Newtons lover i to og tre dimensjoner

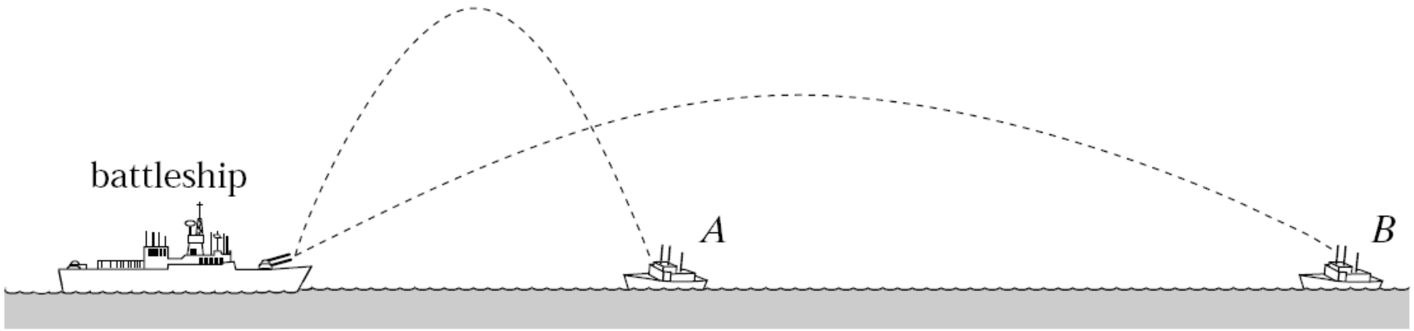
11.02.2015

Oblig 2: Det manglet tallverdier for parameterne i oppgave k)
(for å skrive et program). En ny versjon ble lagt ut i går.

Fellesinnleveringer i Devilry:

- Det er mulig å definere en gruppe.
- Skriv også tydelig på besvarelse hvem deltar i fellesinnlevering (for å være sikker at det blir registrert).

Skrått kast uten luftmotstand



akselerasjon: $\vec{a} = -g\,\hat{j}$

hastighet:

$$v_x(t) = v_0 \cos(\alpha)$$

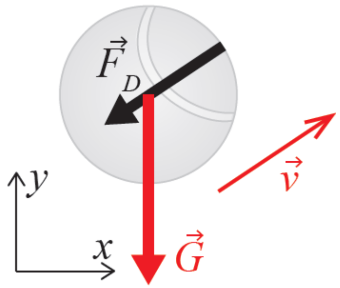
$$v_y(t) = v_0 \sin(\alpha) - gt$$

posisjon:

$$x(t) = v_0\, t \cos(\alpha)$$

$$y(t) = v_0\, t \sin(\alpha) - \frac{1}{2} g t^2$$

Skrått kast med luftmotstand

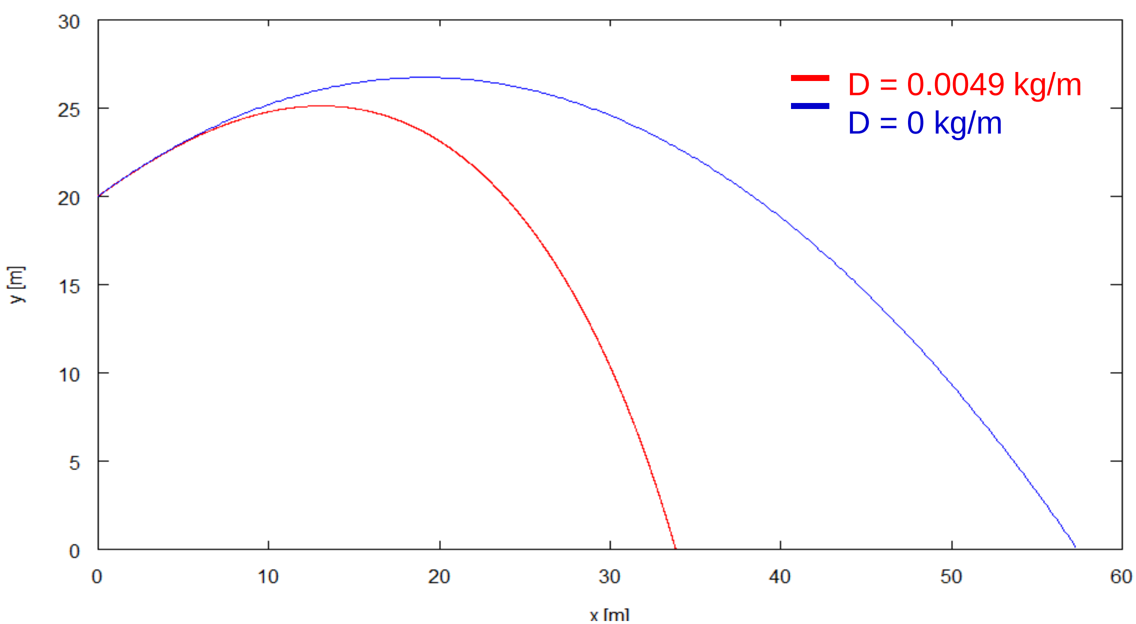


$$\vec{F}_{\text{net}} = \vec{F}_{\text{D}} + \vec{G} = -D|\vec{v}|\vec{v} - mg\,\hat{j}$$

horisontal og vertikal bevegelse ikke lenger uavhengig:

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{D}{m} v_x \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \qquad a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{D}{m} v_y \sqrt{v_x^2 + v_y^2} - g$$

numerisk løsning



initialbetingelser:

$h = 20\text{ m}$

$v_0 = 20\text{ m/s}$

$\alpha = 35°$

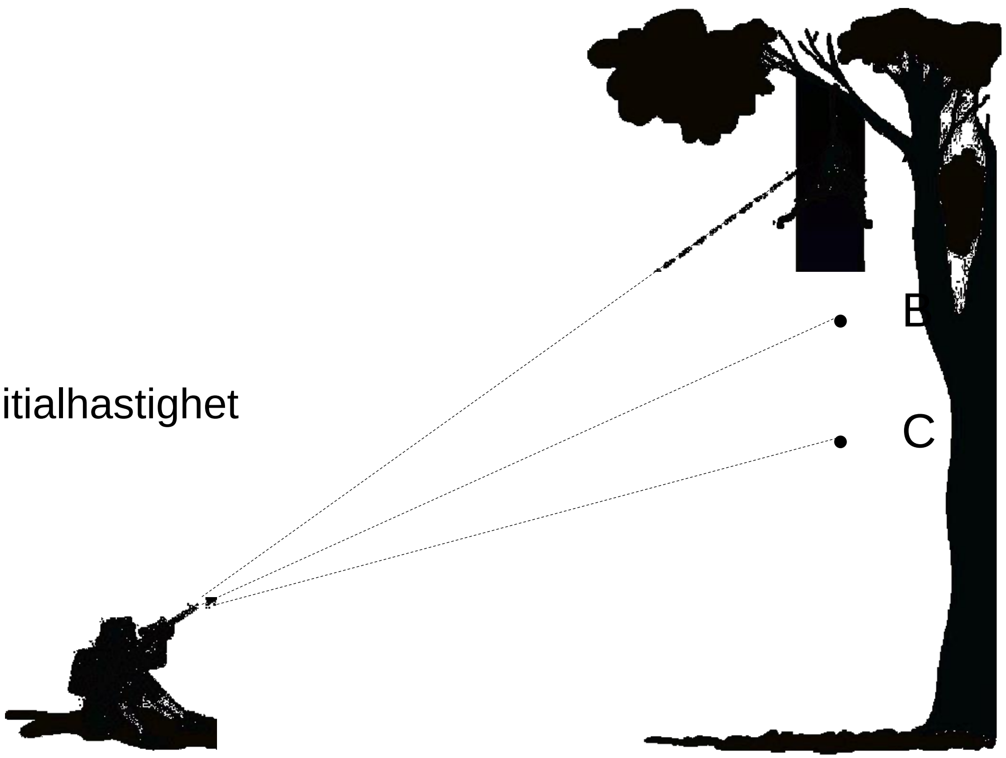
En dyrevokter skyter en bedøvelsespil på en lettskremt ape. Når apen hører skuddet slipper han taket i samme øyeblikk som pilen forlater geværet. Hvilket punkt bør vokteren sikte på for å treffe apen? (Vi ser bort fra luftmotstand.)

