Betinget bevegelse

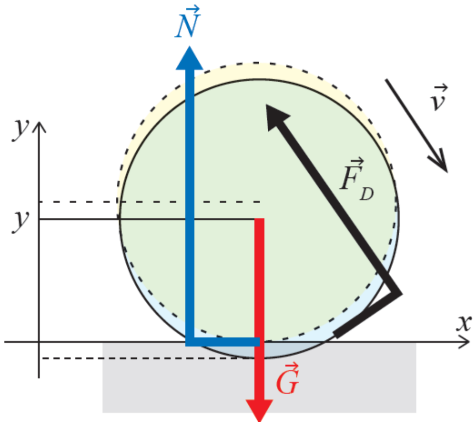
16.02.2015

Papirinnleveringer: hentes på ekspedisjon etter rettelsen

Elektronisk innlevering: tilbakemelding via devilry

Fellesinnleveringer: nokk med ett eksemplar

Repetisjon: ball som spretter



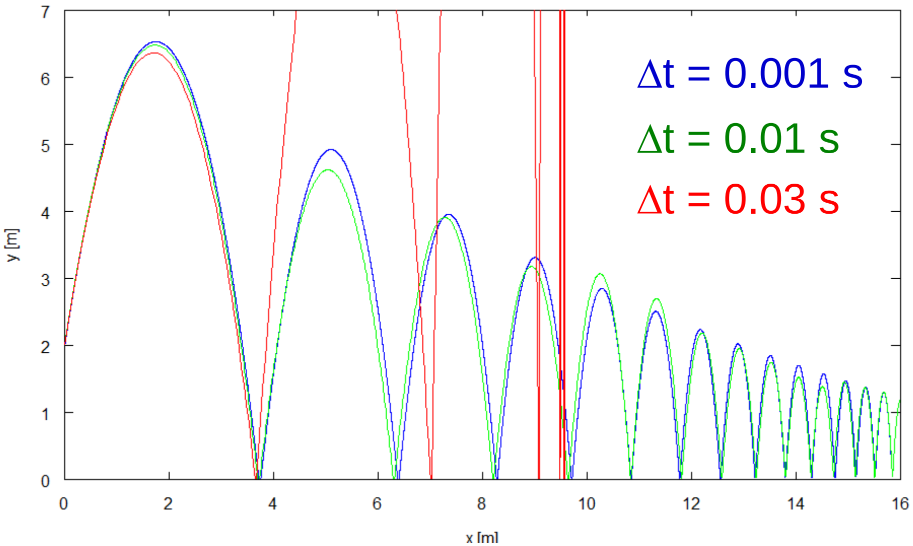
luftmotstand: $\vec{F}_D = -D|\vec{v}|\vec{v}$

normalkraft: $\vec{N} = \begin{cases} +k\left(R - y(t)\right)\hat{j} & y \le R \\ \vec{0} & y > R \end{cases}$

gravitasjon: $\vec{G} = -mg\,\hat{j}$

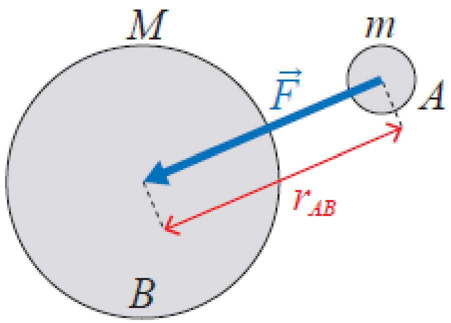
numerisk beregning:

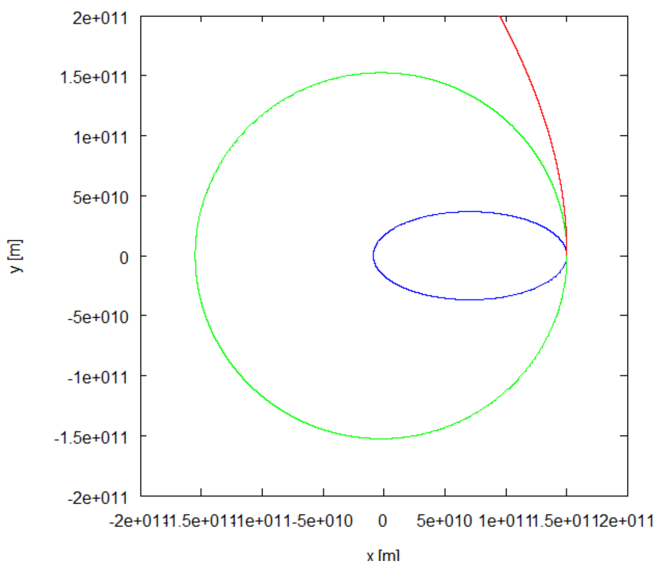
hensiktsmessig valg av tidssteg Δt



Repetisjon: gravitasjonsloven

$$\vec{F}_{\mathrm{G}} = -\gamma \frac{mM}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} = -\gamma \frac{mM}{r^2}\hat{u}_r$$





