Newtons lover i to og tre dimensjoner

09.02.2015

Innlevering Oblig 1:
- på grunn av forsinkelse med devilry er fristen utsatt til onsdag, 11.2., kl.12

Innlevering Oblig 2:
- frist: mandag, 16.2., kl.12

Midtveiseksamen: 26. mars kl. 10:00 (3 timer).

Gruppeundervisning i dag: Vi må slå sammen tre grupper til to.
- Gruppe 5: som vanlig kl. 14 – 16, Ø394
- Gruppe 6: fordeler seg på gruppe 5 eller 7
- Gruppe 7: som vanlig kl. 14 – 16, Ø443

Bevegelse i tre dimensjoner

Bevegelsen er karakterisert ved posisjon, hastighet og akselerasjon.

Vi må bruker vektorer:

posisjon: $\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{i} + y(t)\,\hat{j} + z(t)\,\hat{k}$

hastighet: $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k} = v_x(t)\,\hat{i} + v_y(t)\,\hat{j} + v_z(t)\,\hat{k}$

akselerasjon: $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}\hat{j} + \frac{dv_z}{dt}\hat{k} = a_x(t)\,\hat{i} + a_y(t)\,\hat{j} + a_z(t)\,\hat{k}$

hastighet: $\vec{v}(t)$

fart: $v(t) = |\vec{v}(t)|$

kraft

$\Downarrow$ N2L

akselerasjon

$\Downarrow$ integrasjon

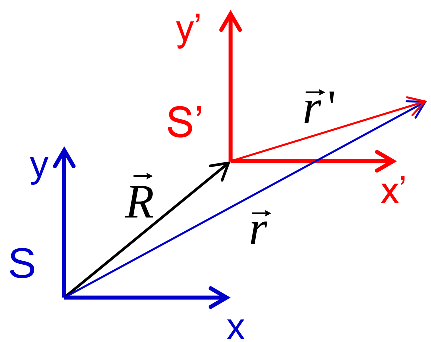
hastighet, posisjon

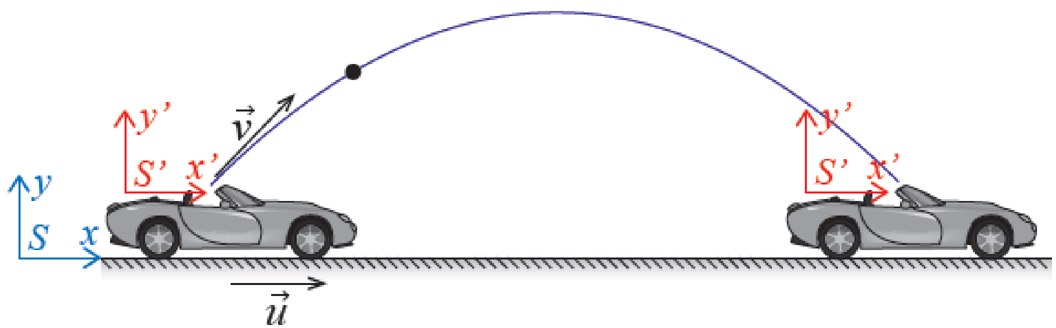
Relativbevegelse og referansesystemer

En person kjører med konstant hastighet i en åpen bil og kaster en ball rett opp. Hvordan vil en annen person som står på gaten beskrive bevegelsen?
(Vi ser bort fra luftmotstand.)

Sett fra bilen (system *S'*): ballen beveger seg rett opp og faller rett ned igjen.

Sett fra gaten (system *S*): bevegelsen beskrives som en skrått kast



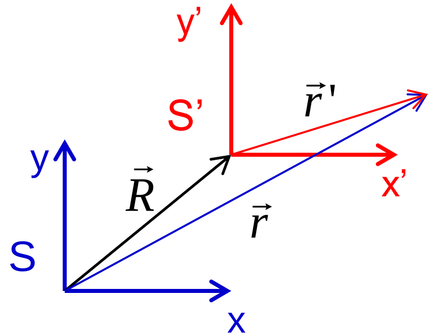


posisjon i gate-system S: $\vec{r}(t)$

posisjon i bil-system S': $\vec{r}\,'(t)$

posisjon av bilen i gate-system: $\vec{R}(t)$

$$\vec{r}(t) = \vec{R}(t) + \vec{r}\,'(t)$$



$$\vec{r}(t) = \vec{R}(t) + \vec{r}\,'(t)$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{R}(t) + \vec{r}\,'(t)\right) = \frac{d\vec{R}}{dt} + \frac{d\vec{r}\,'}{dt} = \vec{u} + \vec{v}\,'(t)$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{u} + \vec{v}\,'(t)\right) = \vec{0} + \frac{d\vec{v}\,'}{dt} = \vec{a}\,'(t)$$

Bilen beveger seg med konstant hastighet $\vec{u}$
akselerasjonene er de samme i begge systemer.

Systemer som beveger seg med konstant hastighet er inertialsystemer.
Newtons lover er gyldig – fysikken er de samme i begge systemer.

Hvordan beskrive vi bevegelsen av ballen?

fra bilen (system S'):
eneste kraft er gravitasjon
initialbetingelse:

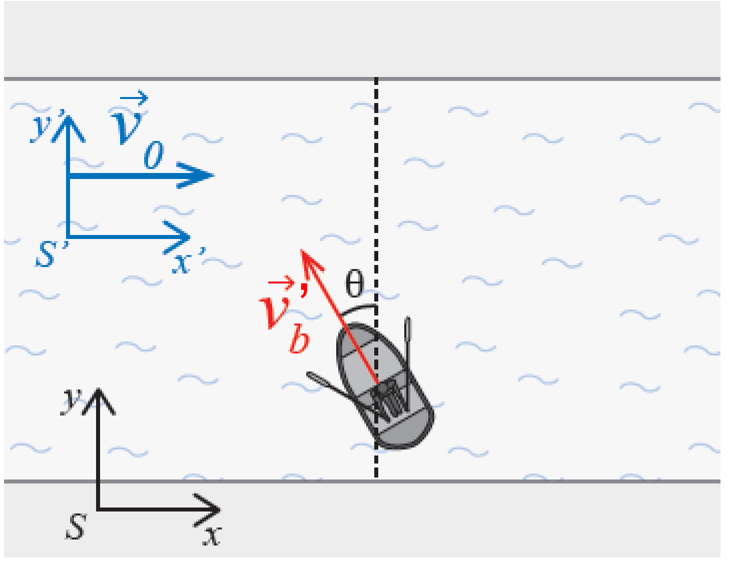
$$\vec{v}\,'(t_0) = \vec{v}\,'_0 = v_0\ \hat{j}$$

fra gaten (system S):
eneste kraft er gravitasjon
initialbetingelse:

$$\vec{v}(t_0) = \vec{u} + \vec{v}\,'(t_0) = u\,\hat{i} + v_0\ \hat{j}$$

Eksempel:

Du ror en båt over en elv. Elven strømmer med hastighet v_0. Hvilken vinkel bør du holde for å komme rett over elven?



System festet på elvebredden: S

System festet til vannet: S'

hastighet til vannet i system S: $\vec{u} = v_0\,\hat{i}$

hastighet til båten i system S': $\vec{v}'_b = -v'_b \sin(\theta)\,\hat{i} + v'_b \cos(\theta)\,\hat{j}$

hastighet til båten i system S: $\vec{v}_b = \vec{u} + \vec{v}'_b = v_0\,\hat{i} - v'_b \sin(\theta)\,\hat{i} + v'_b \cos(\theta)\,\hat{j}$

Hvis du skal kommer rett over elven, så må du ikke ha hastighet i x retning i system S

$$v_0 - v'_b \sin(\theta) = 0$$

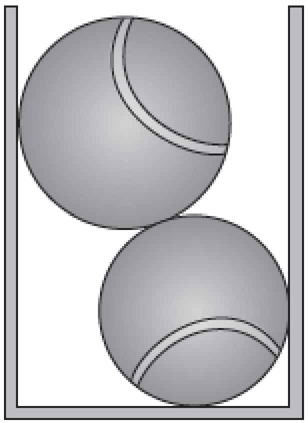
$$\sin(\theta) = \frac{v_0}{v'_b}$$

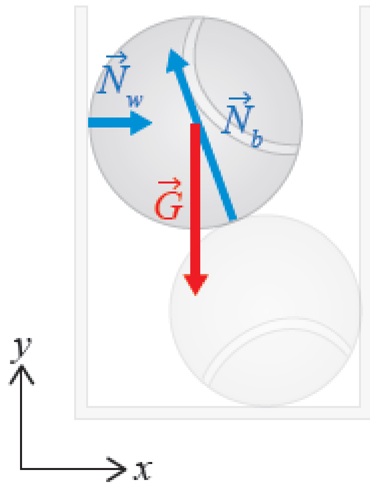
$$\sin(\theta) \le 1 \quad \Rightarrow \quad v'_b \ge v_0$$

Du kan bare klare det hvis du ror raskere enn elven strømmer.