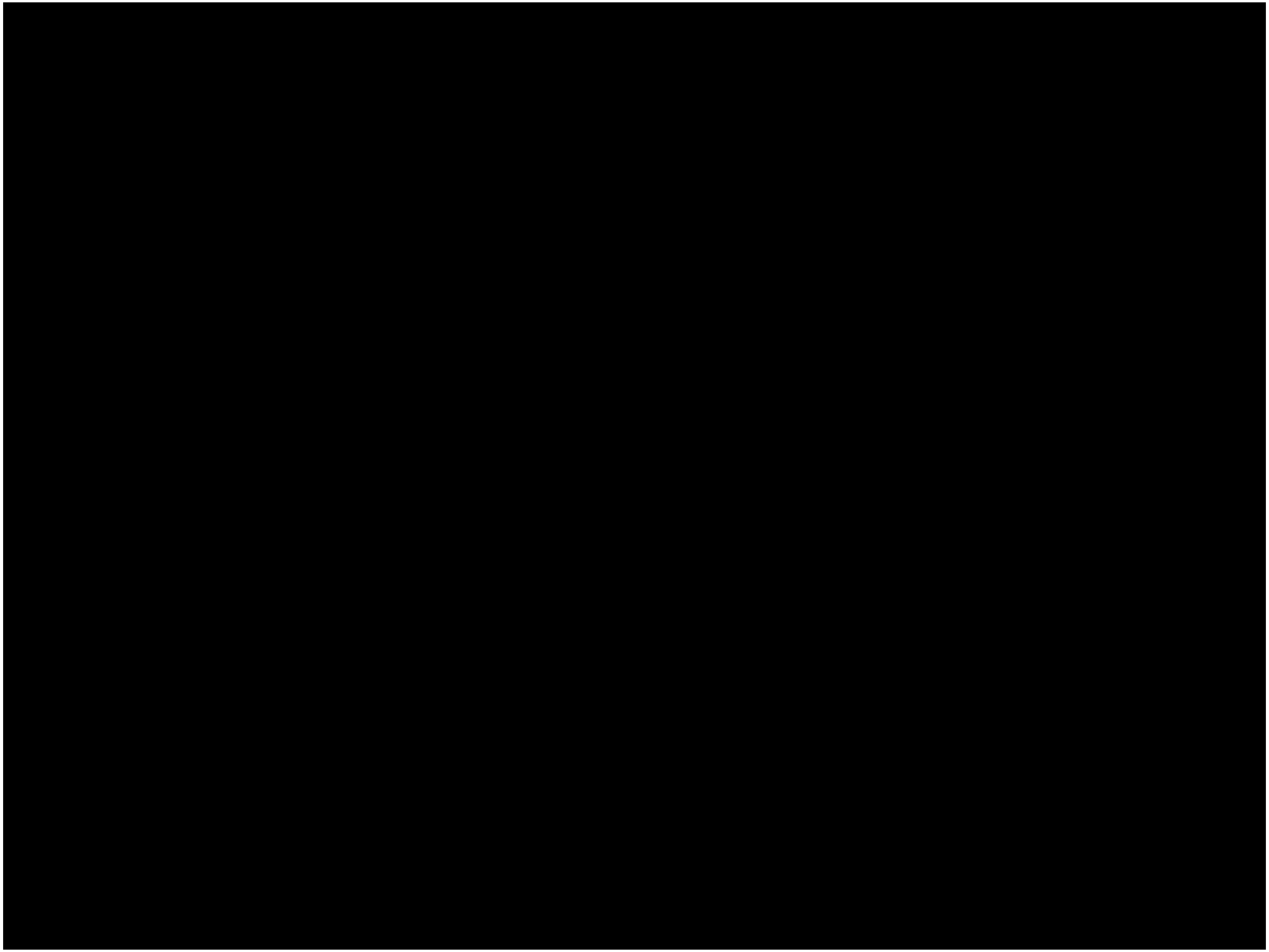
A. rett på apen $y = h$

B. lavere $y = \frac{h}{\sqrt{2}}$

C. enda lavere $y = \frac{h}{2}$

D. avhengig av pilens initialhastighet





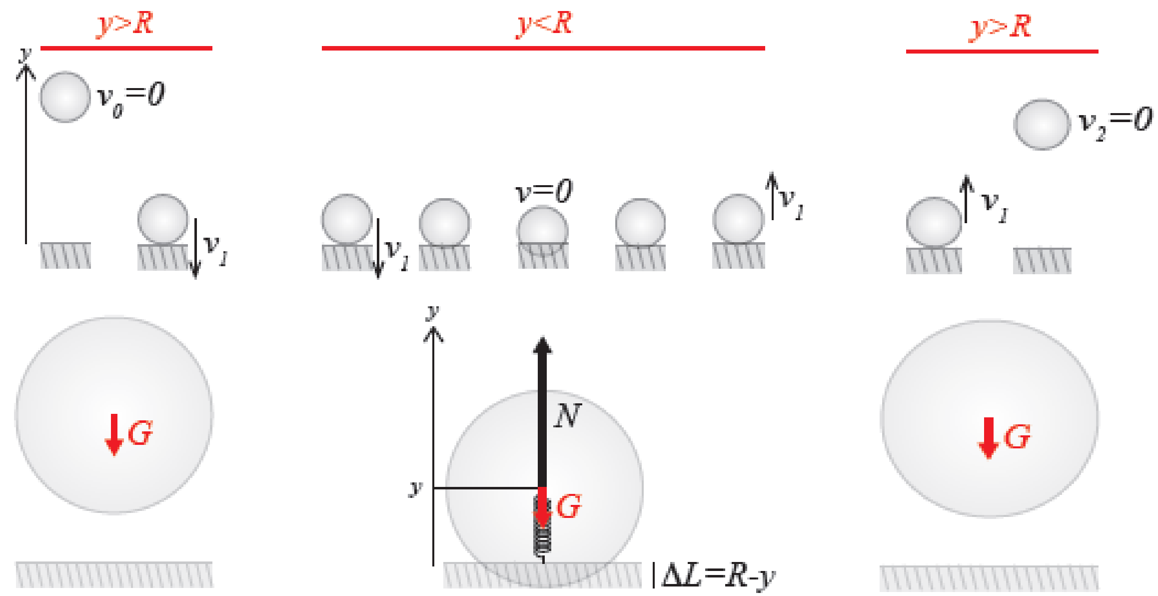
Demonstrasjon ved Harvard University http://www.youtube.com/watch?v=0jGZnMf3rPo

Skrått ballkast med luftmotstand: hva skjer etter ballen treffer på gulvet?
Kan vi beskrive bevegelsen videre?

eksempel: bordtennisball

Skrått ballkast med luftmotstand: hva skjer etter ballen treffer på gulvet?
Kan vi beskrive bevegelsen videre?

ball som spretter fra gulvet i én dimensjon.



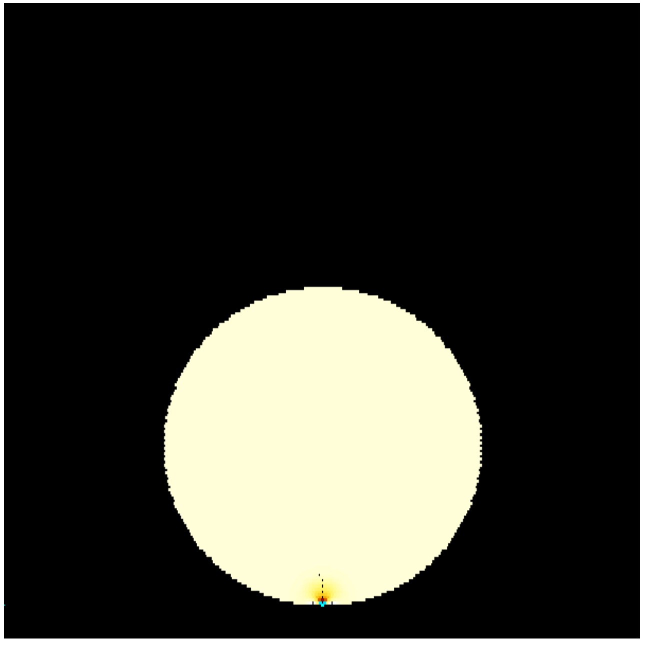
Normalkraften oppstår hvis: $y(t) < R$

Ballen deformeres
$\Rightarrow$ vi modellerer normalkraften som en fjærkraft:

$$\vec{N} = \pm k\,\Delta L\,\hat{j}$$

$$\vec{N} = \begin{cases} +k\left(R - y(t)\right)\hat{j} & y \le R \\ \vec{0} & y > R \end{cases}$$

Normalkraften virker alltid vertikal oppover uansett i hvilke retning ballen beveger seg.

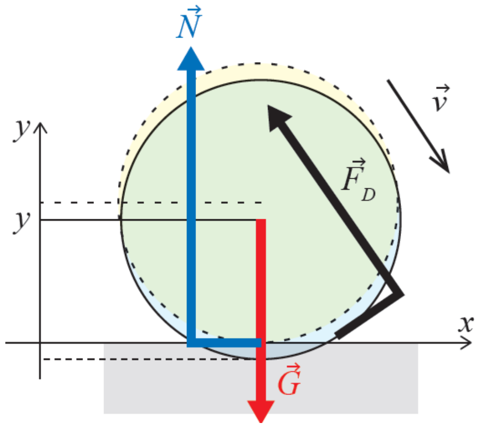


husk:
å modellere normalkraften som en lineær fjærkraft er bare en tilnærming!

krefter som oppstår når ballen (og gulvet) deformeres kan være mer komplisert.

eller enda mer komplisert

fri-legeme diagram:



kontaktkrefter:
- luftmotstand
- normalkraft

langtrekkende kraft:
- gravitasjon

alle krefter har årsak i omgivelsen og virker på systemet (=ball)

kraftmodeller:

luftmotstand: $\vec{F}_D = -D|\vec{v}|\vec{v}$

fra luften på ballen,
hastighetsavhengig,
motsatt bevegelsesretning

normalkraft: $\vec{N} = \begin{cases} +k\left(R - y(t)\right)\hat{j} & y \leq R \\ \vec{0} & y > R \end{cases}$

fra gulvet på pallen,
posisjonsavhengig,
oppover (vinkelrett på gulvet)

gravitasjon: $\vec{G} = -mg\,\hat{j}$

fra jorden på ballen
konstant,
nedover (mot jordens sentrum)

(Vi ser bort fra friksjon mellom ball og gulvet.)

luftmotstand: $\vec{F}_D = -D|\vec{v}|\vec{v}$

```
FD = - D*norm(v(i,:))*v(i,:);
```

normalkraft: $\vec{N} = \begin{cases} +k\left(R - y(t)\right)\hat{j} & y \leq R \\ \vec{0} & y > R \end{cases}$

```
if (r(i,2)<R)
    N = k*(R-r(i,2))*[0 1];
else
    N = [0 0];
end
```

gravitasjon: $\vec{G} = -mg\,\hat{j}$

```
G = -m*g*[0 1];
```

N2L: $\vec{F}_{\text{net}} = \sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{F}_D + \vec{N} + \vec{G} = m\vec{a}$