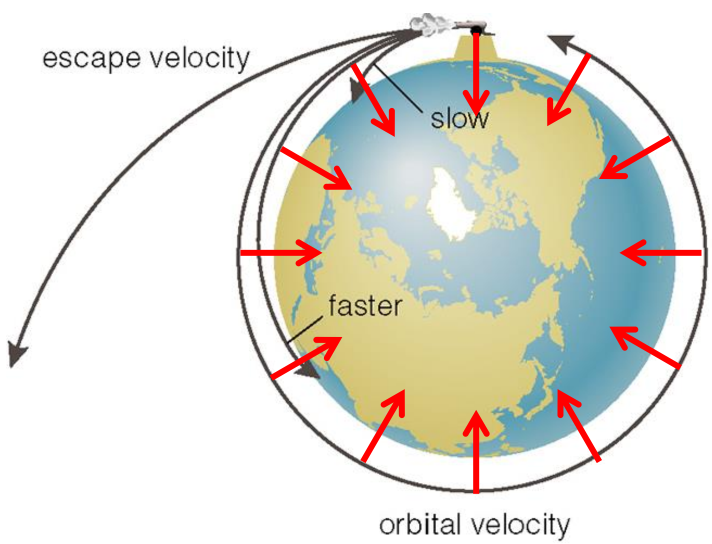
bane avhengig av initialbetingelser

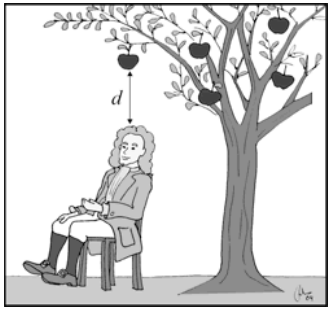
$v_0 = 1.0 \cdot 10^4$ m/s

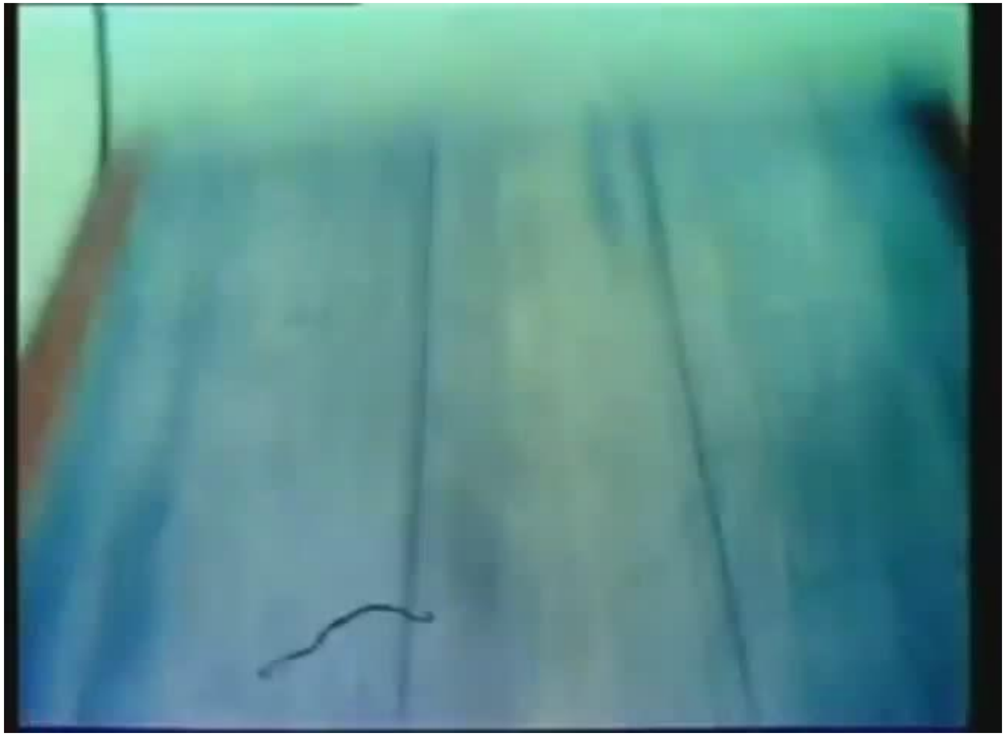
$v_0 = 3.0 \cdot 10^4$ m/s

$v_0 = 4.5 \cdot 10^4$ m/s

”å falle rundt jorden”