Fri-legeme diagram i 3 dimensjoner

Tegn et fri-legeme diagram for den øverste ballen.





system: øvre ballen
omgivelse: nedre ballen, karet

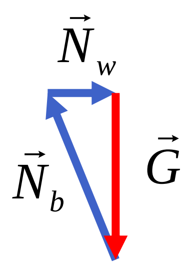
kontaktpunkter

kontaktkrefter:
normalkraft fra vegg på ball
normalkraft fra nedre ball på øvre ball

langtrekkende kraft:
gravitasjon

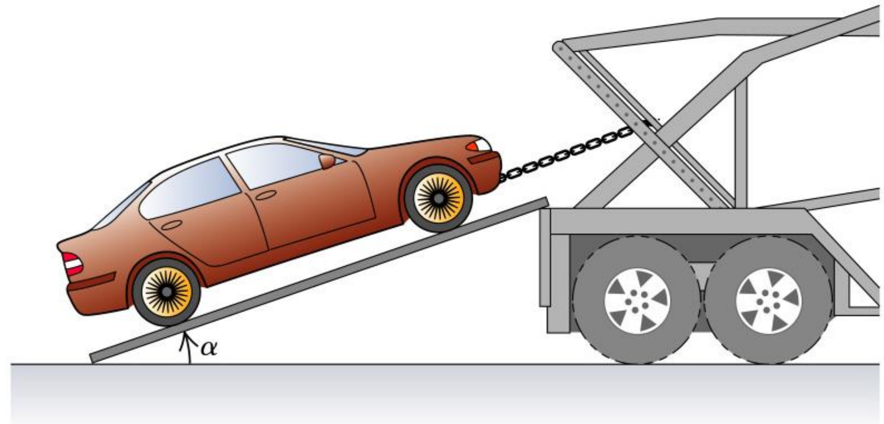
system er i ro:

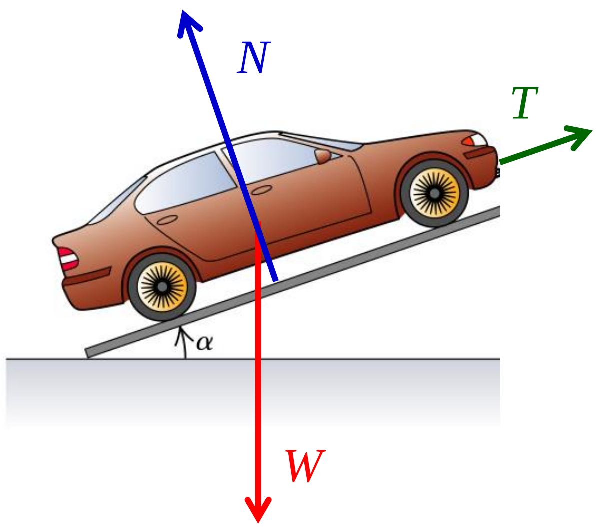
$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{N}_w + \vec{N}_b + \vec{G} = m\vec{a} = 0$$

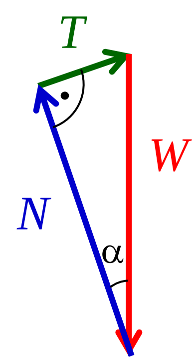


En kjede festet til bilen holder bilen i ro på den friksjonsfrie rampen (vinkel α). Rampen utøver en normalkraft på bilen. Hvor stor er normalkraften N i forhold til vekten W av bilen?

- $|\vec{N}| = |\vec{W}|$
- $|\vec{N}| = |\vec{W}| \sin\alpha$
- $|\vec{N}| = |\vec{W}| \cos\alpha$
- $|\vec{N}| = |\vec{W}| \tan\alpha$





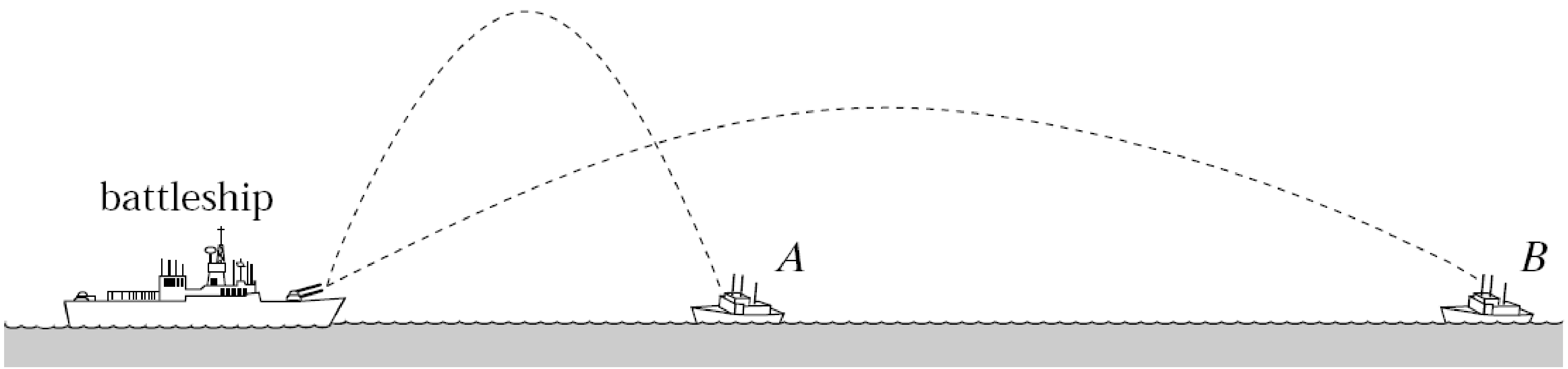


$$|\vec{N}| = |\vec{W}| \cos\alpha$$

$$|\vec{T}| = |\vec{W}| \sin\alpha$$

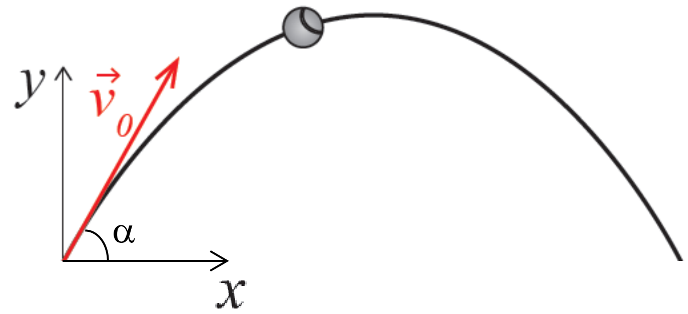
http://pingo.upb.de/ access number: 8178

Et slagskip skyter samtidig to skudd mot fiendeskip. Initialfarten v_0 er de samme for begge skudd, men vinklene mot horisont er forskjellige. Granatene følger de parabolske banene vist.
Hvilket skip blir truffet først?