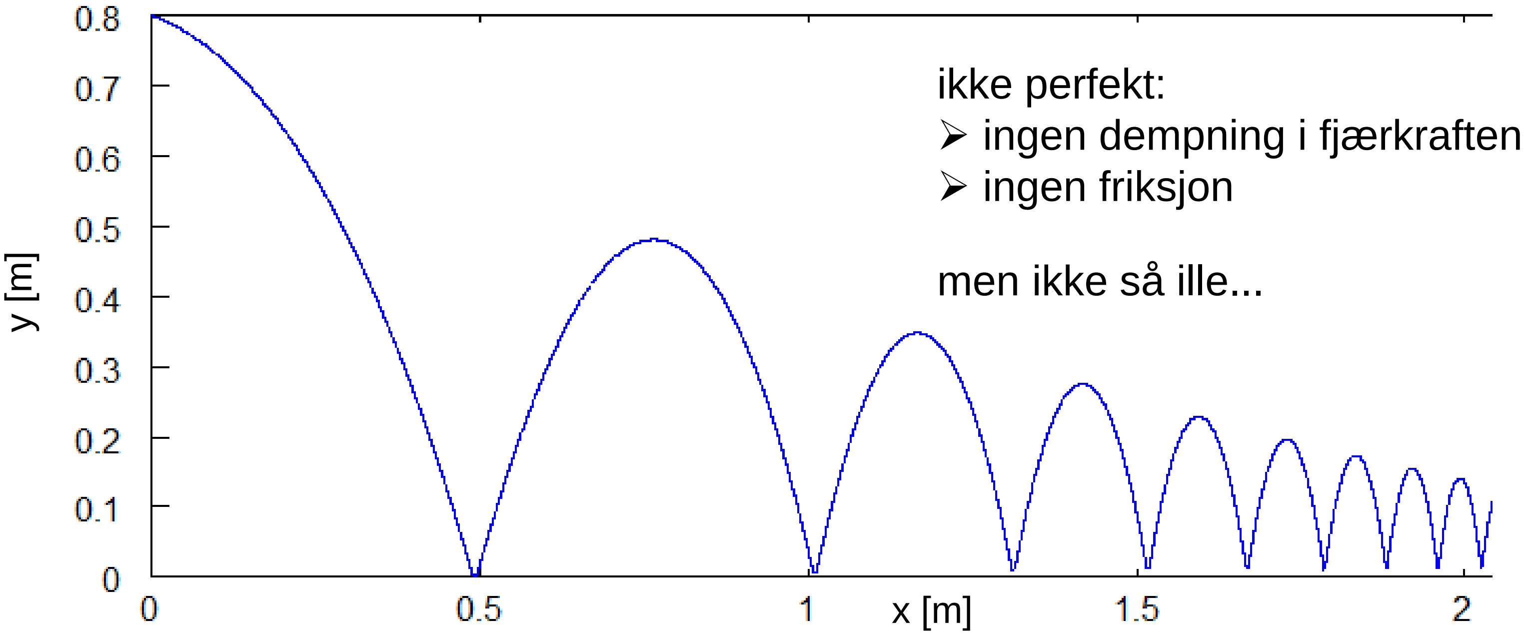
$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_{\text{net}}}{\text{m}}$$

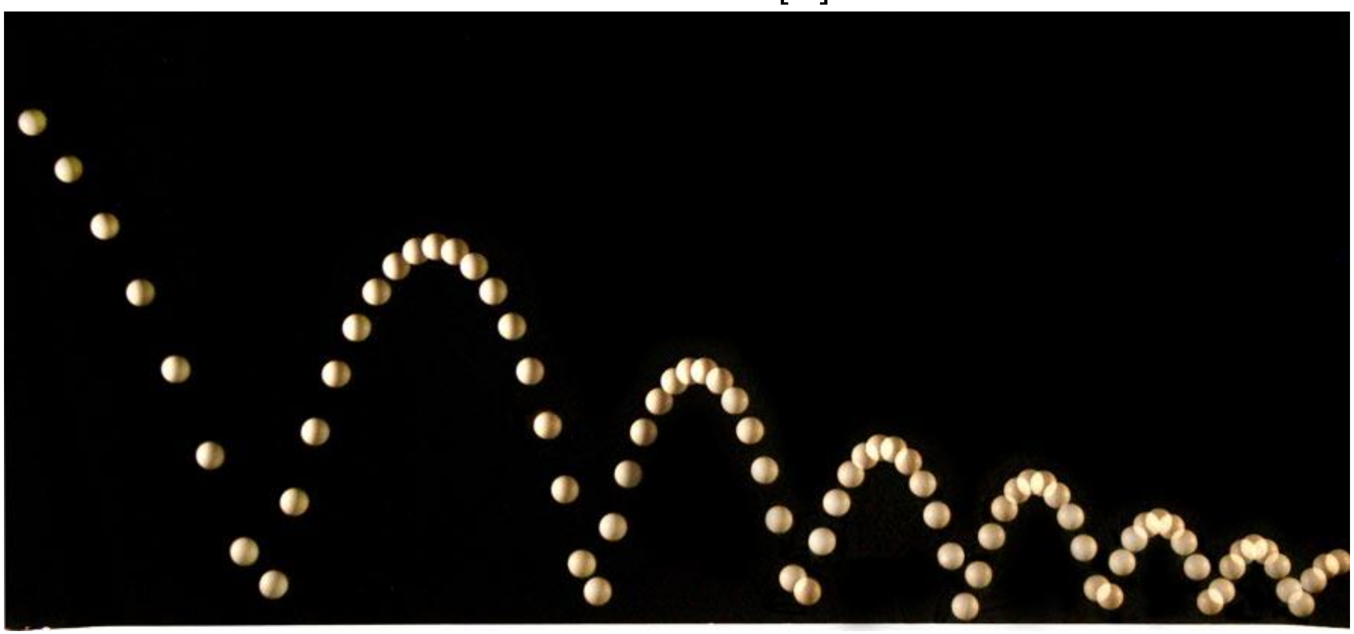
```
Fnet = N + FD + G;
a = Fnet/m;
```

Numerisk løsning:

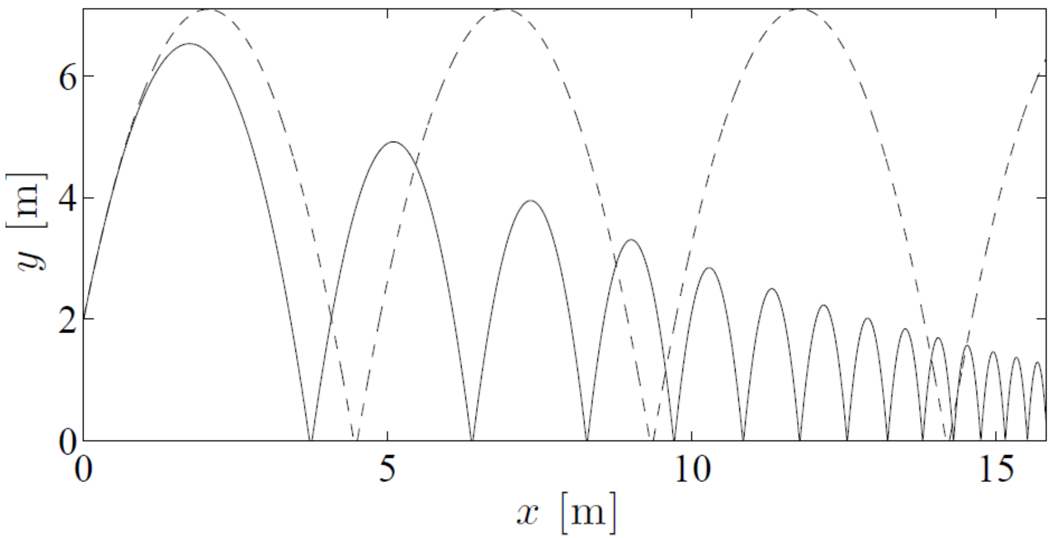
```
m = 0.2; % kg
g = 9.81; % m/s^2
vT = 20.0; % m/s
h = 2.0; % m
R = 0.1; % m
k = 1000.0; % N/m
r0 = [0 h];
v0 = [2.0 10.0]; % m/s
time = 20.0; % s
% Variables
D = m*g/vT^2;
%D = 0.0;
dt = 0.001;
n = ceil(time/dt);
r = zeros(n,2);
v = zeros(n,2);
t = zeros(n,1);
% Initial conditions
r(1,:) = r0;
v(1,:) = v0;
i = 1;
```

```
% Simulation loop
for i = 1:n-1
    if (r(i,2)<R)
        N = k*(R-r(i,2))*[0 1];
    else
        N = [0 0];
    end
    FD = - D*norm(v(i,:))*v(i,:);
    G = -m*g*[0 1];
    Fnet = N + FD + G;
    a = Fnet/m;
    v(i+1,:) = v(i,:) + dt*a;
    r(i+1,:) = r(i,:) + dt*v(i+1,:);
    t(i+1) = t(i) + dt;
end
plot(r(:,1),r(:,2));
xlabel('x [m]');
ylabel('y [m]');
```

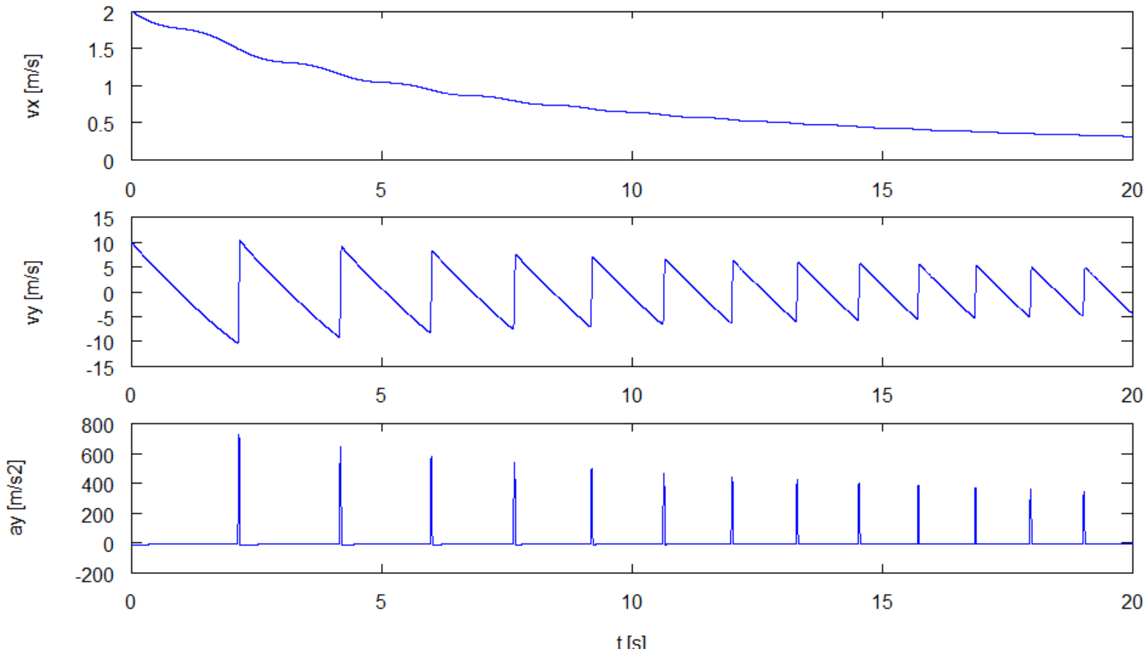

ikke perfekt:
➢ ingen dempning i fjærkraften
➢ ingen friksjon
men ikke så ille...
y [m]
x [m]
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.5
1
1.5
2