fri bevegelse

bevegelsen bestemmes av kreftene og initialbetingelser

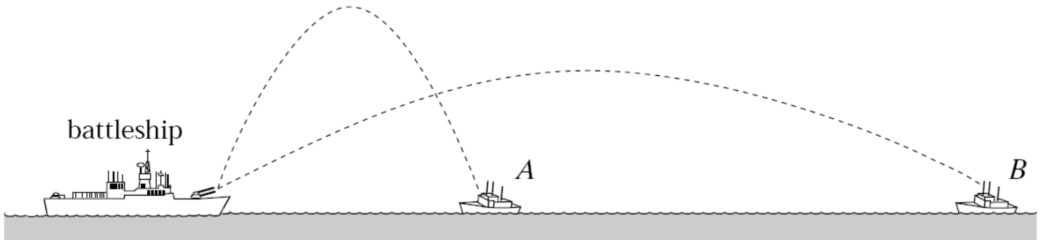
samme initialbetingelser
$\Rightarrow$ samme bevegelse på samme bane

forskjellige initialbetingelser
$\Rightarrow$ forskjellige baner

betinget bevegelse

banen er gitt

kreftene og initialbetingelser bestemmer hvordan objektet beveger seg på denne banen



fri bevegelse

bevegelsen bestemmes av kreftene og initialbetingelser

forskjellige initialbetingelser
$\Rightarrow$ forskjellige bane

betinget bevegelse

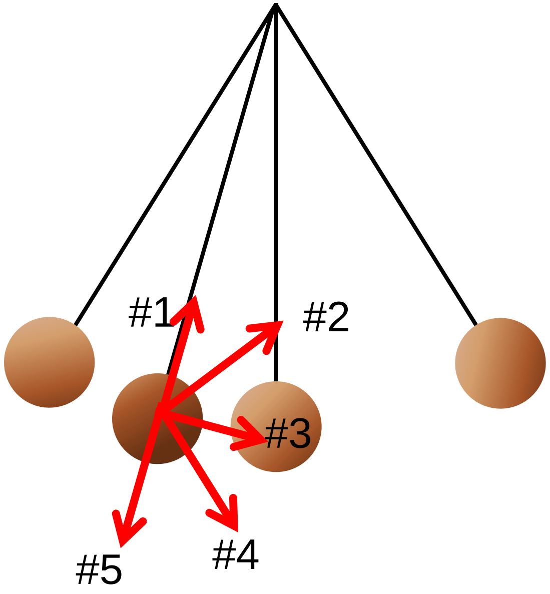
banen er gitt

kreftene og initialbetingelser bestemmer hvordan objektet beveger seg på denne banen

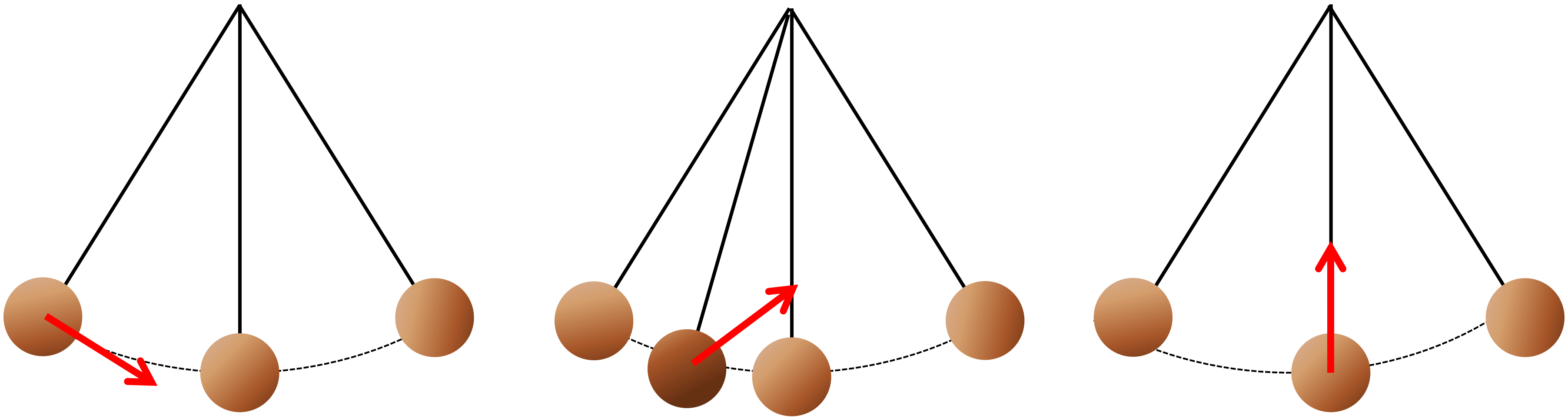
http://pingo.upb.de/ access number: 8178

Pendelen svinger fra venstre til høyre og er halvveis ned.
Hvilken pil angir retningen på akselerasjonen til pendelloddet?