- skip A
- skip B
- skipene blir truffet samtidig

Skrått kast



Et prosjektil skytes ut fra bakkenivå med fart v_0 og vinkelen α mot horisontale.

system: prosjektil
omgivelse: luft

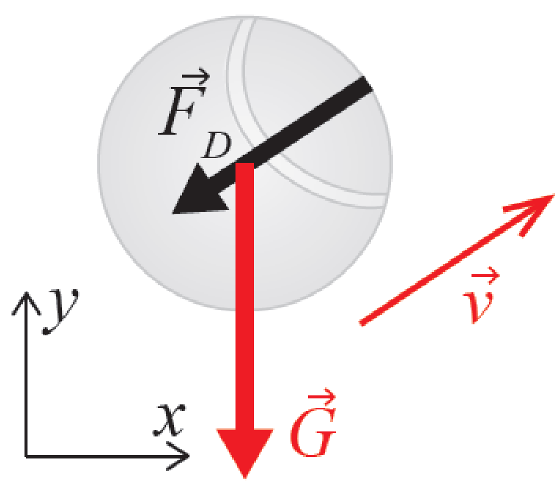
koordinatsystem: x horisontal, y vertikal

initialbetingelser: $\vec{r}(0) = \vec{0}$

$$\vec{v}(0) = \vec{v}_0 = v_0 \cos(\alpha)\,\hat{i} + v_0 \sin(\alpha)\,\hat{j}$$

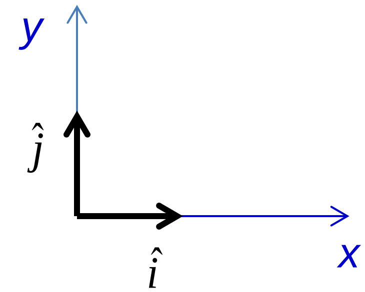
kontaktkrefter:
- luftmotstand

langtrekkende kraft
- gravitasjon



nyttig å tegne hastighetsvektoren i fri-legeme diagram.
ikke bland vektorer for hastighet og kraft!
$\Rightarrow$ Hastighetsvektoren må ikke berøre systemet.

Forenkelt modell: vi ser bort fra luftmotstanden: $\vec{F}_{\mathrm{D}} = \vec{0}$
(Vi inkludere luftmotstanden senere.)



gravitasjon er konstant på jordoverflaten: $\vec{G} = -mg\,\hat{j}$

Newtons andre lov: $\vec{F}_{\mathrm{net}} = \vec{G} = -mg\,\hat{j} = m\vec{a}$

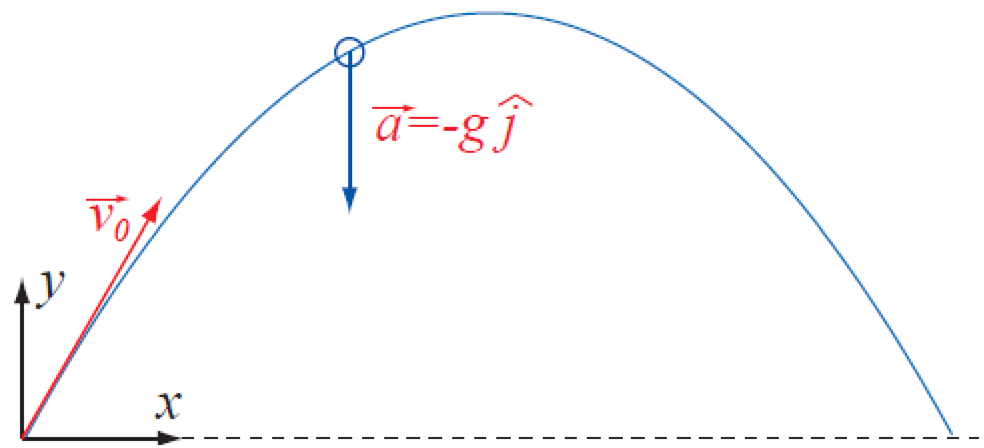
$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_{\mathrm{net}}}{m} = -g\,\hat{j}$$

i komponenter:

$$a_x = 0$$

$$a_y = -g$$

kast uten luftmotstand:
ingen akselerasjon i x retning



akselerasjon: $\vec{a} = -g\,\hat{j}$

initialbetingelse: $\vec{v}(0) = \vec{v}_0 = v_0\cos(\alpha)\,\hat{i} + v_0\sin(\alpha)\,\hat{j}$

hastighet: $\vec{v}(t) - \vec{v}(0) = \int_0^t \vec{a}(t)\,dt = \int_0^t (-g\,\hat{j})\,dt = -gt\,\hat{j}$

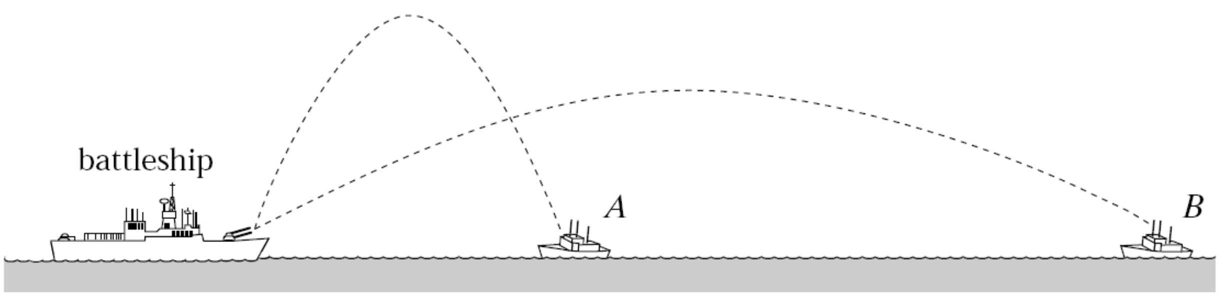
$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 - gt\,\hat{j} = v_0\cos(\alpha)\,i + \left(v_0\sin(\alpha) - gt\right)\hat{j}$$

i komponentform:

$$v_x(t) = v_0\cos(\alpha)$$
$$v_y(t) = v_0\sin(\alpha) - gt$$

konstant hastighet v_x
v_x større for små vinkel α

men skip A ligger mye nærmere...



hastighet: $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 - gt\,\hat{j}$

initialbetingelse: $\vec{r}(0) = \vec{r}_0 = \vec{0}$

posisjon: $$\vec{r}(t) - \vec{r}(0) = \int_0^t \vec{v}(t)\,dt = \int_0^t (\vec{v}_0 - gt\,\hat{j})\,dt = \vec{v}_0\,t - \frac{1}{2}gt^2\,\hat{j}$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0\,t - \frac{1}{2}gt^2\,\hat{j} = v_0\,t\cos(\alpha)\,\hat{i} + v_0\,t\sin(\alpha)\,\hat{j} - \frac{1}{2}gt^2\,\hat{j}$$

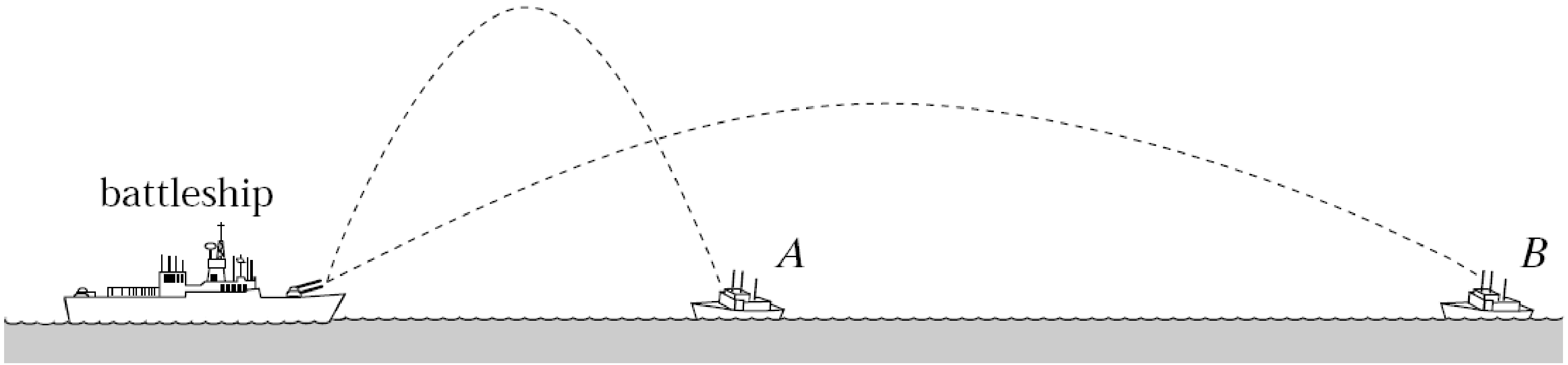
i komponentform:

$$x(t) = v_0\,t\cos(\alpha)$$

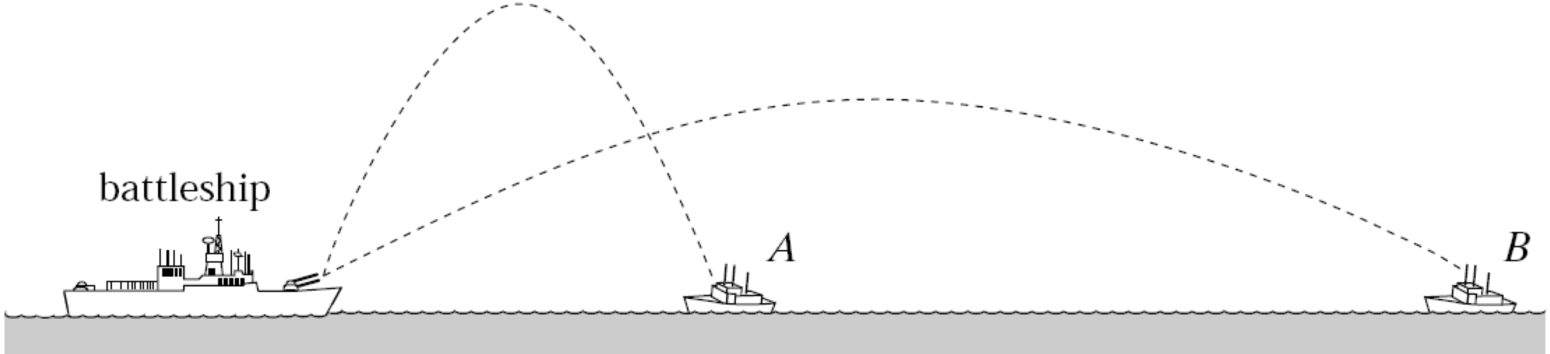
$$y(t) = v_0\,t\sin(\alpha) - \frac{1}{2}gt^2$$

http://pingo.upb.de/ access number: 8178

Et slagskip skyter samtidig to skudd mot fiendeskip. Initialfarten v_0 er de samme for begge skudd, men vinklene mot horisont er forskjellige. Granatene følger de parabolske banene vist.
Hvilket skip blir truffet først?



- skip A
- skip B
- skipene blir truffet samtidig



posisjon som funksjon av tiden:

$$x(t) = v_0\, t \cos(\alpha)$$

$$y(t) = v_0\, t \sin(\alpha) - \frac{1}{2} g t^2$$

skipet skyter ved tid $t_0 = 0$

prosjektilet treffer ved tid t_1: $y(t_1) = 0$

$$v_0\, t_1 \sin(\alpha) - \frac{1}{2} g t_1^2 = 0$$

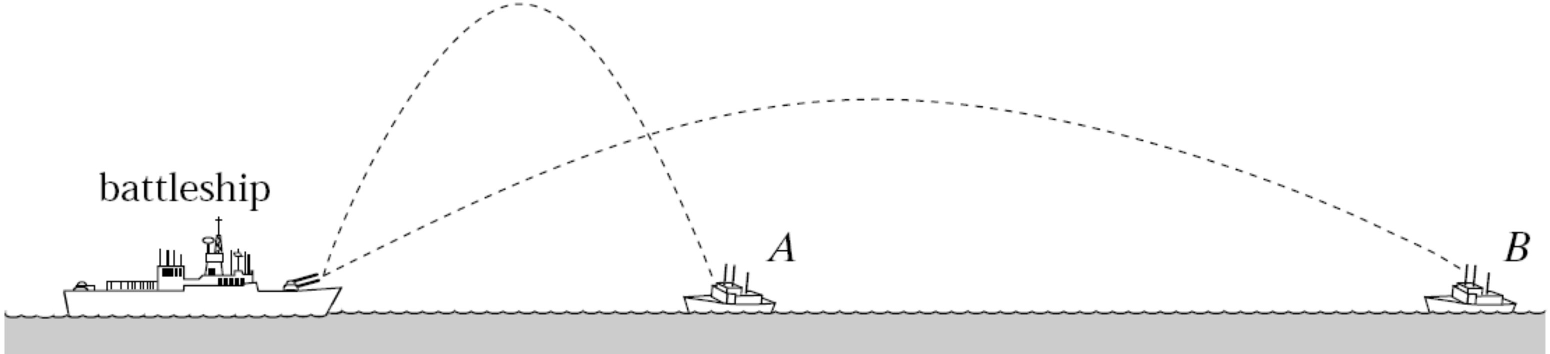
$t_1 \neq 0$

$$v_0 \sin(\alpha) = \frac{1}{2} g t_1$$

$$t_1 = \frac{2 v_0 \sin(\alpha)}{g}$$

tiden t_1 er kortere for små vinkel α

$\Rightarrow$ skip B blir truffet først.



Vi har brukt oppskriften:
- finn initialbetingelser
- identifiser krefter,
- løs bevegelsesligninger
- ...

trygg metode, sikker å finne svaret

Argumentasjon som trenger litt erfaring:
- bevegelsen i x og y retning er koblet fra hverandre
- parabolsk bane er symmetrisk: det tar like lang tid å komme opp som ned
- jo høyere den maksimale høyden jo lengre tid tar det å falle ned

Hvilken vinkel bør du velge for å skyte lengst mulig?

$$x(t) = v_0\, t \cos(\alpha)$$

$$y(t) = v_0\, t \sin(\alpha) - \frac{1}{2} g t^2$$

kulen treffer bakken ved tiden t_1:

$$t_1 = \frac{2 v_0 \sin(\alpha)}{g}$$

x komponent av posisjon ved tid t_1:

$$x(t_1) = v_0\, t_1 \cos(\alpha) = \frac{2 v_0^2}{g} \sin(\alpha) \cos(\alpha)$$

vi deriverer for å finne maksimum:

$$\frac{dx}{d\alpha} = \frac{2 v_0^2}{g} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = 0$$

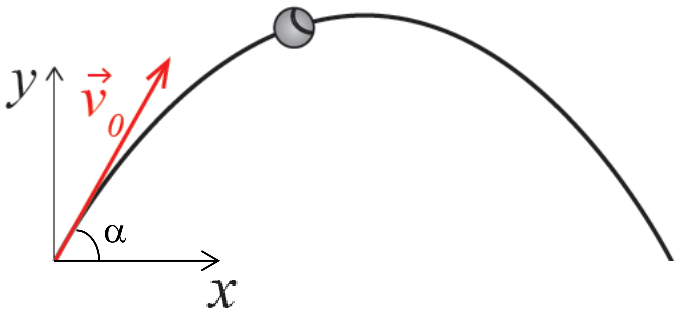
$$\cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha$$

$$\tan^2 \alpha = 1$$

$$\alpha = 45°$$

Prosjektilet kommer
lengst med α=45°.

