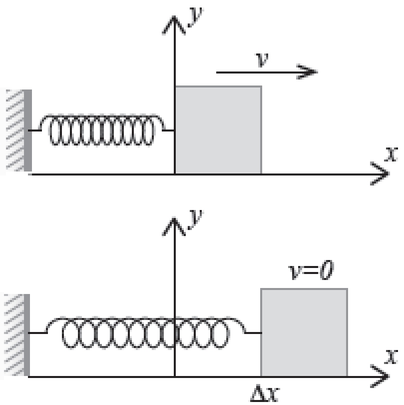
Kinematikk i to og tre dimensjoner

04.02.2015

Har du hentet boken men ikke betalt?

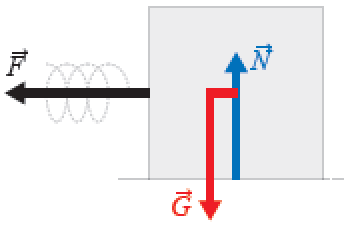
Eksempel:

En masse m = 1 kg er festet til en fjær med fjærkonstant k = 100 N/m og kan bevege seg på et bord uten friksjon og luftmotstand. Massen beveger seg med v_0 = 1 m/s ut fra likevektsposisjon.



kontaktkrefter:
- kraft F fra fjær til massen
- normalkraft N fra bordet til massen

langtrekkende kraft:
- gravitasjonskraft G



Normalkraft kompenserer gravitasjon: $\vec{N} = -\vec{G}$
$\Rightarrow$ ingen bevegelse i y retning.

kraft F fra fjær til massen: $F = \pm k\Delta L$

vi definerer x = 0 i likevektsposisjon;
hvis x > 0 trekker kraften i negativ x retning: $F = -kx$

initialbetingelser:

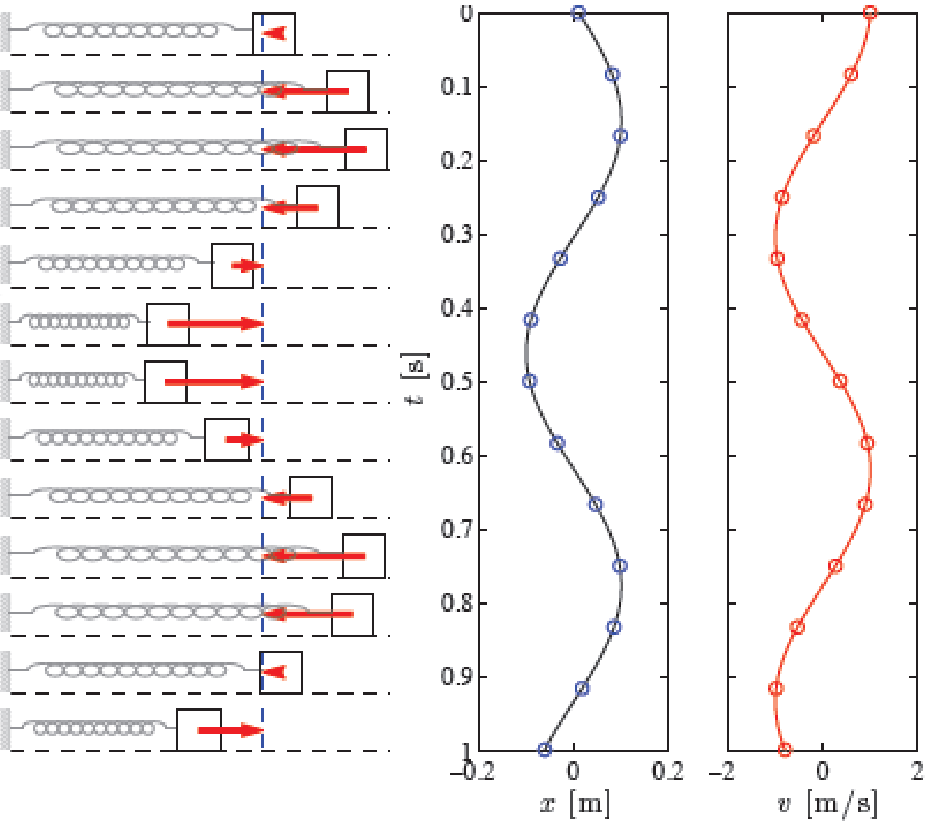
$$x(t_0) = 0\,\mathrm{m}$$

$$v(t_0) = 1\,\mathrm{m/s}$$

N2L: $$\sum F_x = F = -kx = ma \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{k}{m}x$$

Numerisk løsning med Euler-Cromer:

```
% Initialize
m = 1.0;     % kg
k = 100.0; % N/m
v0 = 1.0;    % in m/s
time = 2.0; % s
% Numerical setup
dt = 0.0001; % s
n = ceil(time/dt);
t = zeros(n,1);
x = zeros(n,1);
v = zeros(n,1);
% Initial values
x(1) = 0.0;
v(1) = v0;
% Simulation loop
for i = 1:n-1
    F = -k*x(i);
    a = F/m;
    v(i+1) = v(i) + a*dt;
    x(i+1) = x(i) + v(i+1)*dt;
    t(i+1) = t(i) + dt;
end
% Plot results
```



massen svinger frem og tilbake

vi leser fra diagrammet:
$x_{max} = \pm 0.1$ m
$v_{max} = 1$ m/s ved $x = 0$ m

Hva er perioden for svingning?

Analytisk: $F = -kx$

initialbetingelser: $x(t_0) = 0\,\text{m}$

$v(t_0) = 1\,\text{m/s}$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

ansatz: $x(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \omega A\cos(\omega t) - \omega B\sin(\omega t)$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A\sin(\omega t) - \omega^2 B\cos(\omega t) = -\omega^2 x(t)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{100\,\text{N/m}}{1\text{kg}}} = 10\,\text{s}^{-1}$$

frekvens:
stiv fjær eller liten masse
$\Rightarrow$ rask svingning

$$x(0) = B = 0$$

$$v(0) = \omega A = v_0 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{v_0}{\omega} = \frac{1\,\text{m/s}}{10\,\text{s}^{-1}} = 0.1\,\text{m}$$

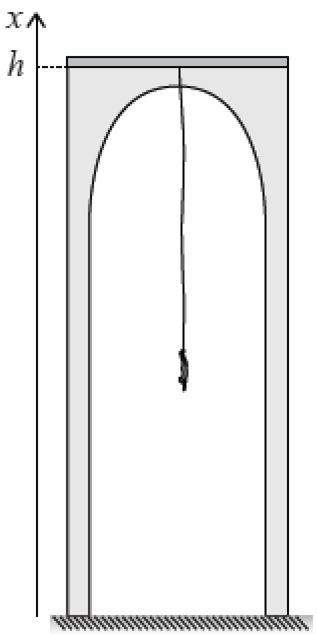
amplitude:
høy initialhastighet
$\Rightarrow$ stor amplitude

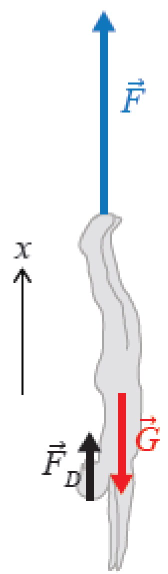
$$x(t) = \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)$$

$$v(t) = v_0\cos(\omega t)$$

Eksempel: bungee jump

En person av masse m = 70 kg hopper med en strikk av lengde d = 50 m fra en bro av høyde h = 100 m. Vi kan beskrive strikken med en fjærkonstant k = 200 N/m og en viskøs koeffisient k_v = 30 kg/s. For luftmotstanden kan vi bruke D = 0.22 kg/m. Treffer han bakken?