1. pil #1
2. pil #2
3. pil #3
4. pil #4
5. pil #5



Betinget bevegelse: banen til loddet er gitt



i høyeste punkt:

- ingen fart
- bare tangensial akselerasjon
- farten øker

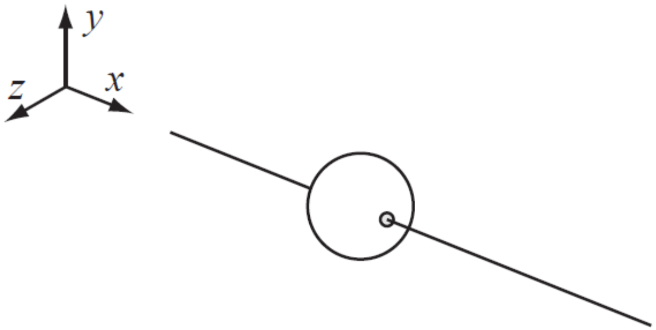
i mellom:

- farten øker fremdeles
- retningen endrer seg også
- både tangensial og sentripetal akselerasjon

i laveste punkt:

- fart maksimal
- bare sentripetal akselerasjon
- retningsendring

Lineær betinget bevegelse



Perlen kan ikke bevege seg utenfor snoren.

Snoren gir en betingelse for bevegelsen til perlen.

$\Rightarrow$ betinget bevegelse

Vi velger et koordinatsystem:

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{i} + 0\,\hat{j} + 0\,\hat{k}$$

Perlen beveger seg langs x aksen.

betinget bevegelse
$\Rightarrow$ bevegelse langs en bane

Posisjon til legeme
$\Rightarrow$ hvor langt har legemet kommet langs banen ?
$\Rightarrow$ vi måler avstand $s(t)$ langs banen

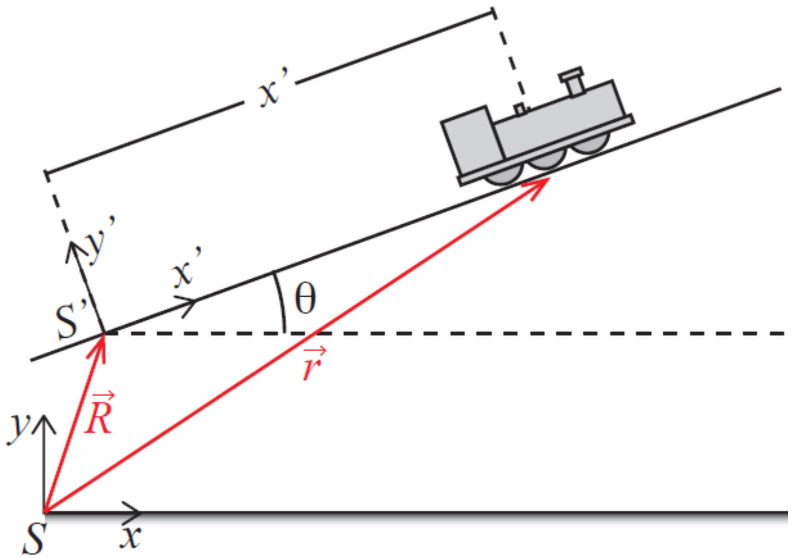
her er det enkelt: $s(t) = x(t)$

hastighet:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\,\hat{i} = \frac{ds}{dt}\,\hat{i}$$

generell for betinget bevegelser:

bane: $\vec{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{s})$
posisjon langs banen: $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{t})$



posisjon til toget i system S: $\vec{r}(t) = \vec{R} + \hat{u}\, s(t)$

enhetsvektor i bevegelsesretning:

$$\hat{u} = \cos(\theta)\,\hat{i} + \sin(\theta)\,\hat{j}$$

bane til toget i system S: $\vec{r}(s) = \vec{R} + \hat{u}\, s$

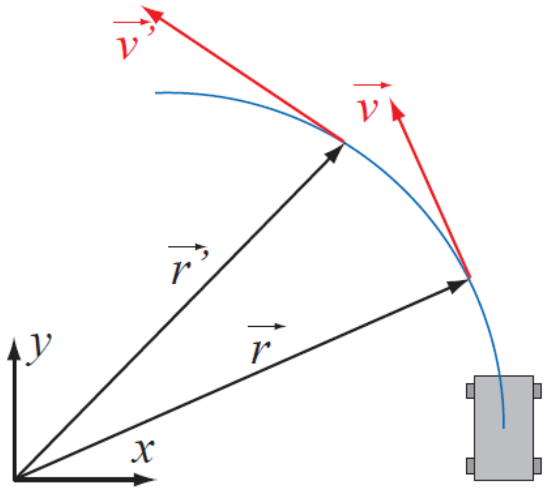
posisjon langs banen: $s(t) = x'(t)$

hastighet: $$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{R} + \hat{u}\, s(t)\right) = \hat{u}\,\frac{ds}{dt}$$

fart: $$v(t) = \left|\vec{v}(t)\right| = \frac{ds}{dt}$$

$\dfrac{ds}{dt}$ måler hastigheten langs banen

En bil kjører rund en sving



posisjonsvektor: $\vec{r}(t)$

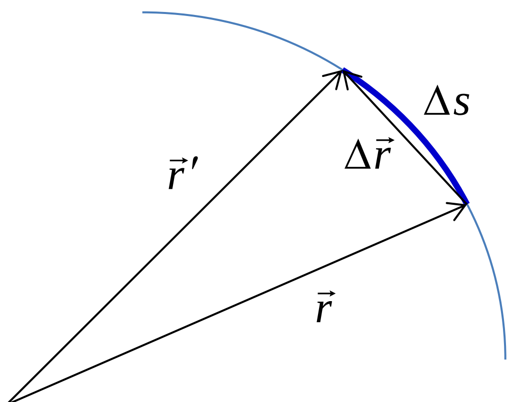
kjørelengde langs banen: $s(t)$

vi parametriserer banen med kjørelengden: $\vec{r}(s)$

hastighet er tangential langs veien: $\vec{v}(t) = v(t)\,\hat{u}_T(t)$

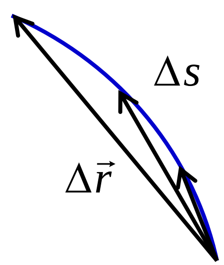
tangensialvektor: $\hat{u}_T = \hat{u}_T\big(s(t)\big)$
er avhengig av hvor på banen bilen er
og dermed også tidsavhengig.

vi kan måle farten langs banen: $v(t) = |\vec{v}(t)| = \dfrac{ds}{dt}$



for små intervaller er kjørelengde
og forflyttning det samme: $\Delta s \approx |\Delta\vec{r}|$
og forflyttningsvektor peker i tangensial retning.

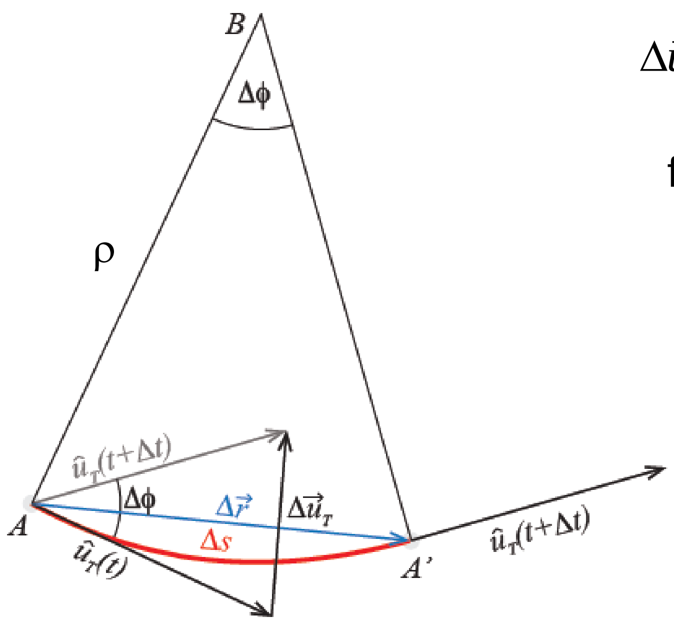
$$\frac{d\vec{r}}{ds} \approx \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s} = \hat{u}_T\big(s(t)\big)$$



$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \hat{u}_T\, v(t)$$

hastighet: $\vec{v}(t) = v(t)\,\hat{u}_T(t) = \frac{ds}{dt}\hat{u}_T(t)$

akselerasjon: $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\big(v(t)\,\hat{u}_T(t)\big) = \hat{u}_T(t)\frac{dv}{dt} + v(t)\frac{d\hat{u}_T}{dt}$ to komponenter



$$\Delta\vec{u}_T = \hat{u}_T(t+\Delta t) - \hat{u}_T(t)$$

for små intervaller: $\left|\Delta\vec{u}_T\right| \approx \left|\Delta\varphi\,\hat{u}_T(t)\right| = \Delta\varphi = \frac{\Delta s}{\rho}$