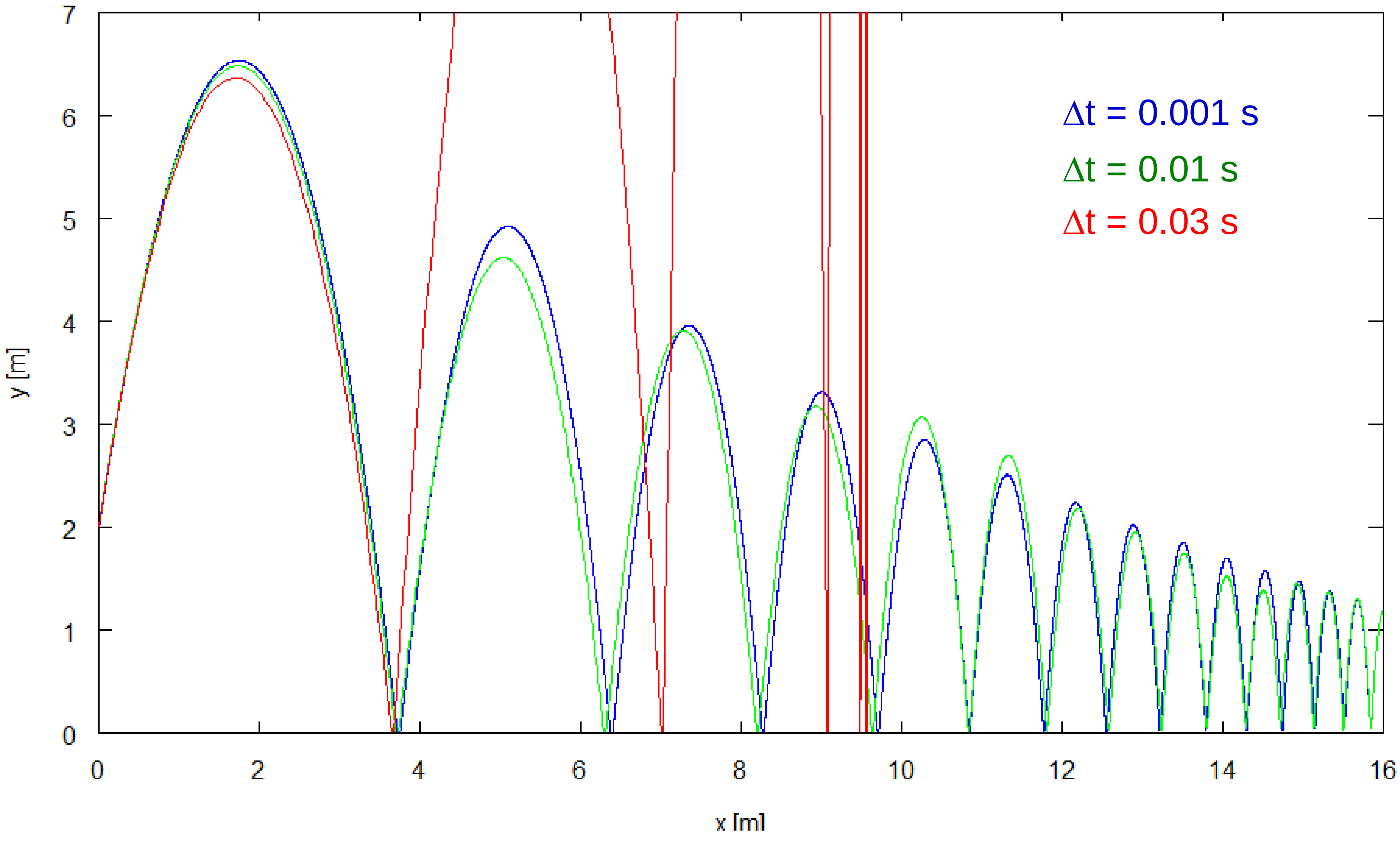
Resultat (med og uten luftmotstand)



