http://pingo.upb.de/ access number: 8178

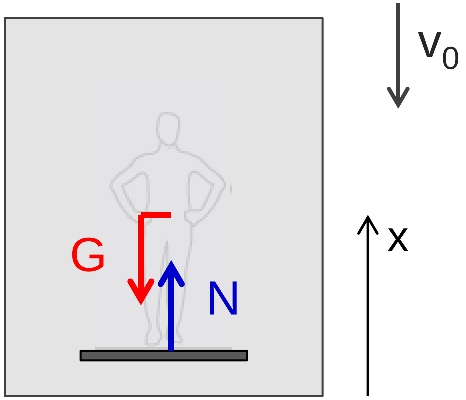
Du står på en vekt i en heis som bever seg nedover med konstant hastighet og vekten viser 70 kg. Når du nærmer deg den første etasjen begynner heisen å bremse. Da viser vekten

- mer enn 70 kg
- 70 kg
- mindre enn 70 kg

system: person
omgivelse: vekt, luft

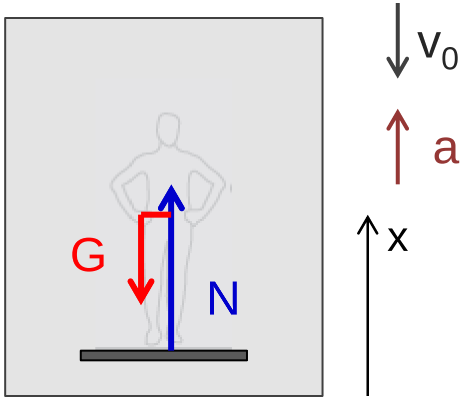
krefter:
- gravitasjon G
- normalkraft N

$$\vec{G} = -\vec{N}$$



Når heisen bremser: akselerasjon i x retning
$\Rightarrow$ nettokraft i x retning

$$|\vec{N}| > |\vec{G}|$$



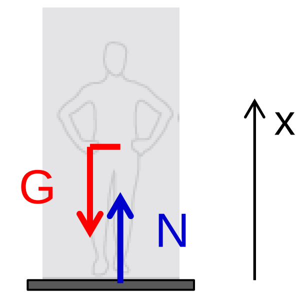
Vekten måler normalkraften.
Gravitasjonskraft er konstant: $|\vec{G}| = mg$

$$m = \text{konst}$$

http://pingo.upb.de/ access number: 8178

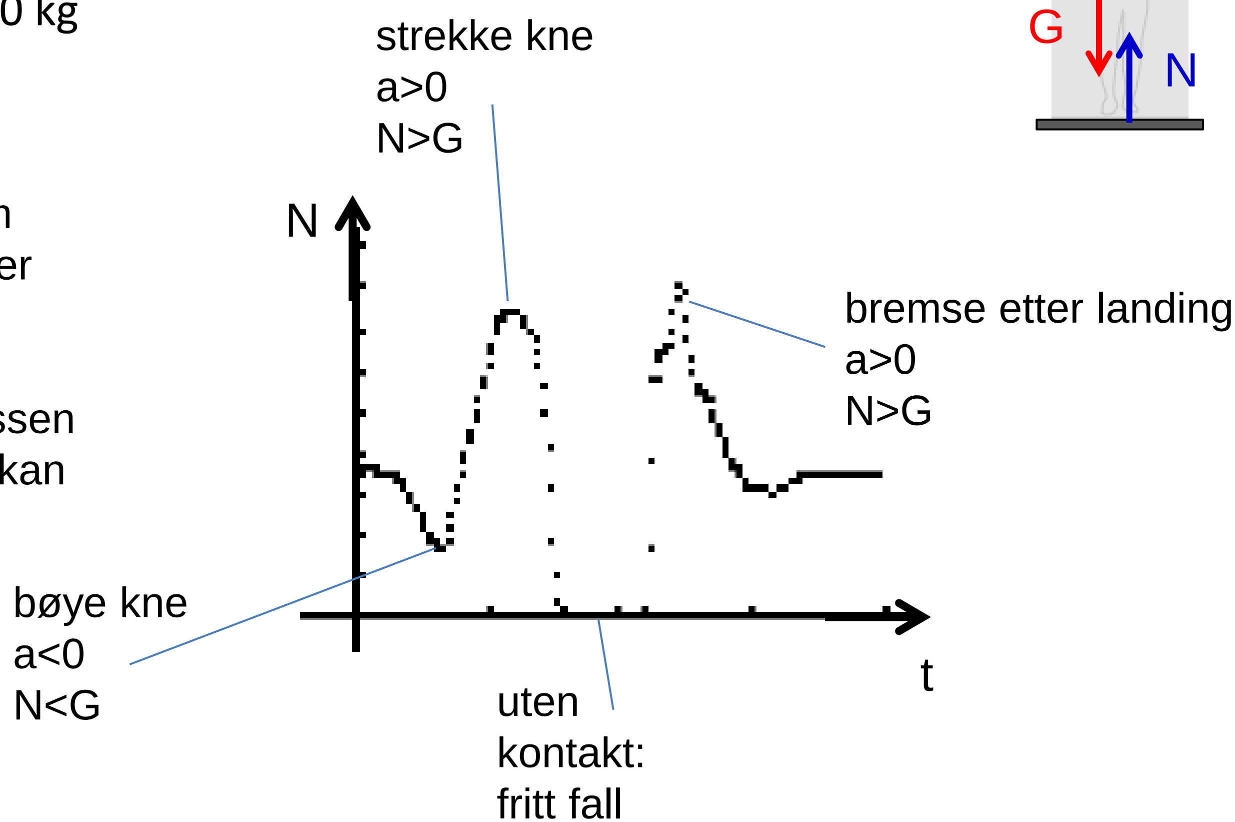
En person på 60 kg står i en lukket kiste på 10 kg som står på en vekt. Vekten viser 70 kg. Hun hopper opp i luften. Mens hun er opp i luften innenfor kisten så viser vekten

- N > 70 kg
- N = 70 kg
- 10 kg < N < 70 kg
- N = 10 kg



Det spiller ingen rolle om hun hopper i en kiste eller direkte på en vekt.

G er konstant siden massen endrer seg ikke, men N kan variere.



http://pingo.upb.de/ access number: 8178

En fugl på 1 kg står i en lukket kiste på 10 kg som står på en vekt. Vekten viser 11 kg. Fuglen hopper opp i luften og flyr på en konstant høyde. Mens fuglen er opp i luften innenfor kisten så viser vekten

- N > 11 kg
- N = 11 kg
- 10 kg < N < 11 kg
- N = 10 kg
- N < 10 kg

I motsetning til personen som hopper er fuglen ikke i fritt fall.

Luften i kisten må bære fuglen.

Normalkraften fra vekten på systemet "kiste, luft, fugl"
er den samme som i tilfelle at fuglen står i kisten.

http://pingo.upb.de/ access number: 8178

Tror du på min forklaring?

- Ja, selvfølgelig.
- Nei, du tuller!

For eksperimentell bevis se:
Mythbusters, sesong 5 (2007), episode 8