Vi beskriver bevegelsen til hopperen.
Vi måler posisjonen med x(t) oppover fra bakken.
Initialbetingelser:

$$x(t_0) = x_0 = 100\,\text{m}$$

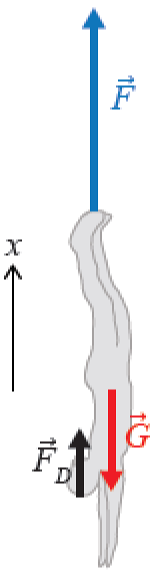
$$v(t_0) = v_0 = 0\,\text{m/s}$$

$$t_0 = 0\,\text{s}$$

Kontaktkrefter:
- kraft F fra strikken til hopperen
- luftmotstand F_D

langtrekkende krefter:
- gravitasjon G

Kraftmodell:



gravitasjon: $\vec{G} = -mg\,\hat{i}$

luftmotstand: $\vec{F}_D = -Dv|v|\,\hat{i}$

Kraften fra strikken virker bare hvis den er stram.

elongasjon: $\Delta L = (h-d) - x$

fjærkraft: $\vec{F}_S = \begin{cases} +k\Delta L\,\hat{i} & \Delta L > 0 \\ 0 & \Delta L \le 0 \end{cases}$

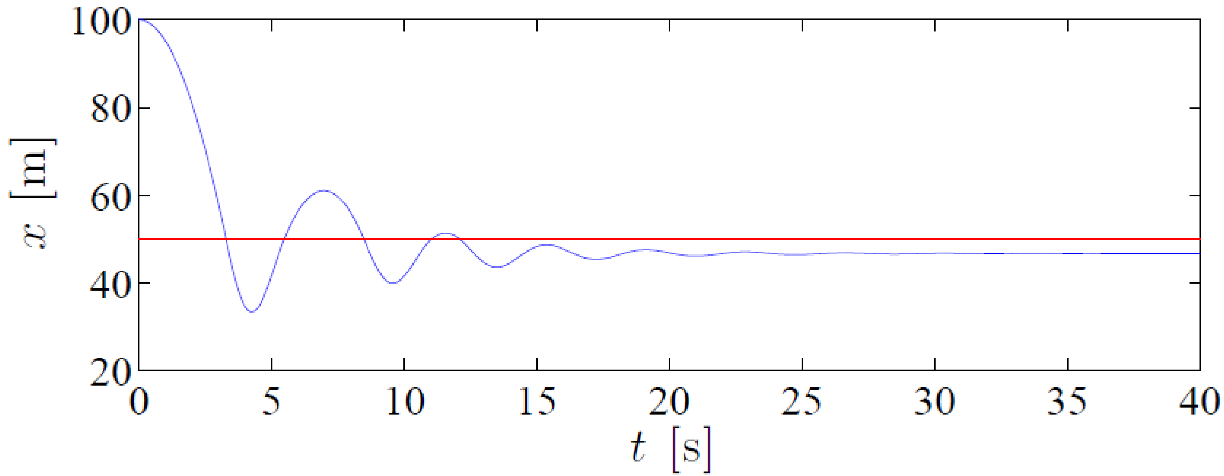
viskøs kraft avhenger av endingsraten for ΔL: $\frac{d}{dt}\Delta L = \frac{d}{dt}(h-d-x) = -\frac{dx}{dt} = -v$

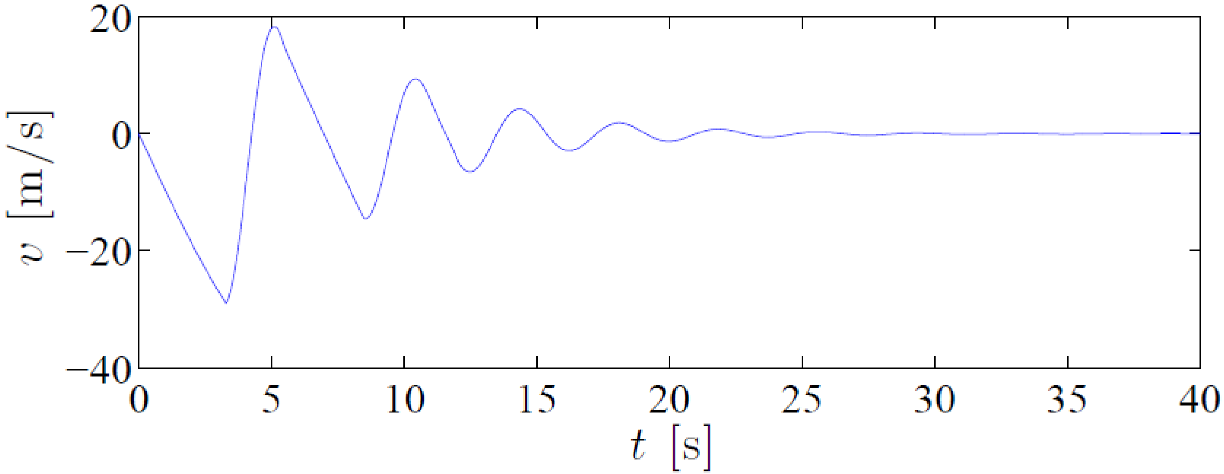
$$\vec{F} = \begin{cases} k(h-d-x)\,\hat{i} - k_v v\,\hat{i} & x < h-d \\ 0 & x > h-d \end{cases}$$

N2L: $\vec{F} + \vec{G} + \vec{F}_D = F(x,v)\,\hat{i} - mg\,\hat{i} - Dv|v|\,\hat{i} = ma\,\hat{i}$