dempet bevegelse
i x og y retning

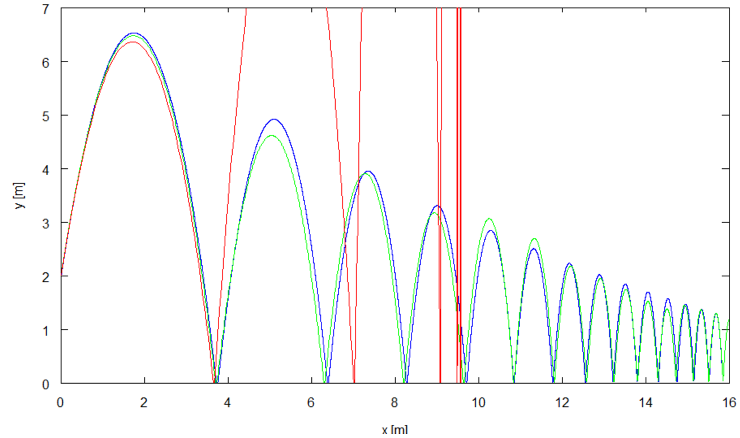


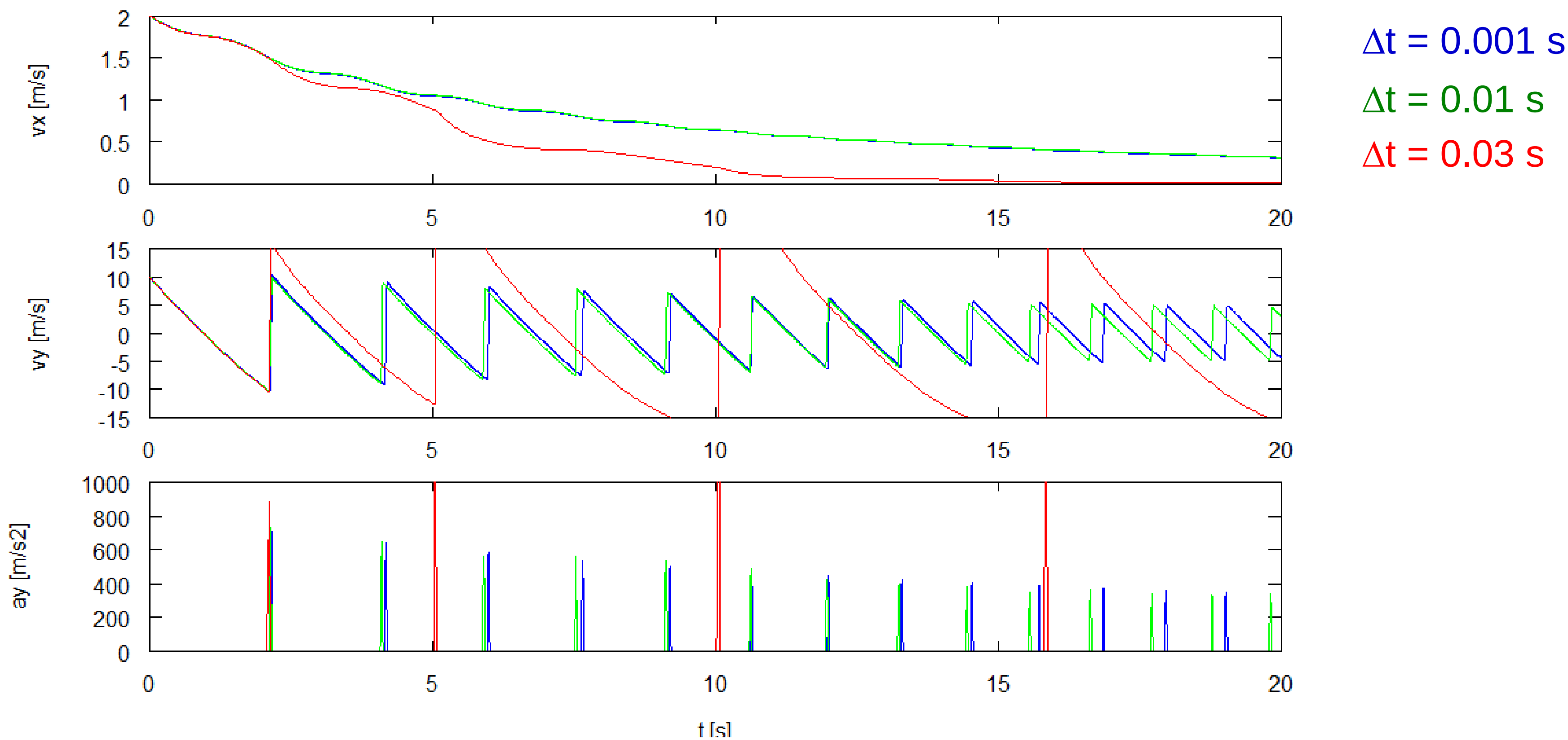
valg av tidssteg

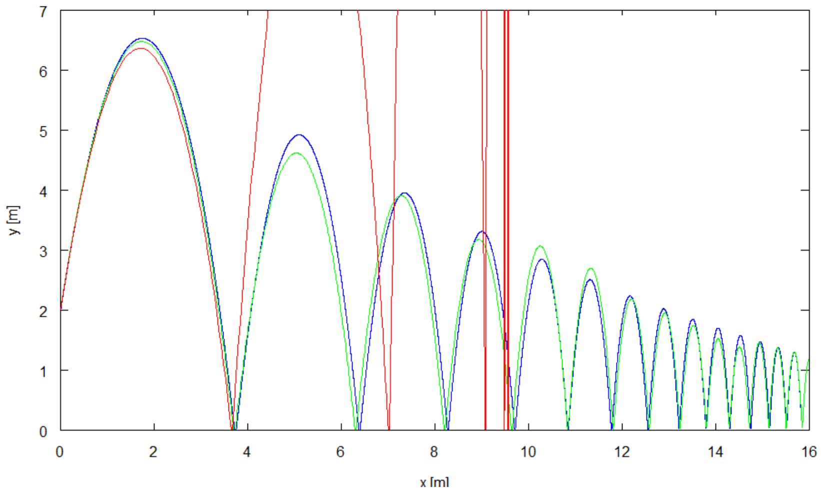


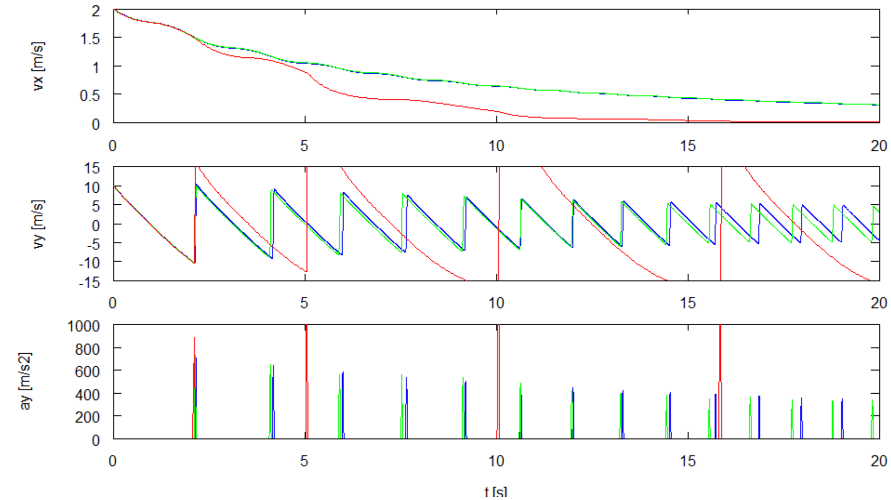
valg av tidssteg

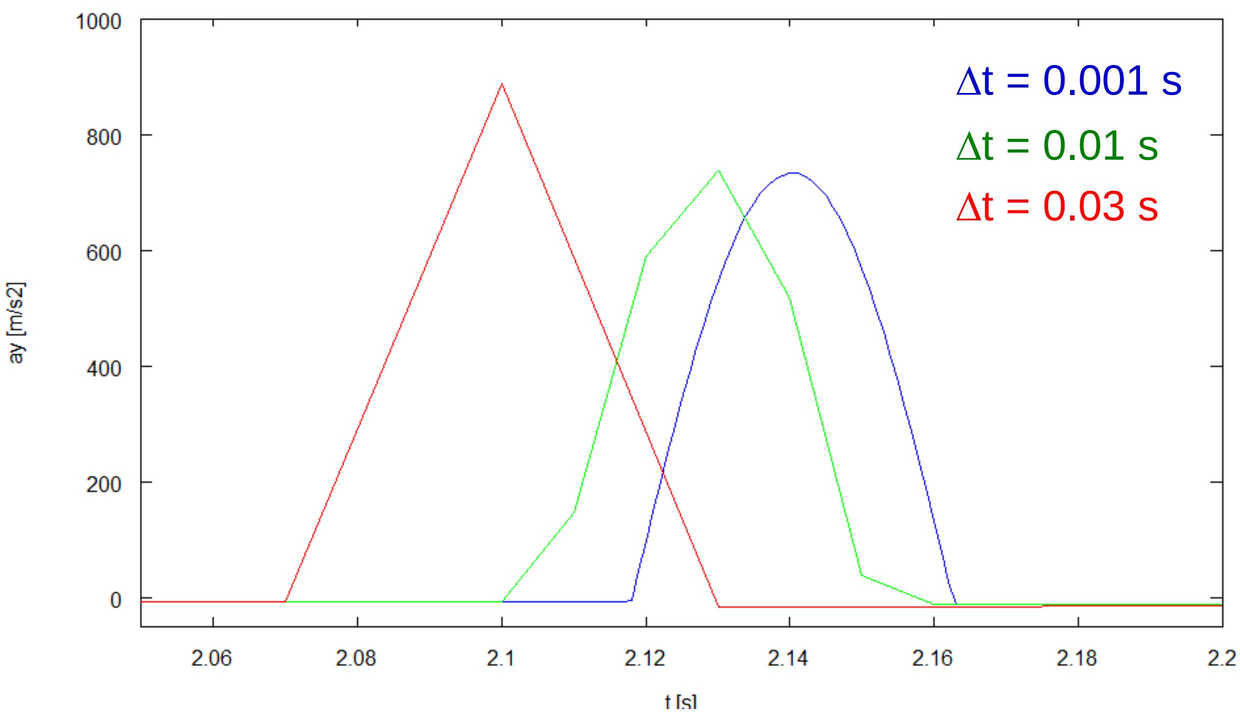
Normalkraften er stor og virker i kort tidsintervall.
Bevegelse i luft: jevnt uten store forandringer;
store forendringer mens i kontakt med bakken.











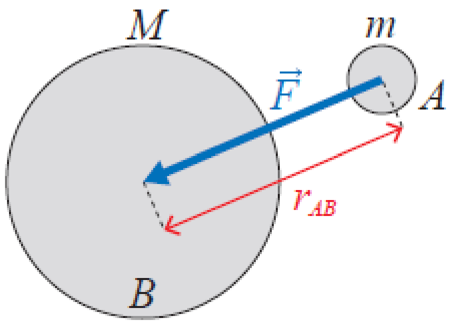
$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

for små tidssteg Δt:

$$\vec{a}(t) \approx \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

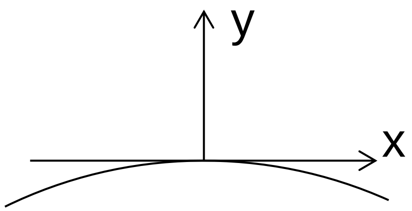
Gravitasjon

generell: $\vec{F}_{\mathrm{G}} = -\gamma \frac{mM}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} = -\gamma \frac{mM}{r^2} \hat{u}_r$



$\hat{u}_r$ enhetsvektor i radial retning

Hittil har vi sett på objekter på jordens overflate:
- *M* og *r* er konstant.
- Vi betrakter en lokal begrenset del av jordoverflaten.
  - vi neglisjerer krumning
  - kartesisk koordinatsystem



$$\vec{F} = -\gamma \frac{mM}{r^2} \hat{j} = -mg\,\hat{j} \qquad g \approx 9.81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Hvis vi ser på planetes baner eller kometer,
så må vi bruke den generelle gravitasjonsloven.

http://pingo.upb.de/ access number: 8178

En komet med masse m beveger seg gjennom vårt solsystem og er bare påvirket av gravitasjonskraften fra solen. Hvilket utsagn er riktig?

A. Kometen beveger seg på en sirkelbane rundt solen.
B. Kometen beger seg på en elliptisk bane med solen i et brennpunkt.
C. Gravitasjonskraften avbøyer banen når kometen er nær solen, men for uendelig lang tid blir avstand mellom kometen og solen uendelig stor.
D. Kometen beveger seg enten på en lukket bane eller forlater solsystemet avhengig av massen til kometen.
E. Kometen beveger seg enten på en lukket bane eller forlater solsystemet avhengig av sin hastighet.

Eksempel

En komet med masse m beveger seg gjennom solsystemet.

Identifiser:

Hvilket objekt beveger seg?

Hvordan måler vi? Definer et koordinatsystem.

Finn initialbetingelsene.

system: komet
omgivelse: solen, planetene, andre stjerner
(vi kan neglisjere planetene og andre stjerner – hvorfor?)

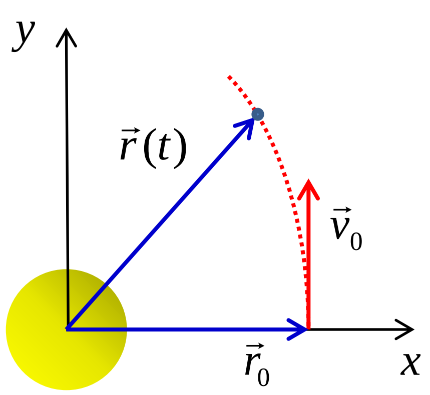
initialbetingelser: $\vec{r}(0) = \vec{r}_0$

$\vec{v}(0) = \vec{v}_0$

koordinatsystem:

- vi velger origo i solens sentrum
- vektorer $\vec{r}_0$ og $\vec{v}_0$ definerer en plan flate
- kometen beveger seg i denne flaten
- problemet er todimensjonal
- vi velger x og y aksen slik at $\vec{r}_0 = r_0\,\hat{i}$

$\vec{v}_0 = v_0\,\hat{j}$

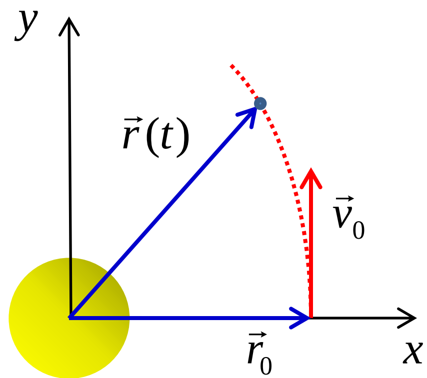


Modeller:

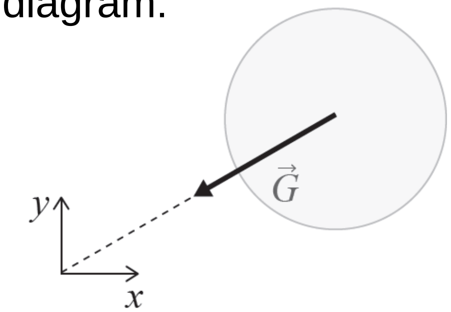
Finn kreftene som påvirker objektet.