Vis at prosjektilet beveger seg på en parabelbane.



bane som funksjon av tiden.

$$\vec{r}(t) = v_0 t\cos(\alpha)\,\hat{i} + \left(v_0 t\sin(\alpha) - \frac{1}{2} g t^2 \right)\hat{j}$$

for å se at banen er en parabel:
uttrykk y som funksjon av x

$$x(t) = v_0\, t\cos(\alpha) \qquad y(t) = v_0\, t\sin(\alpha) - \frac{1}{2} g t^2$$

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha} \qquad y = v_0 \frac{x}{v_0\cos\alpha}\sin\alpha - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0\cos\alpha} \right)^2$$

$$y = x\tan\alpha - \frac{1}{2}\frac{g x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha} = ax + bx^2$$

Numerisk løsning

for små tidssteg Δt: $$\vec{a}(t) \approx \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

$$\vec{v}(t+\Delta t) \approx \vec{v}(t) + \vec{a}(t)\,\Delta t$$

i Matlab:
```
v(i+1,:) = v(i,:) + dt*a(i,:);
```

for hastighet: $$\vec{v}(t) \approx \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

$$\vec{r}(t+\Delta t) \approx \vec{r}(t) + \vec{v}(t)\,\Delta t$$ Euler metode

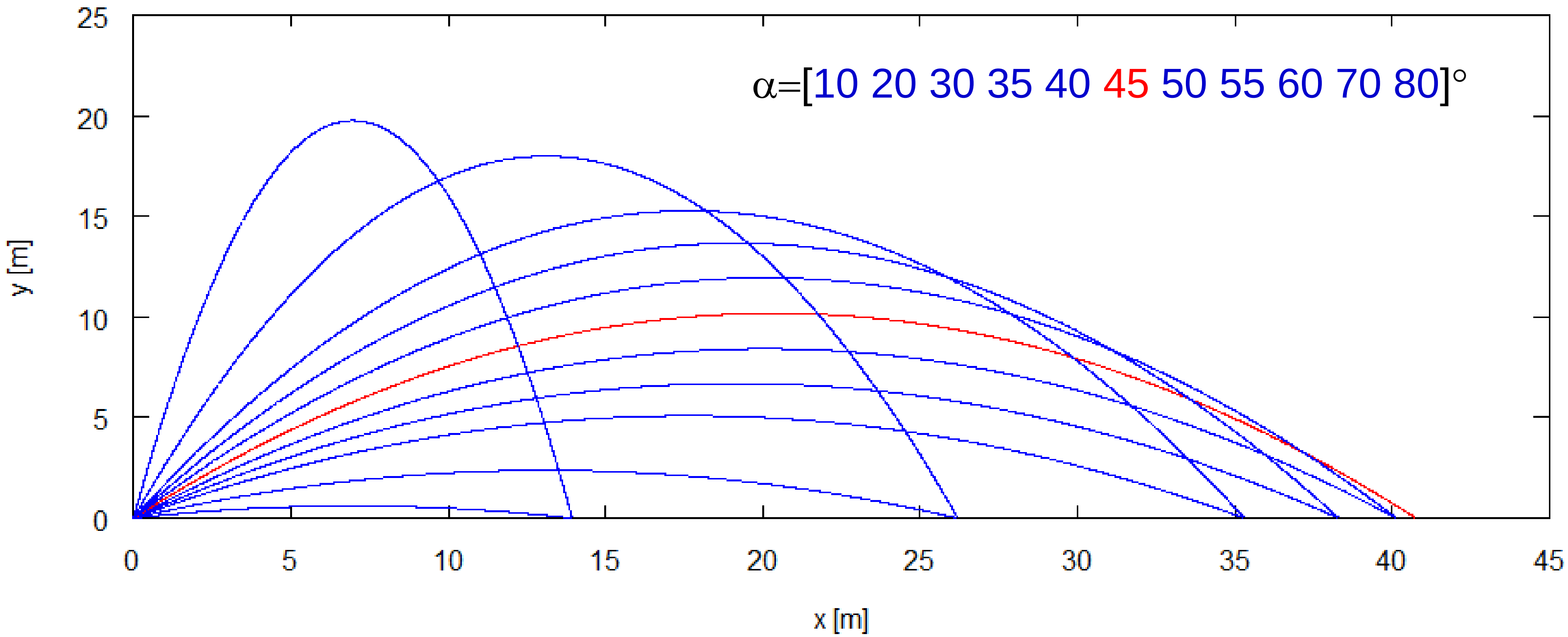
$$\vec{r}(t+\Delta t) \approx \vec{r}(t) + \vec{v}(t+\Delta t)\,\Delta t$$ Euler-Cromer metode

i Matlab:
```
r(i+1,:) = r(i,:) + dt*v(i+1,:);
```

Numerisk løsning

```
m = 0.2; % kg
g = 9.81; % m/s^2
h = 0.0; % m
r0 = [0 h];
v0norm = 20.0;
alpha = 45.0*pi/180.0;
v0 = v0norm*[cos(alpha) sin(alpha)];
time = 10.0; % s
dt = 0.001;
n = ceil(time/dt);
r = zeros(n,2);
v = zeros(n,2);
t = zeros(n,1);
% Initial conditions
r(1,:) = r0;
v(1,:) = v0;
i = 1;
```

```
% Simulation loop
while (r(i,2)>=0.0)
    Fnet = - m*g*[0 1];
    a = Fnet/m;
    v(i+1,:) = v(i,:) + dt*a;
    r(i+1,:) = r(i,:) + dt*v(i+1,:);
    t(i+1) = t(i) + dt;
    i = i + 1;
end
plot(r(1:i,1),r(1:i,2));
xlabel('x [m]');
ylabel('y [m]');
```



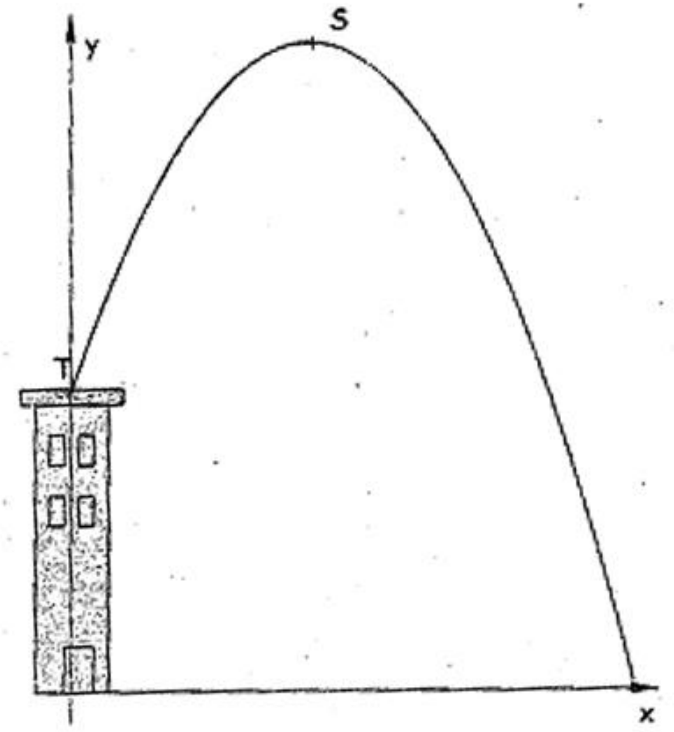
Som forventet kommer prosjektilet lengst når vi velger $\alpha = 45°$.

Prosjektilet kommer like langt ved α og $90° - \alpha$: $x(t_1) = \frac{2v_0^2}{g}\sin(\alpha)\cos(\alpha)$

men tiden t_1 er forskjellig

Hvilken vinkel bør du velge for å komme lengst mulig hvis du kaster en ball fra taket av en bygning? (Vi ser fortsatt bort fra luftmotstand.)

- $\alpha > 45°$
- $\alpha = 45°$
- $\alpha < 45°$



Kommer prosjektilet også lengst med α=45° hvis vi skyter fra en høyde *h* > 0?

Det er vanskelig å regne ut analytisk:

finn tid t_1 når: $y(t_1) = 0$

$$h + v_0 t_1 \sin(\alpha) - \frac{1}{2} g t_1^2 = 0$$

$$t_1 = \frac{v_0 \sin(\alpha)}{g} + \sqrt{\frac{v_0^2 \sin^2(\alpha)}{g^2} + \frac{2h}{g}}$$

$$x(t_1) = v_0 t_1 \cos(\alpha)$$

og så må vi finne maksimum...