ρ : lokal krumningsradius

retning av $\Delta\vec{u}_T$ er normal på tangensialvektoren

enhetsvektor $\hat{u}_N$

$$\hat{u}_T\cdot\hat{u}_T = \hat{u}_N\cdot\hat{u}_N = 1$$
$$\hat{u}_T\cdot\hat{u}_N = 0$$

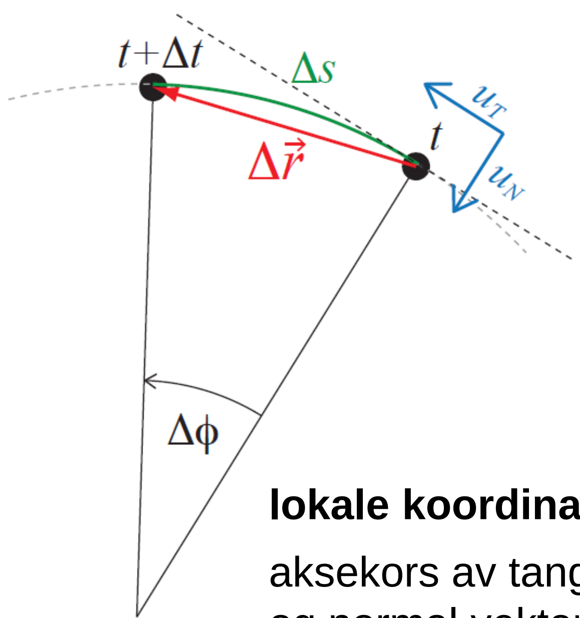
$$\Delta\vec{u}_T = \Delta\varphi\,\hat{u}_N = \frac{\Delta s}{\rho}\hat{u}_N$$

$$\frac{d\hat{u}_T}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{u}_T}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\rho\,\Delta t}\hat{u}_N = \frac{v}{\rho}\hat{u}_N$$

$$\vec{a}(t) = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + v\frac{d\hat{u}_T}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + \frac{v^2}{\rho}\hat{u}_N = a_T\hat{u}_T + a_N\hat{u}_N$$

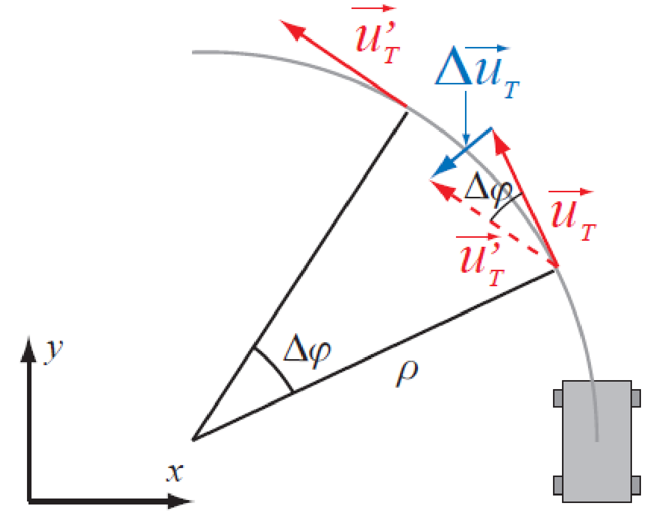
sentripetalakselerasjon $a_N = \frac{v^2}{\rho}$

$$\vec{a}(t) = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + \frac{v^2}{\rho}\hat{u}_N = a_T\hat{u}_T + a_N\hat{u}_N$$



lokale koordinater:

aksekors av tangensial og normal vektorer følger med objektet langs banen

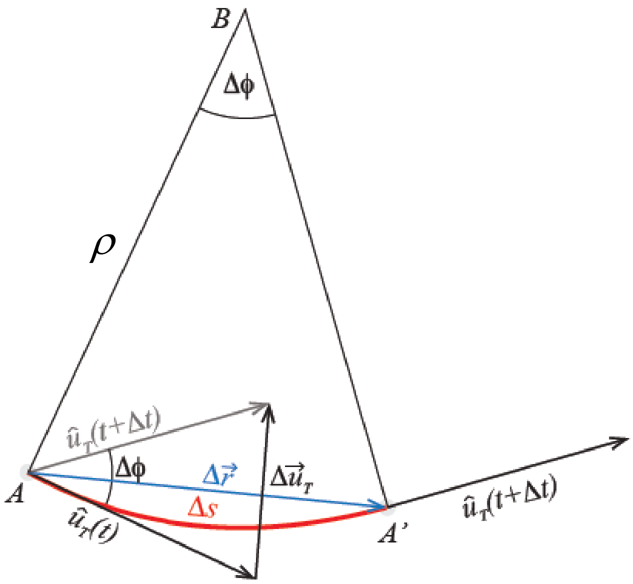


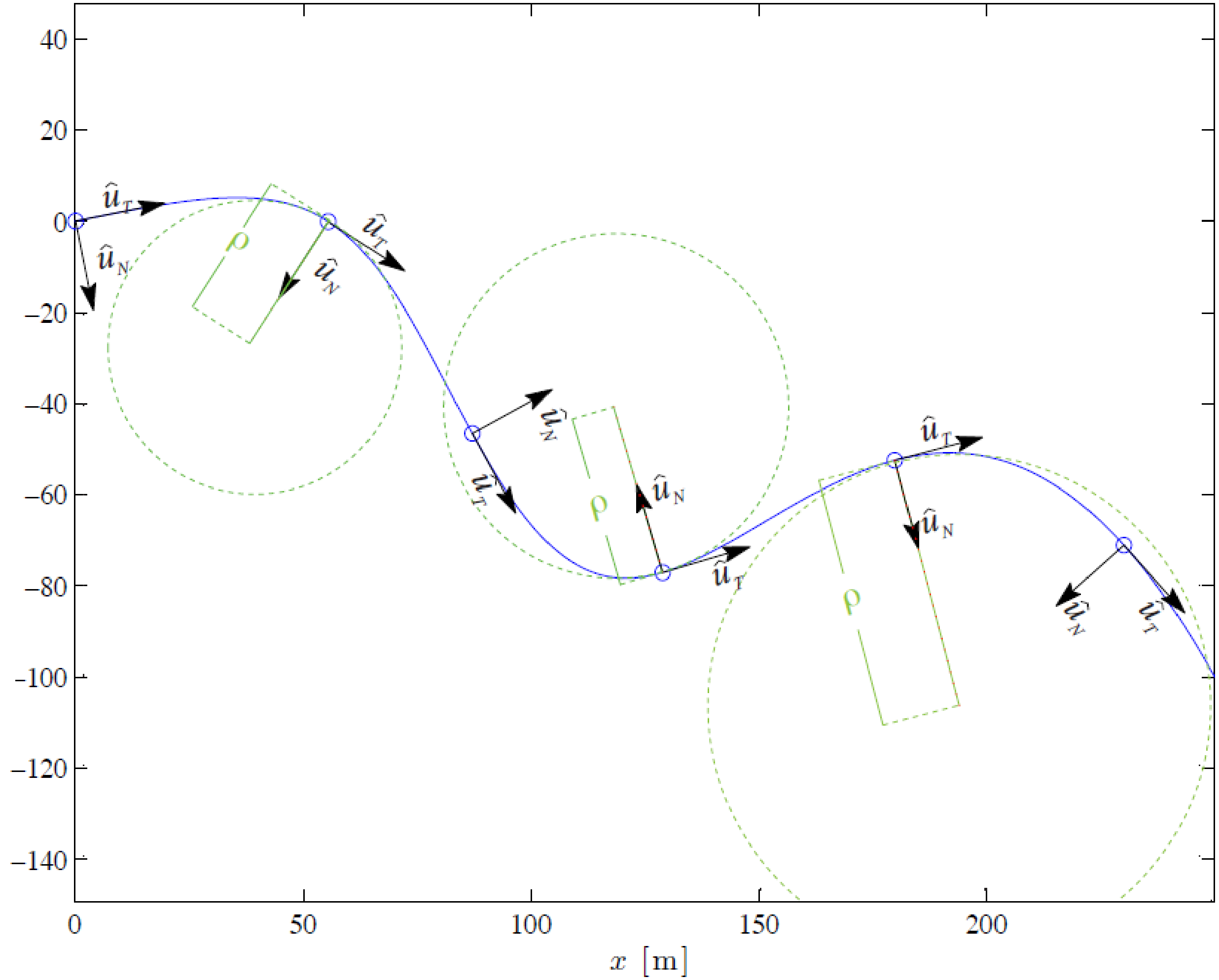
tangensialkomponent av akselerasjon:
- forandring av farten langs banen

$$a_T = \frac{dv}{dt}$$ tangensialakselerasjon

normalkomponent av akselerasjon:
- forandring av bevegelsesretning
- akselerasjon som trengs for å bli på banen

$$a_N = \frac{v^2}{\rho}$$ sentripetalakselerasjon





$$\left|\Delta\vec{u}_T\right| \approx \left|\Delta\varphi\,\hat{u}_T(t)\right| = \Delta\varphi = \frac{\Delta s}{\rho}$$

$$\frac{\left|\Delta\vec{u}_T\right|}{\Delta s} = \frac{1}{\rho}$$

$$\frac{d\hat{u}_T}{ds} = \frac{1}{\rho}\hat{u}_N$$

ρ : lokal krumningsradius

$$\hat{u}_T = \frac{d\vec{r}}{ds} \qquad \frac{d\hat{u}_T}{ds} = \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \frac{1}{\rho}\hat{u}_N$$