Beskriv kreftene med en modell.

Bruk Newtons andre lov for å finne akselerasjonen.



fri-legeme diagram:



Gravitasjonen virker fra solen (omgivelse) på kometen (systemet). Kraften er rettet mot solen, som befinner seg i origo.

Kometen er ikke i kontakt med noe, den eneste kraften er gravitasjon.

$$\vec{F}_\mathrm{G} = -\gamma \frac{mM}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} = -\gamma \frac{mM}{r^2}\hat{u}_r$$

solmasse: $M = 1.99 \cdot 10^{30}\ \mathrm{kg}$

gravitasjonskonstant: $\gamma = 6.673 \cdot 10^{-11} \dfrac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2}$

N2L: $$\vec{F}_\mathrm{net} = \vec{F}_\mathrm{G} = -\gamma \frac{mM}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} = m\vec{a}$$

$$\vec{a} = -\gamma \frac{M}{r^3}\vec{r}$$

akselerasjon uavhengig av kometenes masse

Masse til planetene er mye mindre enn solmassen, men kraft kan være stor dersom kometen passerer i nærhet av en planet. Andre stjerne er langt borte, slik at deres gravitasjon er neglisjerbart.

vi løser numerisk: $\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\gamma \frac{M}{r^3}\vec{r}$

Løs:

Løs bevegelsesligningen

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{a}\left(\vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt}, t\right)$$

med initialbetingelser (analytisk eller numerisk).

Finn hastighet og posisjon.

```
% Physical values
M = 1.99e30; % kg
G = 6.673e-11; % m^3 kg^-1 s^-2
% Initial conditions
R = 1.5e11; % m
r0 = R*[1 0];
v0mag = 3e4; % m/s
v0 = v0mag*[0.0 1.0];
% Numerical values
time = 60*60*24*365*1.5; % s
dt = 100; % s
% Setup Simulation
n = ceil(time/dt)
r = zeros(n,2);
v = zeros(n,2);
t = zeros(n,1);
r(1,:) = r0;
v(1,:) = v0;
GM = G*M;
```

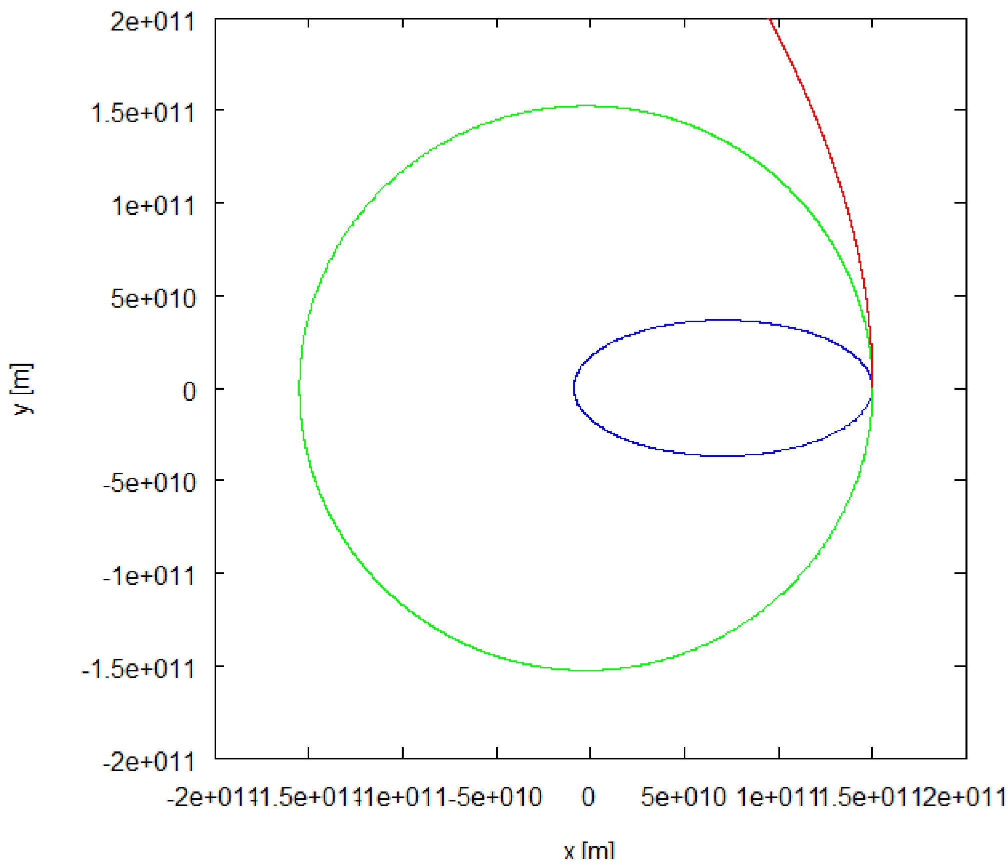
```
% Calculation loop
for i = 1:n-1
    rr = norm(r(i,:));
    a = -GM*r(i,:)/rr^3;
    v(i+1,:) = v(i,:) + dt*a;
    r(i+1,:) = r(i,:) + dt*v(i+1,:);
    t(i+1) = t(i) + dt;
end
plot(r(:,1),r(:,2),':');
xlabel('x [m]');
ylabel('y [m]');
```

Analyser:

Er resultatene for $\vec{r}(t)$ og $\vec{v}(t)$ fornuftig?

Bruk resultatene for a svare på spørsmålet.

Interpreter resultatene.



$\vec{r}_0 = x_0 \, \hat{i}$

$x_0 = 1.5 \cdot 10^{11}$ m

$\vec{v}_0 = v_0 \, \hat{j}$

$v_0 = 1.0 \cdot 10^4$ m/s

$v_0 = 3.0 \cdot 10^4$ m/s

$v_0 = 4.5 \cdot 10^4$ m/s

for små hastigheter:

- kometen beveger seg på en elliptisk bane med solen i et brennpunkt

for en spesifikk mellomstor hastighet:

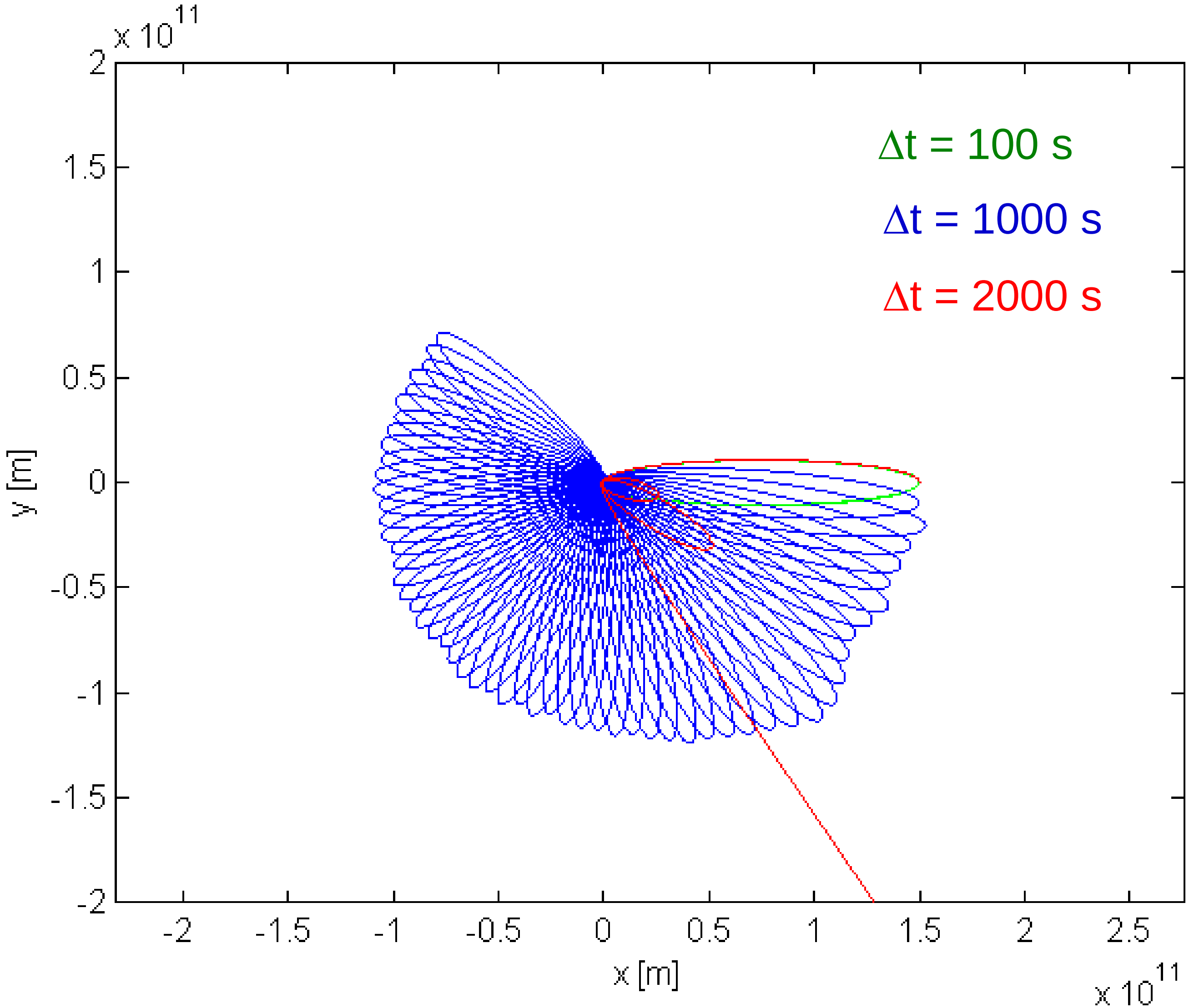
- kometen beveger seg på en sirkelbane rundt solen

for store hastigheter:

- kometen blir avbøyet men forlater solsystemet

viktig å velge små tidssteg:
T = 1.5 a
Δt = 100 s

Effekt av for stor tidssteg



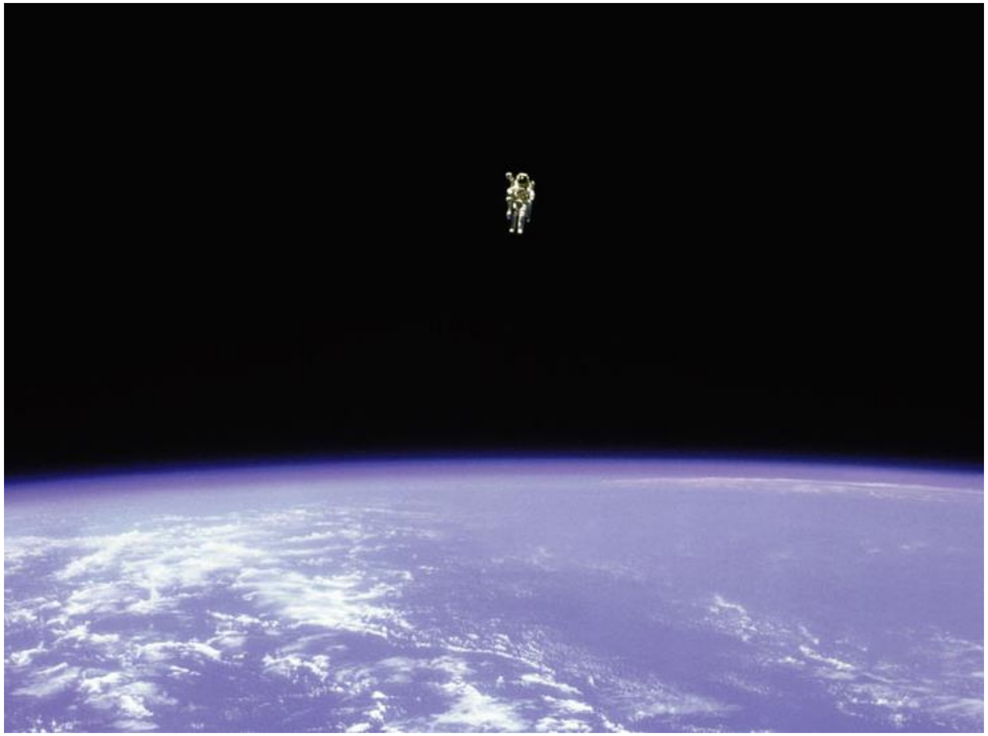
$$\vec{r}_0 = x_0\ \hat{i}$$

$$x_0 = 1.5 \cdot 10^{11}\ \text{m}$$

$$\vec{v}_0 = v_0\ \hat{j}$$

$$v_0 = 3 \cdot 10^{3}\ \text{m/s}$$

http://pingo.upb.de/ access number: 8178

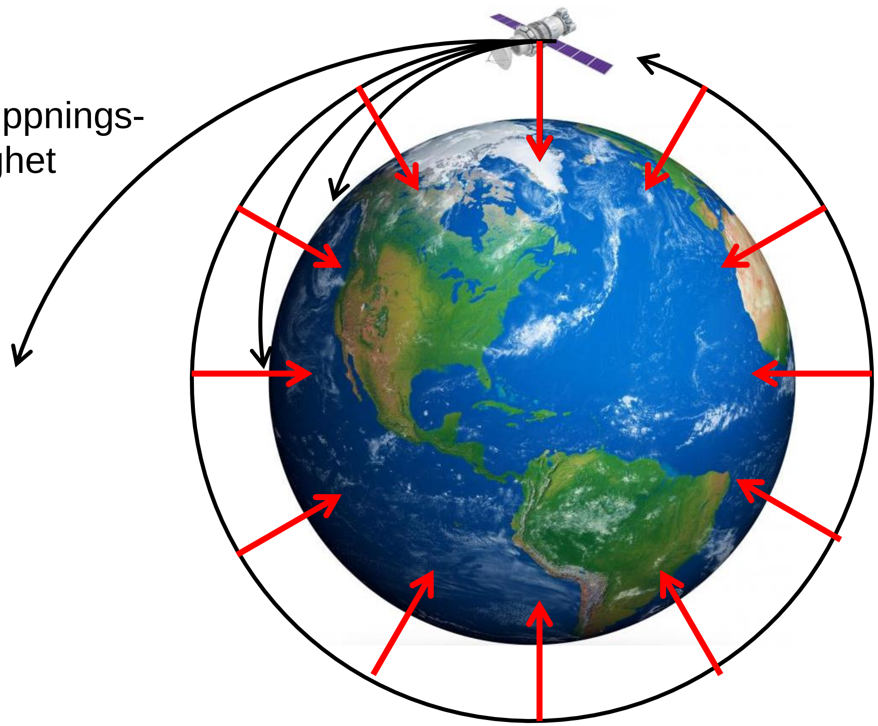


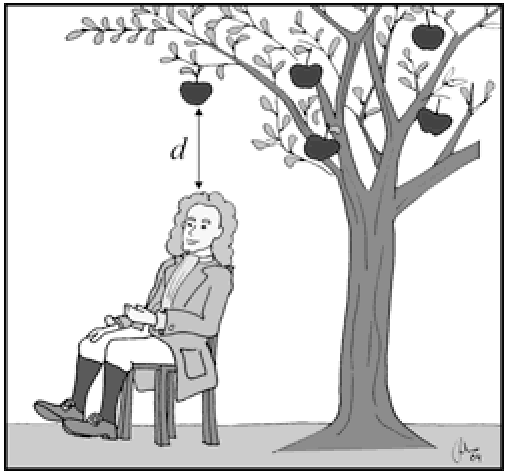
En astronaut er på romvandring utenfor romfartøyet sitt.
Hvilket utsagn er riktig?

A. Nettokraften på astronauten er null; han er vektløs.
B. Gravitasjonskraft fra jorden gir ham akselerasjon mot jordens sentrum.
C. Sentrifugalkraften kompenserer gravitasjon; han føler seg vektløs.
D. Hvis livlinen ryker er han fortapt og han driver bort i det uendelige.

”å falle rundt jorden”

unnslippnings-
hastighet





på samme mote som
eple som faller fra treet.

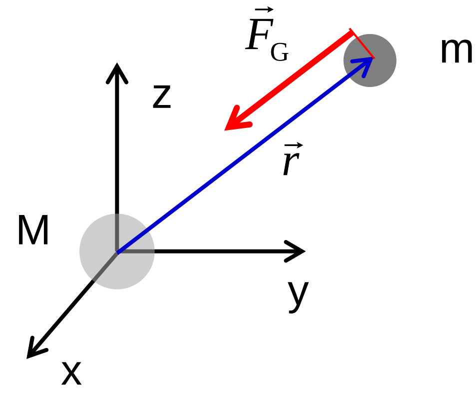
Satellitter, månen, astronauter, ...
faller rundt jorden
påvirket av gravitasjonskraften

eneste forskjell:
tangensialhastighet

Sentralkraft

gravitasjon: $\vec{F}_{\mathrm{G}} = -\gamma \frac{mM}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} = -\gamma \frac{mM}{r^2}\hat{u}_r$

kraft fra masse M på masse m
rettet mot sentrum av masse M $\Rightarrow$ negativ tegn
kraft fra m på M $\Rightarrow$ positiv tegn

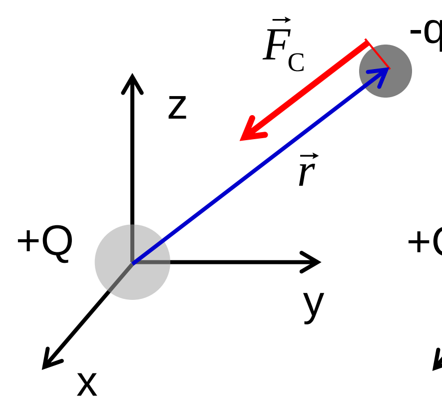


Coulombkraft: $\vec{F}_{\mathrm{C}} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{u}_r$

sentralkraft: rettet mot
(eller fra) en fast punkt

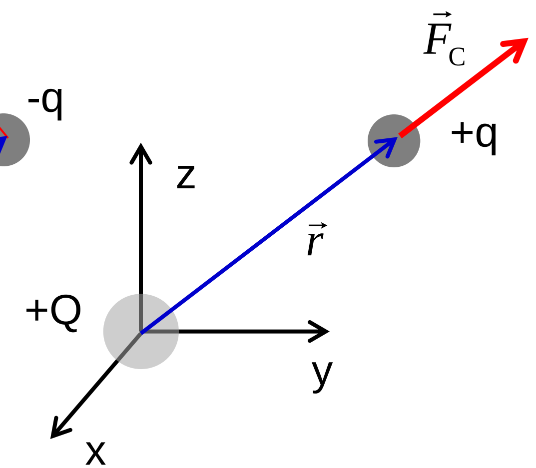
både gravitasjon og Coulomb
kraft er sentralkrefter som
skalerer med r^2.