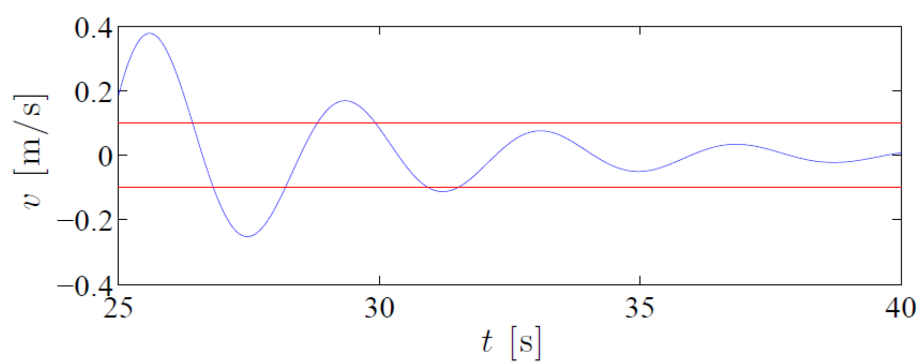
```matlab
clear all; clf; % Physical constants
g = 9.8;
D = 0.22;
m = 70.0; % Mass of jumper
kv = 30.0;
k = 200.0;
h = 100.0; % Height of bridge
d = 50.0;  % Length of cord
time = 40.0;
dt = 0.001;
% Initial conditions
v0 = 0;
x0 = h;
% Numerical initialization
n = time/dt;
x = zeros(n,1);
v = zeros(n,1);
a = zeros(n,1);
t = zeros(n,1);
% Set initial values
x(1) = x0;
v(1) = v0;
```

```matlab
% Integration loop
for i = 1:n-1
  if (x(i)<h-d)
      F = k*(h-d-x(i)) - kv*v(i);
  else
      F = 0.0;
  end
  a(i) = F/m -g - (D/m)*v(i)*abs(v(i));
  v(i+1) = v(i) + a(i)*dt;
  x(i+1) = x(i) + v(i+1)*dt;
  t(i+1) = t(i) + dt;
end
% Plot results
```



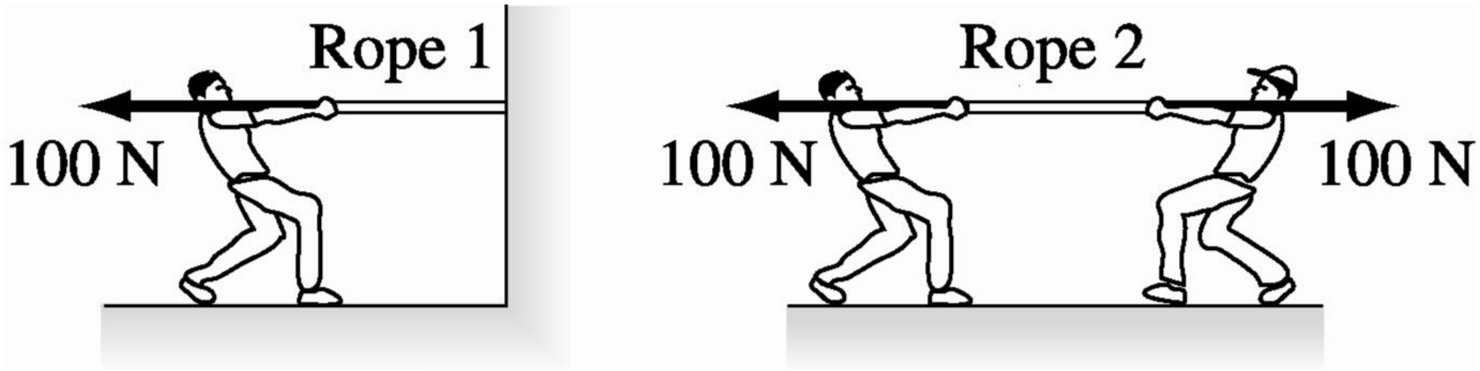


Når slutter bevegelsen ?



http://pingo.upb.de/ access number: 8178

I hvilket tilfelle er tauspenningen større?



- Snordraget i tau 1 er større enn i tau 2
- Snordraget i tau 1 er like stort som i tau 2
- Snordraget i tau 1 er mindre enn i tau 2

Newtons tredje lov:

Enhver virkning har alltid og tilsvarende en motvirkning, eller den gjensidige påvirkning av to legemer på hverandre er alltid lik, og motsatt rettet.

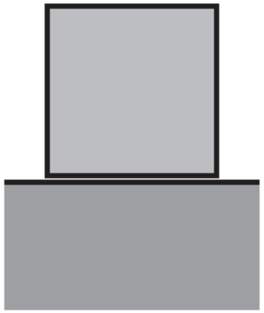
$$\vec{F}_{\text{fra A på B}} = -\vec{F}_{\text{fra B på A}}$$

Newtons tredje lov forbinder krefter mellom legemer:

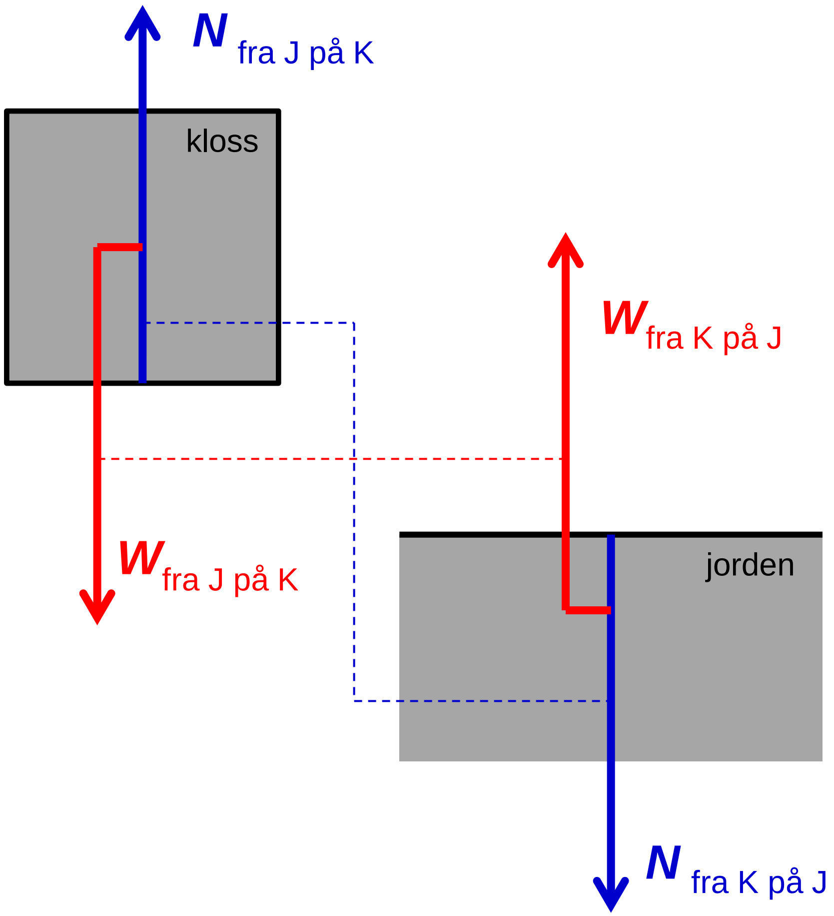
Hvis jeg dytter på veggen, dytter veggen tilbake på meg med like stor kraft.