Det er lett å gjøre numerisk:

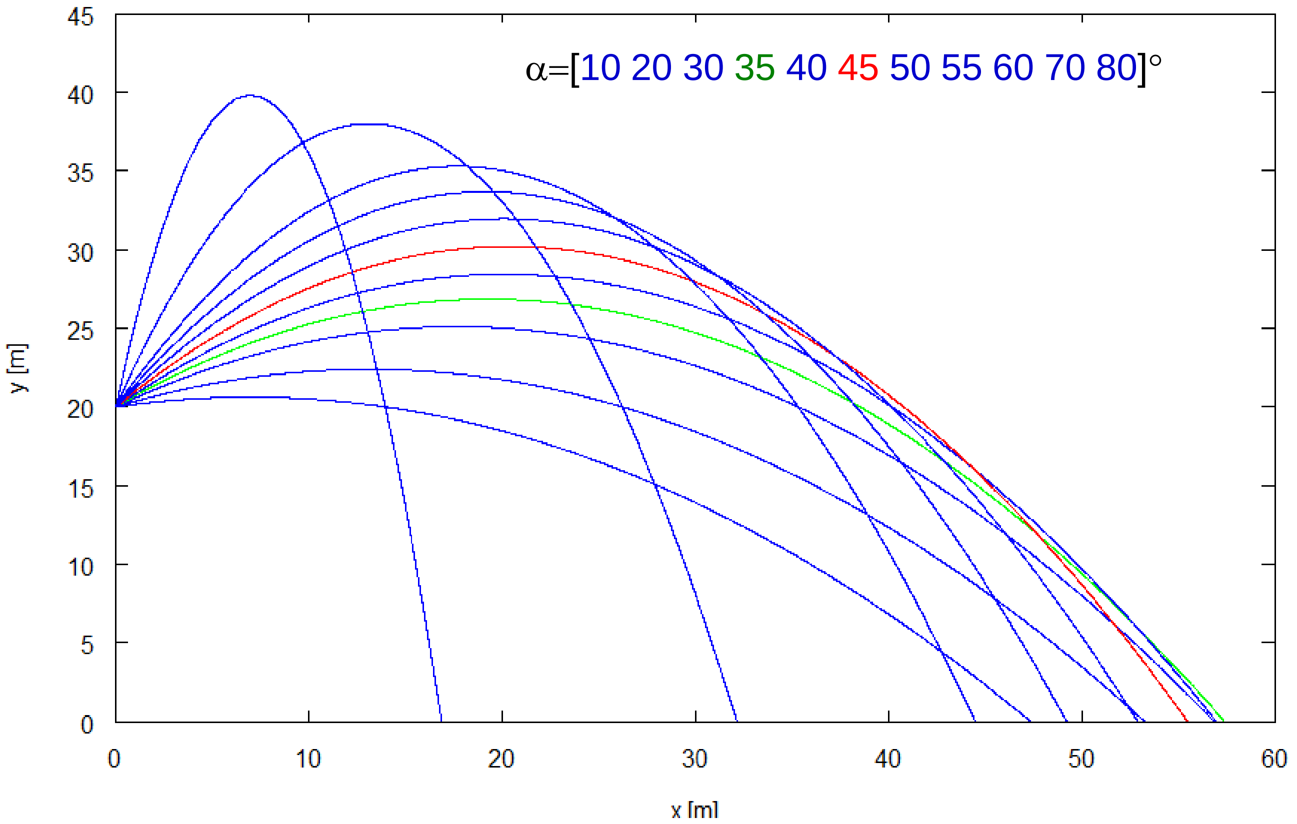
```
m = 0.2; % kg
g = 9.81; % m/s^2
h = 20.0; % m
r0 = [0 h];
v0value = 20.0;
```

Hvis du skyter fra en høyde *h* over bakken: $\vec{r}(0) = \vec{r}_0 = h\,\hat{j}$

initialbetingelser:

$y_0 = 20\,\mathrm{m}$

$|\vec{v}_0| = 20\,\mathrm{m/s}$



Vi kan finne den maksimale lengden ved variasjon av α:

$$\alpha_{max} = 35.4°$$

$$x_{max} = 57.39\,\mathrm{m}$$

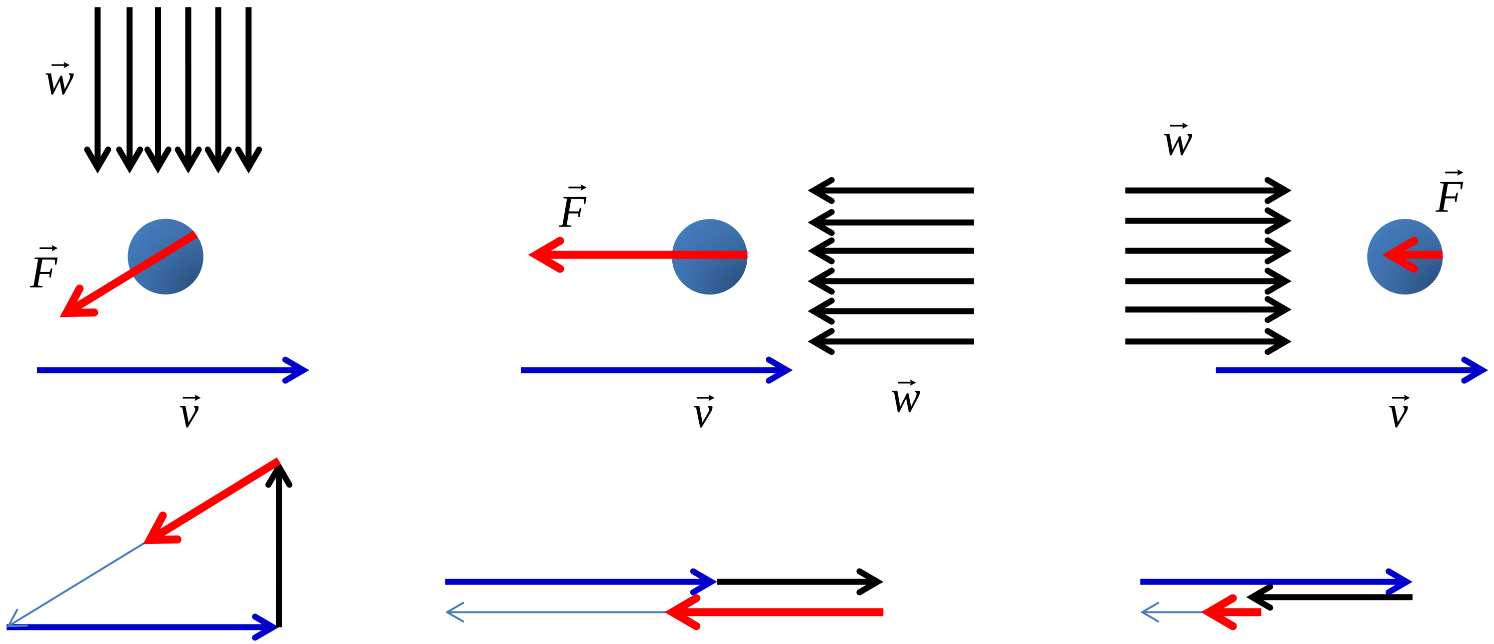
Skrå kast med luftmotstand

Vi har allerede diskutert to modeller for viskøs kraft:

lineær luftmotstand:

for små hastighet: $\vec{F} = -k_v \vec{v}$

hvis luft bever seg med hastighet $\vec{w}$ $\vec{F} = -k_v (\vec{v} - \vec{w})$



kvadratisk luftmotstand:

for større hastighet: $\vec{F} = -D|\vec{v}|\vec{v}$

hvis luft bever seg med hastighet $\vec{w}$ $\vec{F} = -D|\vec{v} - \vec{w}|(\vec{v} - \vec{w})$

eksempler hvor vi kan bruke kvadratisk luftmotstand:

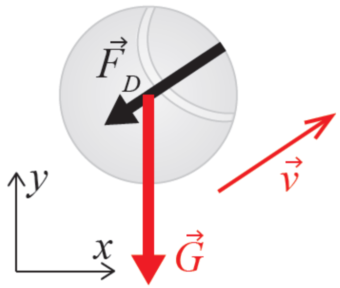
- skutt av en kanonkule
- ballkast
- bil, tog, fly
- ...

eksempler hvor vi kan bruke lineær viskøs kraft:

- fallskjermhopp
- grus i vannet
- ...