$$\vec{F} = \frac{C}{r^2}\hat{u}_r$$



tiltrekkende kraft
hvis q_1 og q_2 har
forskjellig fortegn

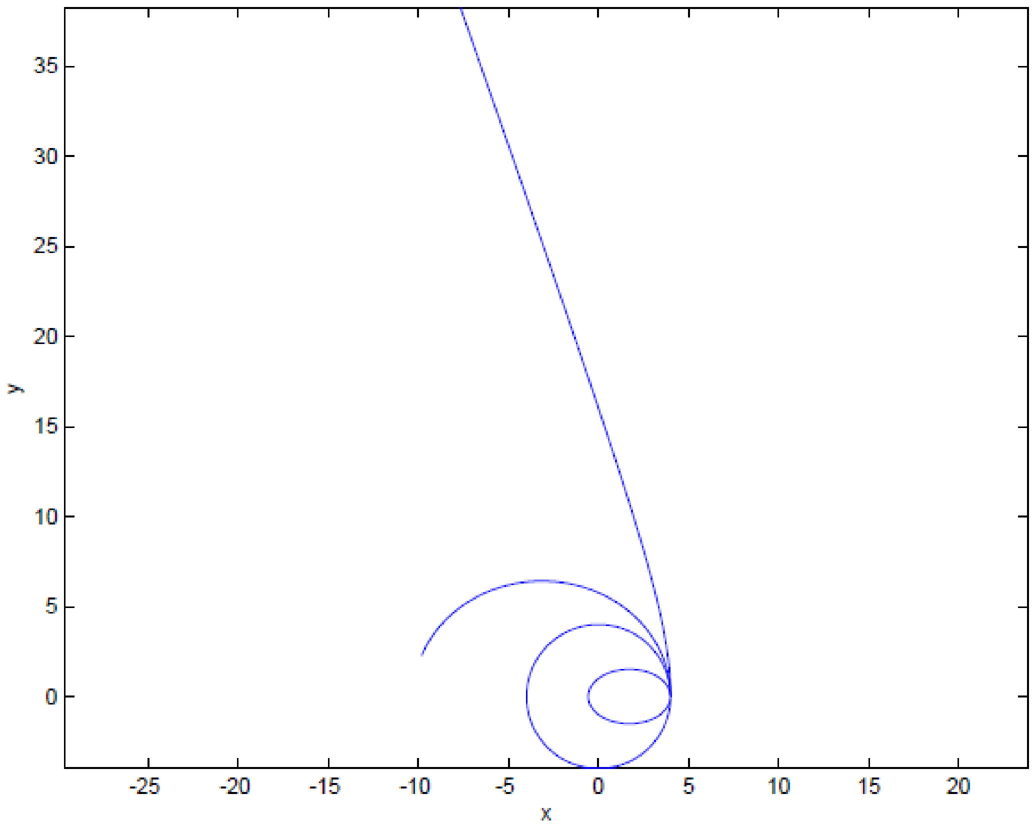
$C < 0$



frastøttende kraft
hvis q_1 og q_2 har
det samme fortegn

$C > 0$

Tiltrekkende sentralkraft



initialbetingelser:

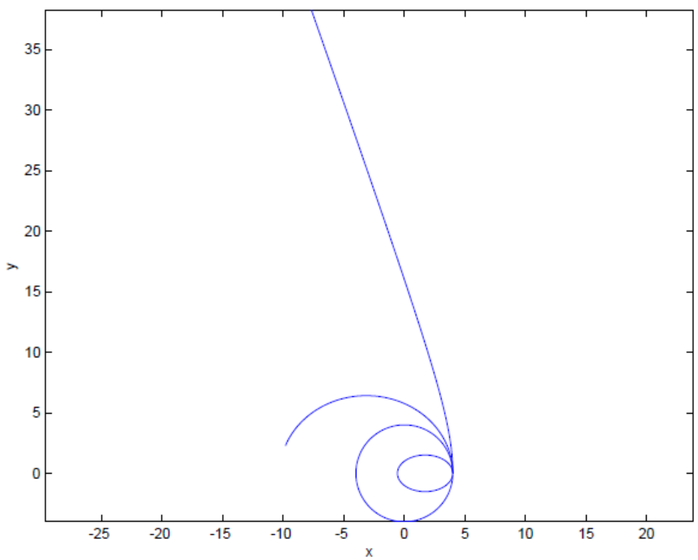
$$\vec{r}_0 = 4\,\hat{i}$$

$$\vec{v}_0 = \begin{cases} 0.25\,\hat{j} \\ 0.5\,\hat{j} \\ 0.6\,\hat{j} \\ 1.0\,\hat{j} \end{cases}$$

små initialhastighet $\Rightarrow$ lukket elliptisk bane
stor initialhastighet $\Rightarrow$ objekt fjerner seg mot uendelig

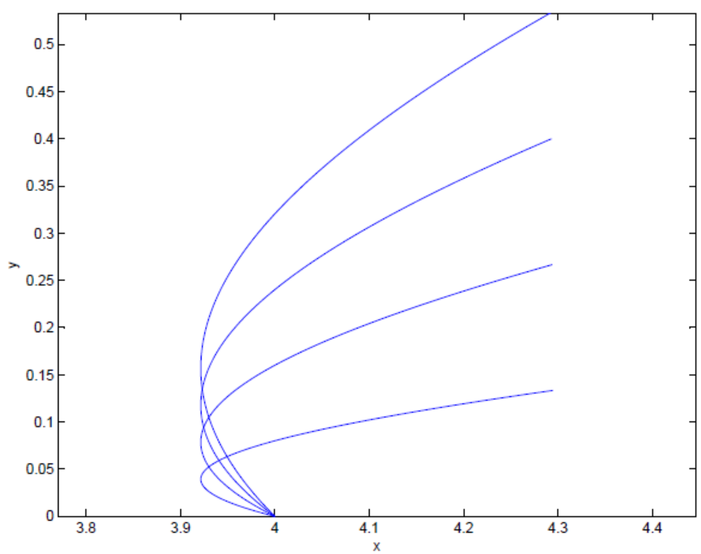
C < 0: tiltrekkende kraft

```
% Physics
C = -1.0;
m = 1.0;
time = 50.0;
dt = 0.001;
for v0y=[0.25 0.5 0.6 1.0]
    v0 = [0.0 v0y];
    r0 = [4.0 0.0];
    % Numerical
    n = round(time/dt);
    r = zeros(n,2);
    v = zeros(n,2);
    t = zeros(n,1);
    r(1,:) = r0;
    v(1,:) = v0;
    % Calculation loop
    for i=1:n-1
        rr3 = norm(r(i,:))^3;
        F = C*r(i,:)/rr3;
        a = F/m;
        v(i+1,:) = v(i,:) + a*dt;
        r(i+1,:) = r(i,:) + v(i+1,:)*dt;
        t(i+1) = t(i) + dt;
    end
    % Plot
```



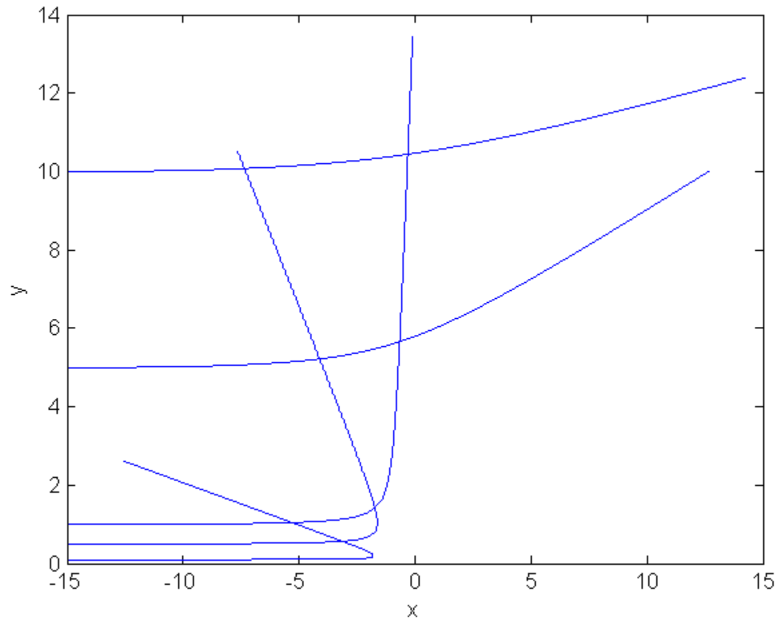
C > 0: frastøttende

```
% Physics
C = 1.0;
m = 1.0;
time = 5.0;
dt = 0.001;
for v0y=[0.025 0.05 0.075 0.1]
    v0 = [-0.1 v0y];
    r0 = [4.0 0.0];
    % Numerical
    n = round(time/dt);
    r = zeros(n,2);
    v = zeros(n,2);
    t = zeros(n,1);
    r(1,:) = r0;
    v(1,:) = v0;
    % Calculation loop
    for i=1:n-1
        rr3 = norm(r(i,:))^3;
        F = C*r(i,:)/rr3;
        a = F/m;
        v(i+1,:) = v(i,:) + a*dt;
        r(i+1,:) = r(i,:) + v(i+1,:)*dt;
        t(i+1) = t(i) + dt;
    end
    % Plot
```



Frastøttende sentralkraft

```
clear all;
clf;
C = 1.0;
m = 1.0;
time = 30.0;
dt = 0.001;
vr0y = [0.1 0.5 1.0 5.0 10.0];
for r0y = vr0y
    v0 = [1.0 0.0];
    r0 = [-15.0 r0y];
    n = ceil(time/dt);
    r = zeros(n,2);
    v = zeros(n,2);
    t = zeros(n,1);
    r(1,:) = r0;
    v(1,:) = v0;
    for i = 1:n-1
        rr3 = norm(r(i,:))^3;
        F = C*r(i,:)/rr3;
        a = F/m;
        v(i+1,:) = v(i,:) + a*dt;
        r(i+1,:) = r(i,:) + v(i+1,:)*dt;
        t(i+1) = t(i) + dt;
    end
    plot(r(:,1),r(:,2))
    hold on
end
xlabel('x')
ylabel('y')
hold off
```



Eksempel: Rutherford spredning

spredning av α partikler mot gull atomer
$\Rightarrow$ små, tung kjerne i et stort, "tomt" atom