- essensiell for å beskrive systemer som består av flere legemer
- krefter kommer i par: kraft og motkraft
- kreftene i paret virker på forskjellige legemer

Eksempel:



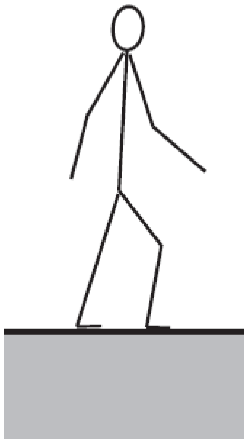
En kloss ligger i ro på bakken.

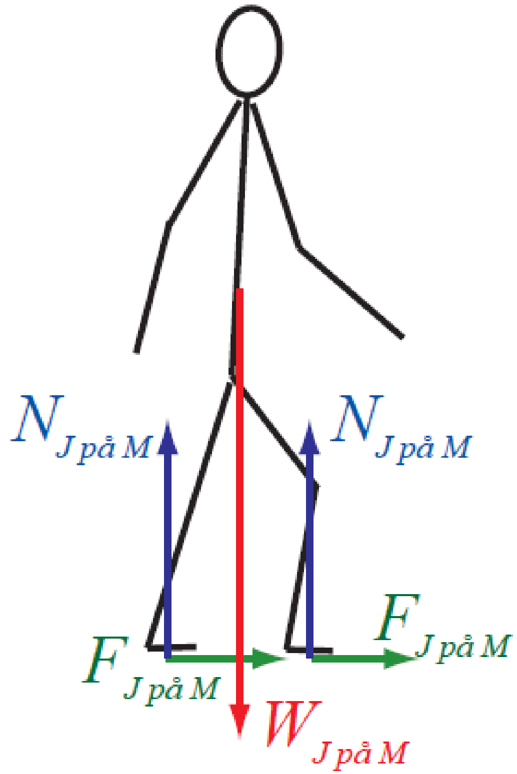


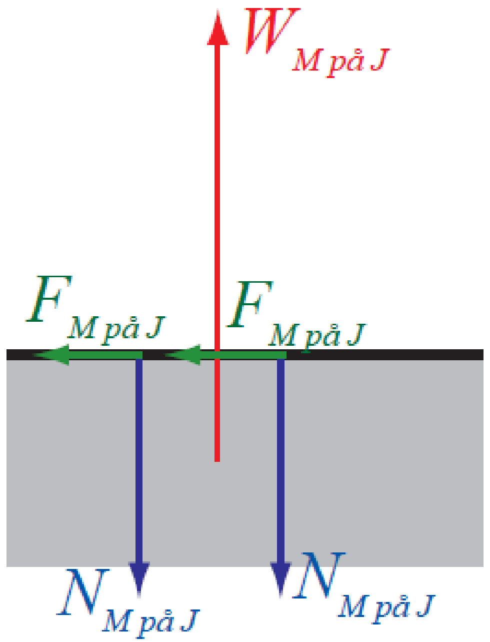
Oppskrift:

- tegn alle legemer som separate systemer
- finn alle krefter på alle objekter
- uttrykk kreftene som $F_{\text{A på B}}$
- finn kraft – motkraft par
- sjekk: hver kraft har en unik motkraft

Eksempel: Mann som går

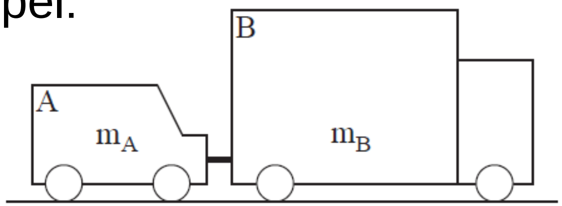






bevegelse fremover på grunn av friksjonskraft:
- mannen dytter jorden bakover
- jorden dytter mannen fremover

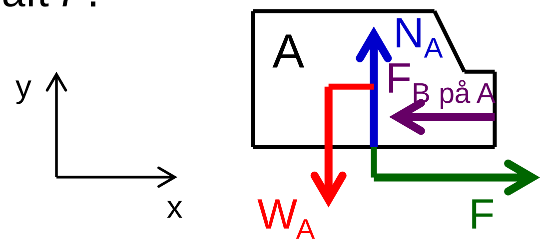
Eksempel:

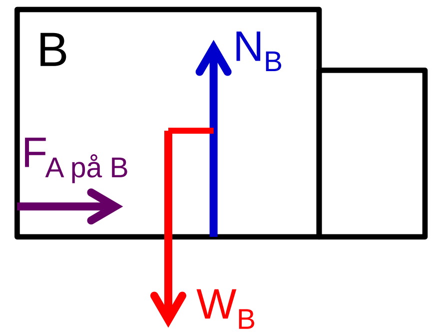


kinematisk betingelse:
biler er i kontakt

$$x_B = x_A + L$$
$$v_B = v_A = v$$
$$a_B = a_A = a$$

En bil dytter en lastebil
med konstant kraft *F*.





N2L for A:

$$\sum F_y = m_A a_y = 0 = N_A - m_A g$$
$$\sum F_x = m_A a_x = F - F_{\mathrm{B\,på\,A}}$$

N2L for B:

$$\sum F_y = m_B a_y = 0 = N_B - m_B g$$
$$\sum F_x = m_B a_x = F_{\mathrm{A\,på\,B}}$$

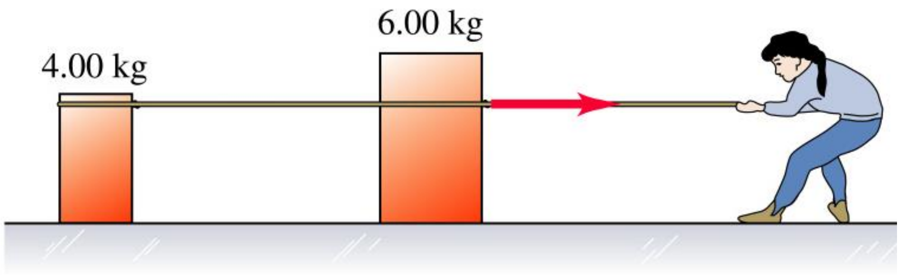
N3L: $\vec{F}_{\mathrm{B\,på\,A}} = -\vec{F}_{\mathrm{A\,på\,B}}$

$$(m_A + m_B) a_x = F - F_{\mathrm{B\,på\,A}} + F_{\mathrm{A\,på\,B}} = F$$

System oppfører seg som ett legeme med masse m_A+m_B
Vi trenger ikke se på indre krefter,
bare på krefter mellom systemet og omgivelsen.

http://pingo.upb.de/ access number: 8178

En kvinne trekker med $F = 100\ \mathrm{N}$ i en 6-kilos eske som igjen er forbundet med en 4-kilos eske med en lett strikk. Begge strikkene forblir stramm og overflaten er friksjonsfritt. Sammenliknet med 6-kilos esken er 4-kilos esken:

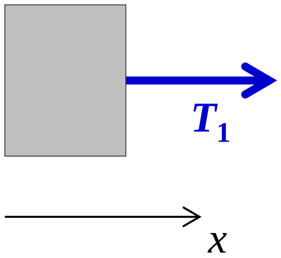


- utsatt for en større netto kraft.
- utsatt for samme netto kraft.
- utsatt for en mindre netto kraft.