Skrå kast med luftmotstand

Fri-legeme diagram:



$$\vec{F}_{\text{net}} = \vec{F}_{\text{D}} + \vec{G} = -D|\vec{v}|\vec{v} - mg\,\hat{j}$$

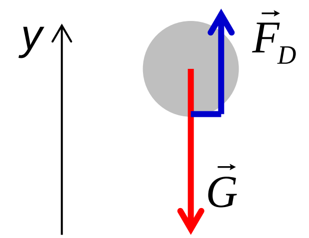
N2L: $\vec{F}_{\text{net}} = m\vec{a}$

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_{\text{net}}}{m} = -\frac{D}{m}|\vec{v}|\vec{v} - g\,\hat{j}$$

spesialfall: $\vec{r}(0) = \vec{r}_0 = h\,\hat{j}$

$\vec{v}(0) = \vec{v}_0 = \vec{0}$

endimensjonal,
ball faller ned med gravitasjon,
bremset av luftmotstanden



Luftmotstandskraften øker med hastighet til den blir like stor som gravitasjonskraften:

$$\vec{F}_{\text{net}} = -D|\vec{v}|\vec{v} - mg\,\hat{j} = 0$$

akselerasjonen blir null og
ballen oppnår terminalhastighet:

$$a_y = \frac{D}{m}v_T^2 - g = 0$$

metode for å finne luftmotstandskoeffisient:
måling av terminalhastighet

$$D = \frac{mg}{v_T^2}$$

skrått kast uten luftmotstand: $\vec{a} = -g\,\hat{j}$

komponenter: $a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = 0$ $\qquad a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = -g$

dekoblet bevegelse: a_x uavhengig av y eller v_y
a_y uavhengig av x eller v_x

skrått kast med luftmotstand: $\vec{a} = -\frac{D}{m}|\vec{v}|\vec{v} - g\,\hat{j}$ hvor $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

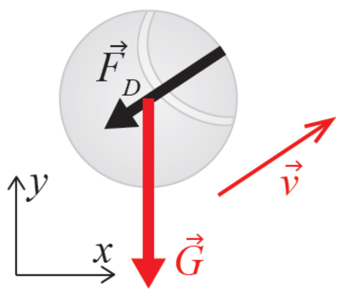
komponenter: $a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{D}{m} v_x \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ $\qquad a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{D}{m} v_y \sqrt{v_x^2 + v_y^2} - g$

koblet bevegelse: $a_x = a_x(v_x, v_y)$ $\qquad a_y = a_y(v_x, v_y)$

vi kan ikke løse bevegelsesligningen for hver komponent separat,
vi må løse bevegelsesligninger for x og y retning samtidig

det gjører vi best numerisk

Numerisk løsning for skrått kast med luftmotstand



$$\vec{F}_{\text{net}} = \vec{F}_{\text{D}} + \vec{G} = -D|\vec{v}|\vec{v} - mg\,\hat{j}$$

$$\vec{F}_{\text{net}} = m\vec{a}$$

```
Fnet = -D*norm(v(i,:))*v(i,:) - m*g*[0 1];
a = Fnet/m;
v(i+1,:) = v(i,:) + dt*a;
r(i+1,:) = r(i,:) + dt*v(i+1,:);
```

funksjon norm(A) beregner lengden til vektoren A
norm(A) = sqrt(dot(A,A))

Numerisk løsning for skrå kast med luftmotstand

```
m = 0.2; % kg
g = 9.81; % m/s^2
vT = 20.0 % m/s
D = m*g/vT/vT;
h = 20.0; % m
r0 = [0 h];
v0norm = 20.0; % m/s
alpha = 35.0*pi/180.0;
v0 = [v0norm*cos(alpha) v0norm*sin(alpha)];
time = 10.0; % s
dt = 0.001;
n = ceil(time/dt);
r = zeros(n,2);
v = zeros(n,2);
t = zeros(n,1);
% Initial conditions
r(1,:) = r0;
v(1,:) = v0;
i = 1;
```

```
% Simulation loop
while (r(i,2)>=0.0)
    Fnet = -D*norm(v(i,:))*v(i,:) - m*g*[0 1];
    a = Fnet/m;
    v(i+1,:) = v(i,:) + dt*a;
    r(i+1,:) = r(i,:) + dt*v(i+1,:);
    t(i+1) = t(i) + dt;
    i = i + 1;
end
printf("%f\n", t(i));
plot(r(1:i,1),r(1:i,2),'-r');
```

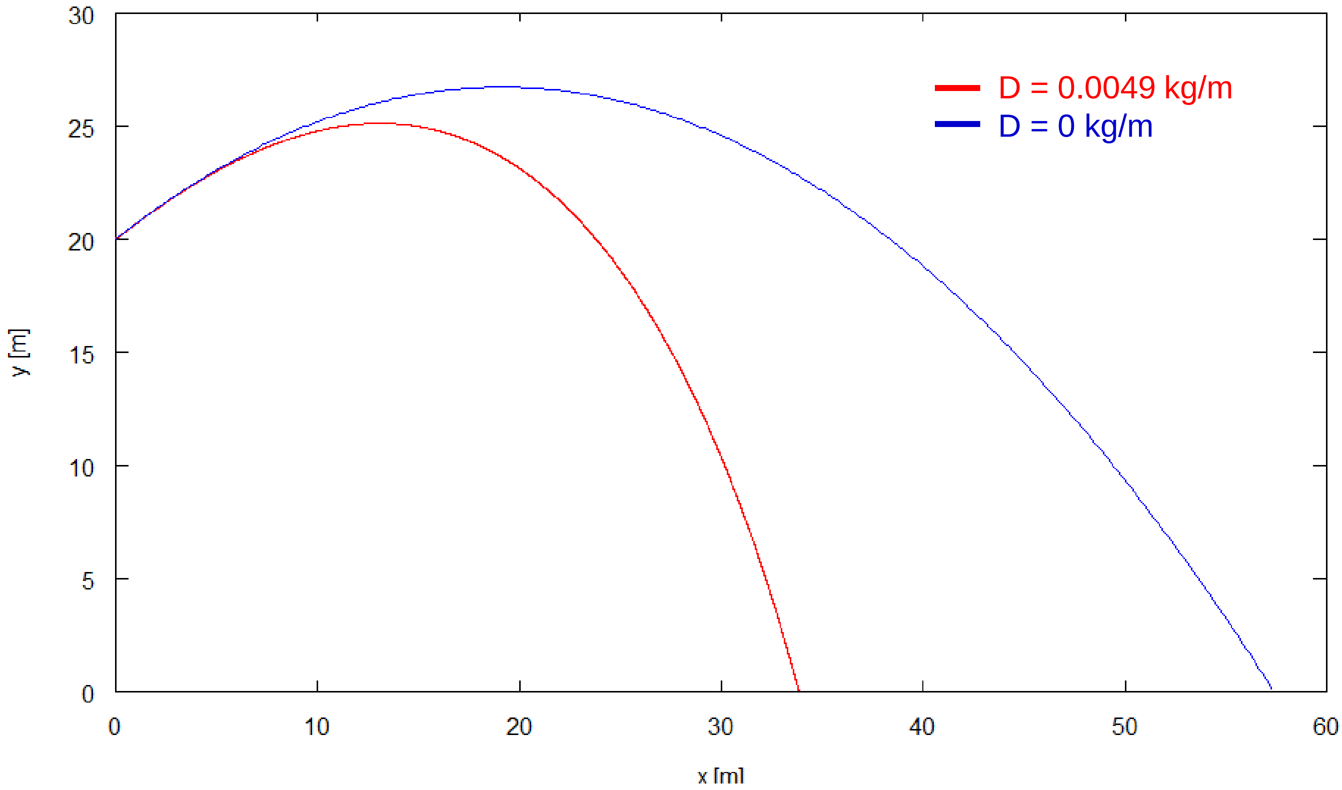
Resultat

initialbetingelser:

$$h = 20\ \mathrm{m}$$

$$v_0 = 20\ \mathrm{m/s}$$

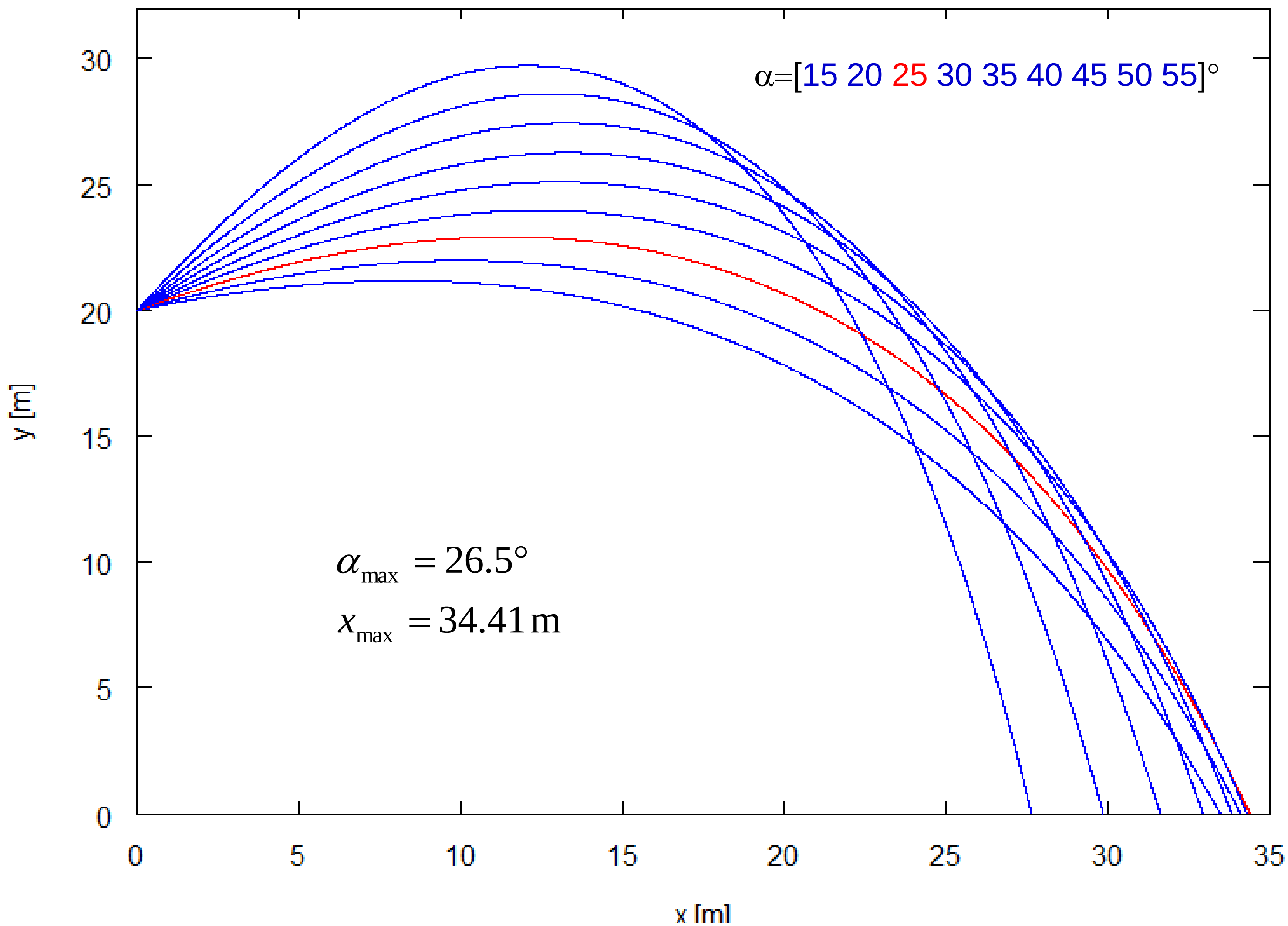
$$\alpha = 35°$$



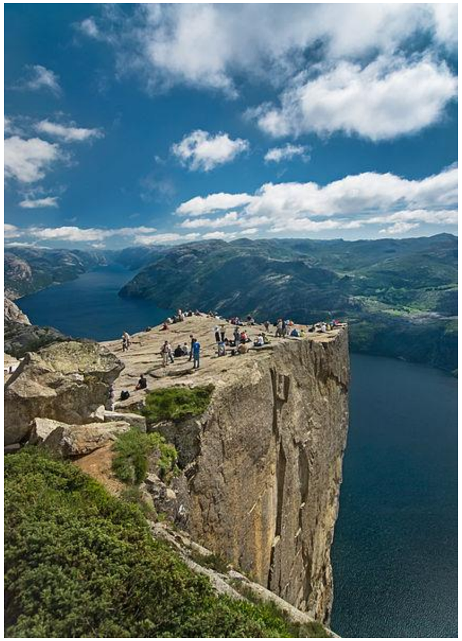
prosjektilet beveger seg ikke lenger på en parabel bane

ikke vanskelig å implementere luftmotstanden numerisk, men analytisk løsning blir meget komplisert.

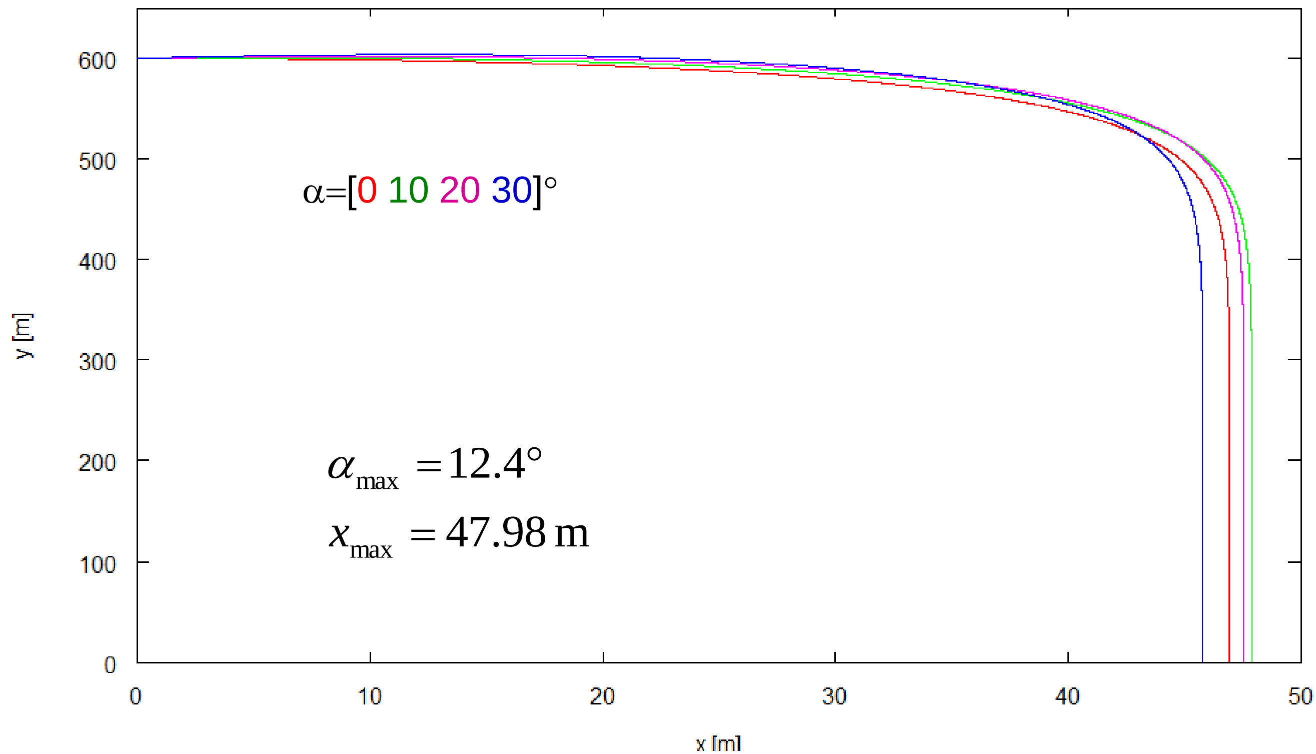
hva betyr luftmotstand for den beste vinkelen?



obs: Vi har funnet beste vinkelen for gitt initialbetingelser og parameter: h, v_0, D !



Hvilken vinkel burde jeg bruke for å kaste lengst fra Prekestolen?
(Samme initialhastighet og luftmotstand, men *h* = 600 m.)



Hvis høyden er stor må du bruke en mindre vinkel for å komme lengst.
På slutten faller ballen ned vertikal $\Rightarrow$ over en viss høyde er α_{max} konstant.
Den eneste måte å kaste lenger er å øke v_0.