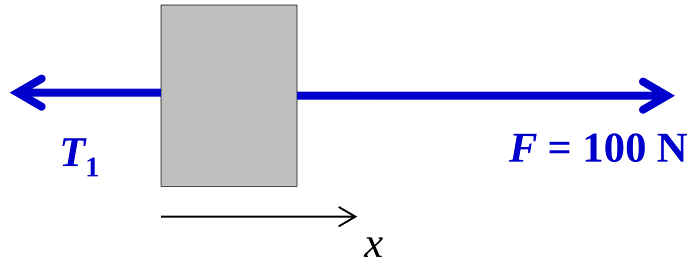
strikkene forblir stramm $\Rightarrow \quad v_1 = v_2; \quad a_1 = a_2$

vi ser bare på horisontale krefter:

$m_1 = 4$ kg



$m_2 = 6$ kg



tauspenning T_1: $\quad T_1 = m_1 a$

$$F - T_1 = m_2 a$$

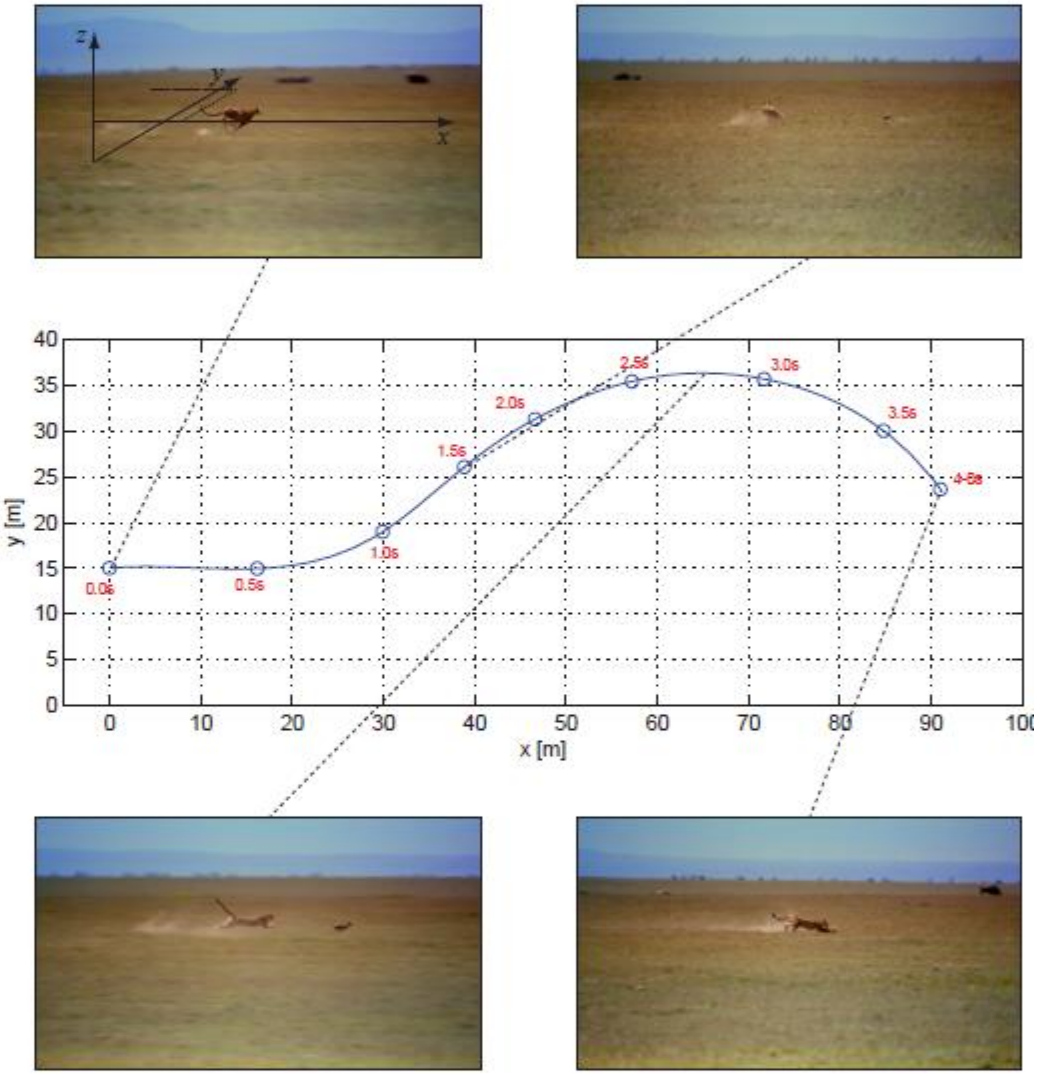
$$F = (m_1 + m_2)a = (m_1 + m_2)\frac{T_1}{m_1}$$

$$T_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} F = \frac{4}{10} F = 40 \text{ N}$$

$$F - T_1 = 60 \text{ N}$$

Bevegelse i to og tre dimensjoner

Bevegelsesdiagram i to dimensjoner



her er bevegelsen todimensjonal
vi kan beskrive posisjon med

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

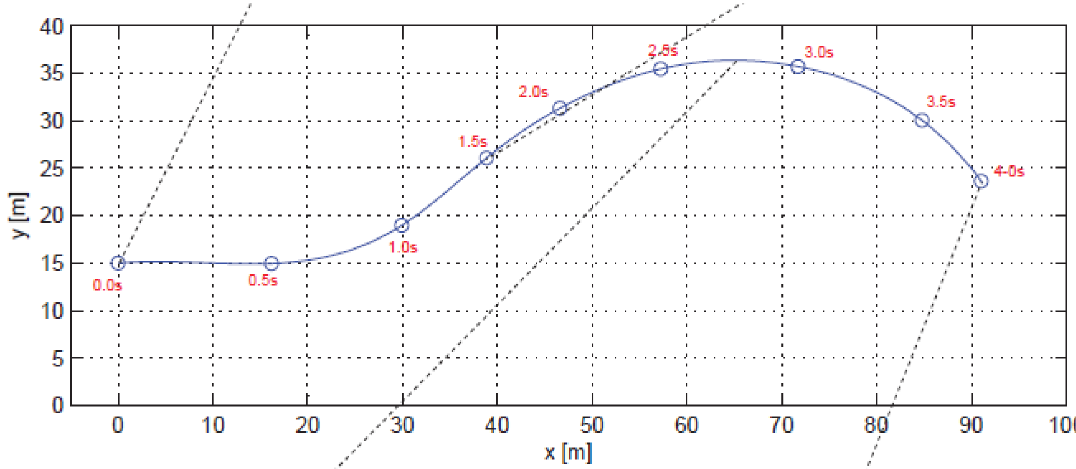
med enhetsvektorer $\hat{i}, \hat{j}$

$$\hat{i}\cdot\hat{i} = \hat{j}\cdot\hat{j} = 1$$
$$\hat{i}\cdot\hat{j} = 0$$

posisjonsvektor i tre dimensjoner:

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

$$\hat{i}\cdot\hat{i} = \hat{j}\cdot\hat{j} = \hat{k}\cdot\hat{k} = 1$$
$$\hat{i}\cdot\hat{j} = \hat{j}\cdot\hat{k} = \hat{k}\cdot\hat{i} = 0$$

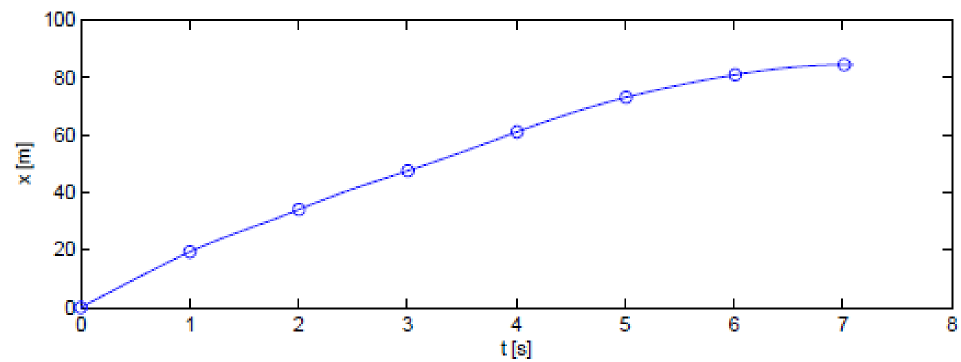


todimensjonal bevegelsesdiagram:

vi analysere bevegelsen videre:
- hastighet?
- akselerasjon?

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

vi kan se på *x*(*t*) og *y*(*t*) hver for seg



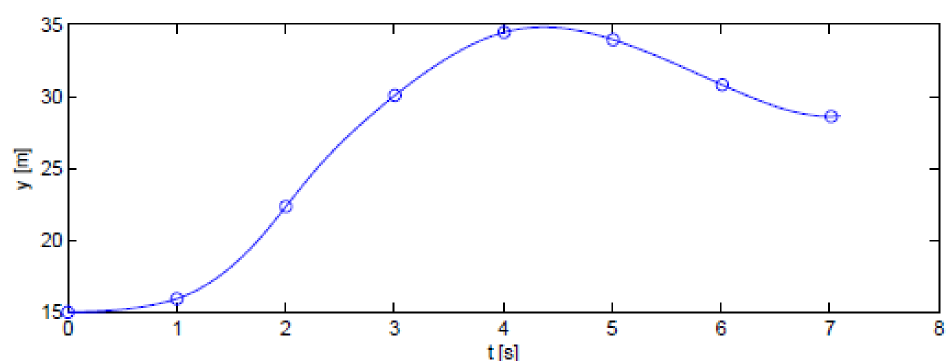
hastighet og akselerasjon i x og y retning:

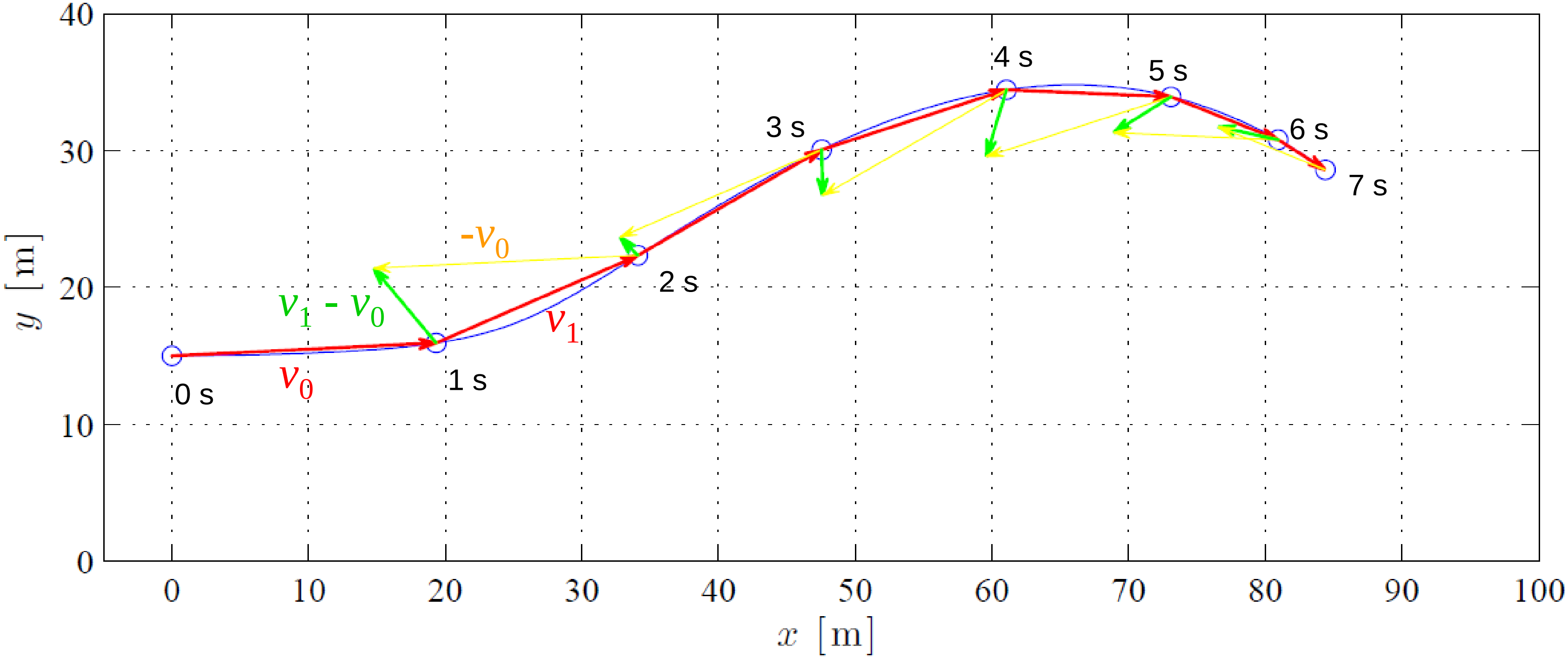
$$v_x(t) = \frac{d}{dt}x(t), \quad v_y(t) = \frac{d}{dt}y(t)$$

$$\vec{v}(t) = v_x(t)\hat{i} + v_y(t)\hat{j} = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \end{pmatrix}$$

$$a_x(t) = \frac{d}{dt}v_x(t), \quad a_y(t) = \frac{d}{dt}v_y(t)$$

$$\vec{a}(t) = a_x(t)\hat{i} + a_y(t)\hat{j} = \begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \end{pmatrix}$$





$$\vec{a}(t_i) \approx \frac{\vec{v}(t_{i+1}) - \vec{v}(t_i)}{\Delta t}$$

hastighetsvektor: $$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(x(t)\,\hat{i} + y(t)\,\hat{j} + z(t)\,\hat{k} \right)$$

$$= \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$$

$$= v_x(t)\,\hat{i} + v_y(t)\,\hat{j} + v_z(t)\,\hat{k}$$

hastighet: $\vec{v}(t)$

fart: $v(t) = \left|\vec{v}(t)\right|$

akselerasjonsvektor: $$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(v_x(t)\,\hat{i} + v_y(t)\,\hat{j} + v_z(t)\,\hat{k} \right)$$

$$= \frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}\hat{j} + \frac{dv_z}{dt}\hat{k}$$

$$= a_x(t)\,\hat{i} + a_y(t)\,\hat{j} + a_z(t)\,\hat{k}$$

Bevegningsligninger i tre dimensjoner

La oss anta at vi har gitt $\vec{a}(t)$ og $\vec{v}(t_0) = \vec{v}_0$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}(t)$$

$$\int_{t_0}^{t} \frac{d\vec{v}}{dt} dt = \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t) dt$$

$$\vec{v}(t) - \vec{v}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t) dt$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t) dt = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t) dt$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^{t} \left(\vec{v}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t) dt \right) dt$$

$$= \vec{r}_0 + \vec{v}_0 (t - t_0) + \int_{t_0}^{t} \left(\int_{t_0}^{t} \vec{a}(t) dt \right) dt$$

akkurat de samme som i én dimensjon
bare at vi må bruke vektorer
og det er gyldig for hver komponent

$$v_x(t) = v_{x,0} + \int_{t_0}^{t} a_x(t) dt$$

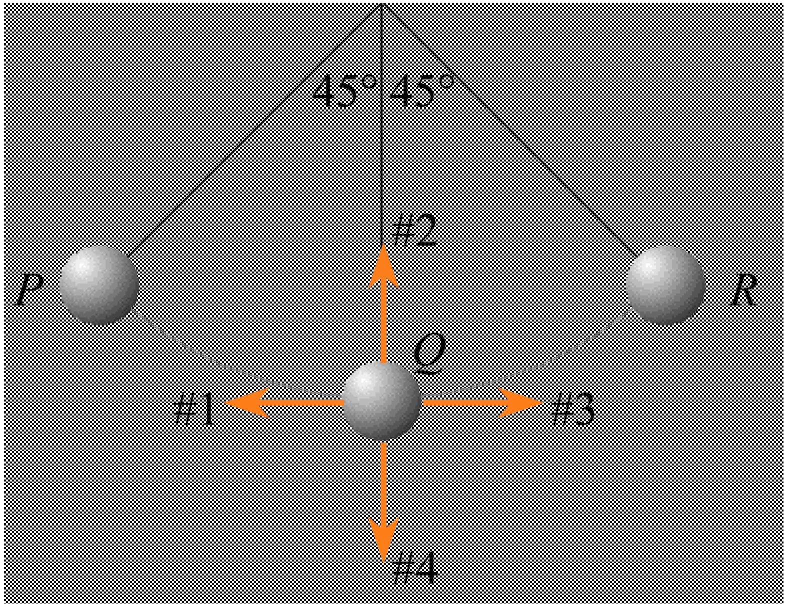
$$v_y(t) = v_{y,0} + \int_{t_0}^{t} a_y(t) dt$$

$$v_z(t) = v_{z,0} + \int_{t_0}^{t} a_z(t) dt$$

http://pingo.upb.de/ access number: 8178

En pendel svinger frem og tilbake med et maksimalutslag på 45° fra vertikalen. Hvilken pil angir retningen på akselerasjonen til pendelloddet i punktet Q (det laveste punktet i banen)?

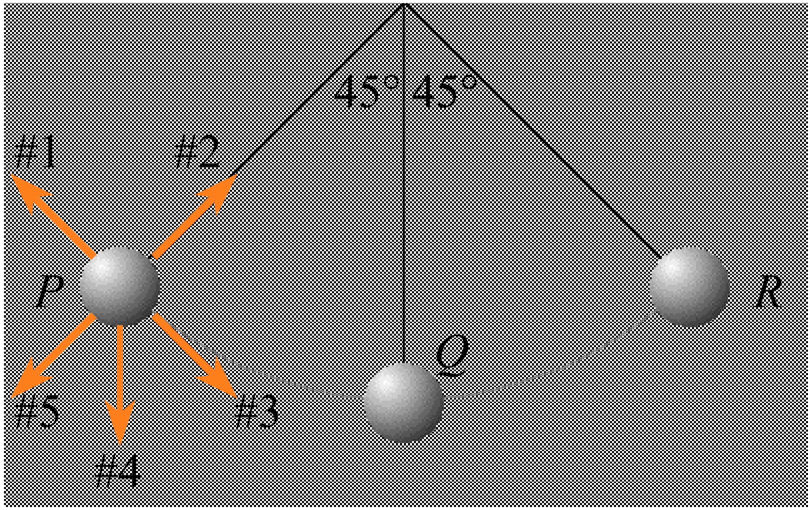
- Pil #2
- Pil #4
- Enten pil #1 eller pil #3 avhengig av hvilken vei pendelen svinger



http://pingo.upb.de/ access number: 8178

En pendel svinger frem og tilbake med et maksimalutslag på 45° fra vertikalen. Hvilken pil angir retningen på akselerasjonen til pendelloddet i punktet P (punktet lengst til venstre i banen)?

- Pil #1
- Pil #2
- Pil #3
- Pil #4
- Pil #5
- akselerasjonen i P er null



Skalarer og vektorer

notasjon:

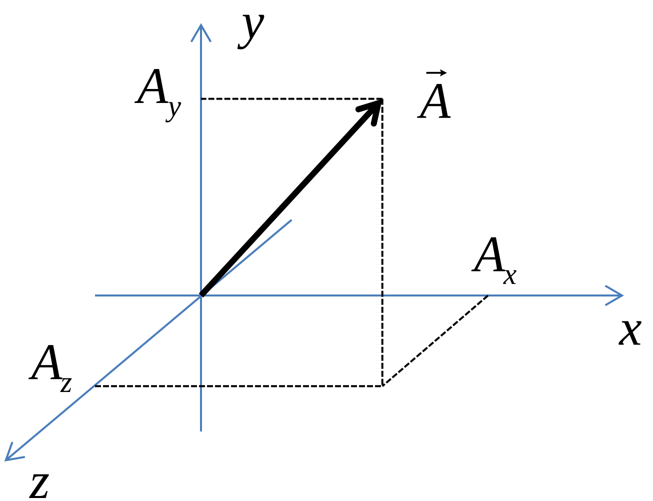
skalar: størrelse, men ingen retning
eksempel: masse, temperatur, lengde, fart, ...

$$m, T, l, v$$

vektor: størrelse og retning
eksempel: posisjon, hastighet, akselerasjon, kraft, ...

$$\vec{r}, \vec{v}, \vec{a}, \vec{F}$$

vektorkomponenter:



i kartesisk koordinatsystem:

$$\hat{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$$

$$\hat{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left|\vec{A}\right| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

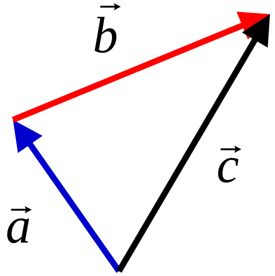
$$\hat{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vi kommer å bruke også sfæriske og sylindriske koordinatsystemer senere.

Regne med vektorer:

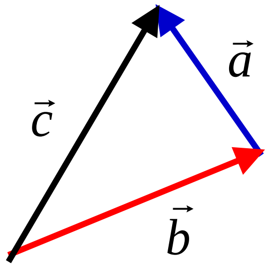
addisjon:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$



kommutativ:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

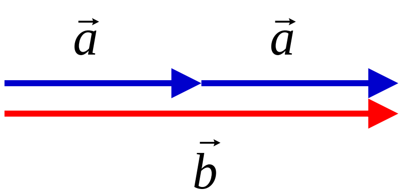


assosiativ:

$$\vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c}$$

multiplikasjon med en skalar:

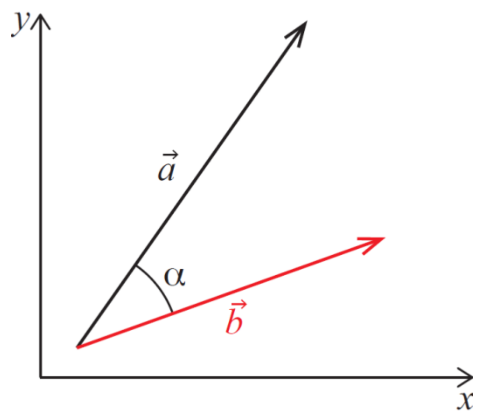
$$\vec{b} = 2\vec{a}$$



i Matlab:

```
a = [3 2 -1];
b = [-2 0 3];
c = a+b;
d = 0.75;
e = d*a;
```

Skalarprodukt (=indreprodukt)



$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha$$

lineær: $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c}$

kommutativ: $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$

i komponenter:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$a_x = \vec{a}\cdot\hat{i}, \quad a_y = \vec{a}\cdot\hat{j}, \quad a_z = \vec{a}\cdot\hat{k}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$$

i Matlab:

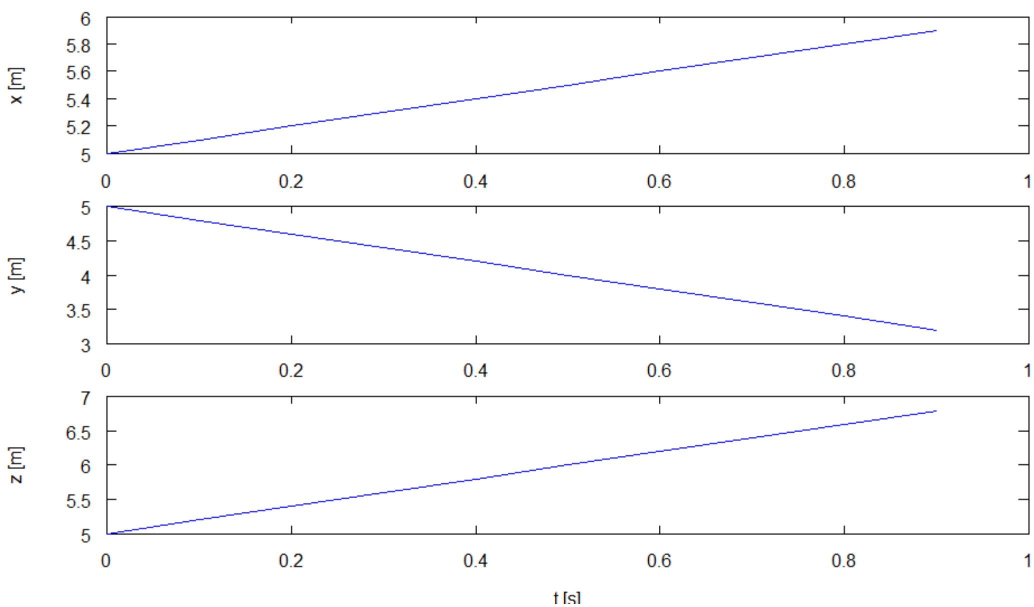
```
a = [3 2 -1];
b = [-2 0 3];
c = dot(a,b);
ux = [1 0 0];
ax = dot(a,ux);
an = sqrt(dot(a,a));
```

tidssekvenser av vektorer ⇒ matriser

```
v = [1.0 -2.0 2.0];
n = 10;
r = zeros(n,3);
t = zeros(n,1);
r(1,:) = [5.0 5.0 5.0];
dt = 0.1;
for i=1:n-1
    r(i+1,:) = r(i,:) + v*dt;
    t(i+1) = t(i) + dt;
end
```

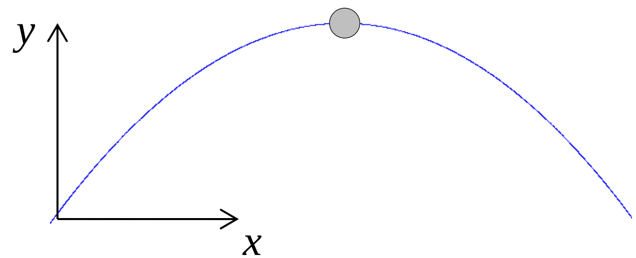
v: 3d-vektor konstant over tiden ⇒ (1x3) matrise
n: antall tidsskritter ⇒ skalar
r: 3d-vektor evaluert ved n tider ⇒ (nx3) matrise
t: skalar evaluert ved n tider ⇒ (nx1) matrise
r(1,:) første tid (linje) i (nx3) matrise = 3d-vektor
dt: tidsskritt ⇒ skalar

linje i (nx3) matrise = vektor = vektor + vektor * skalar
linje i (nx1) matrise = skalar = skalar + skalar



http://pingo.upb.de/ access number: 8178

Du kaster en ball i en vinkel på 45° i forhold til horisontal. Vi ser bort fra luftmotstanden. Hvilket utsagn er riktig i høyeste punkt på banen?



A. Fart og akselerasjon er null.
B. Farten er på et minimum, men ikke null, og akselerasjonen er konstant.
C. Farten er null, og akselerasjonen er konstant, men ikke null.
D. Farten er på et minimum, men ikke null, og akselerasjonen øker.

eneste kraft: gravitasjon

$$\vec{a} = -g\,\hat{j}$$

fart: $v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

ingen kraft i x retning: $v_x = v_{0,x} \neq 0$

i høyeste punkt: $v_y = 0$