Eksempel: Et legeme beveger seg med konstant fart på en sirkelbane med radius R.

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = v_0 \qquad \vec{v}(t) = v_0\,\hat{u}_T(t)$$

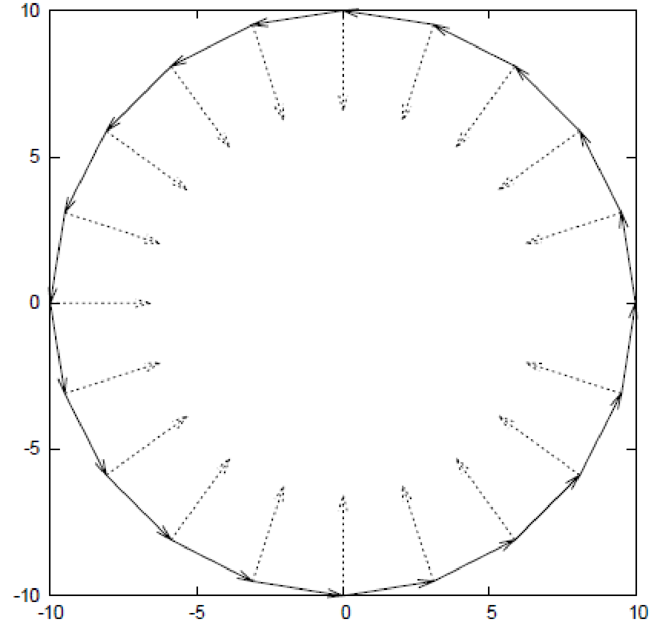
$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T(t) + \frac{v^2}{\rho}\hat{u}_N = a_T\hat{u}_T + a_N\hat{u}_N$$

tangensialakselerasjon: $a_T = \frac{dv}{dt} = 0$

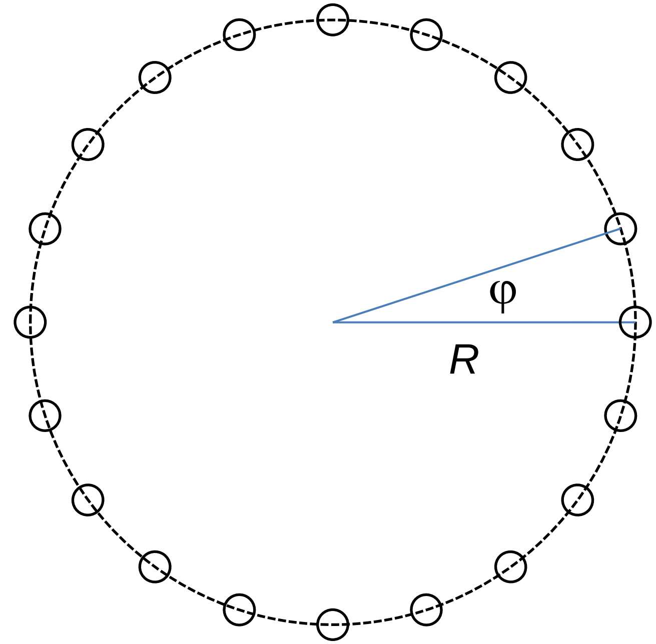
legemet beveger seg med konstant fart og har ingen akselerasjon langs sirkelbanen.

sentripetalakselerasjon: $a_N = \frac{v^2(t)}{\rho(t)} = \frac{v_0^2}{R}$

sentripetalakselerasjonen har konstant størrelse og peker mot sirkelens sentrum.



Eksempel: Et legeme beveger seg på en sirkelbane med radius R med konstant fart v. Det tar en tid T for et helt omløp.



farten er konstant: $$v = \frac{ds}{dt} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2\pi R}{T}$$

$$s(t) = R\varphi(t)$$

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}\big(R\varphi(t)\big) = R\frac{d\varphi}{dt} = R\omega$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$ vinkelhastighet, enhet: $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$

her er vinkelhastigheten konstant: $$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T}$$

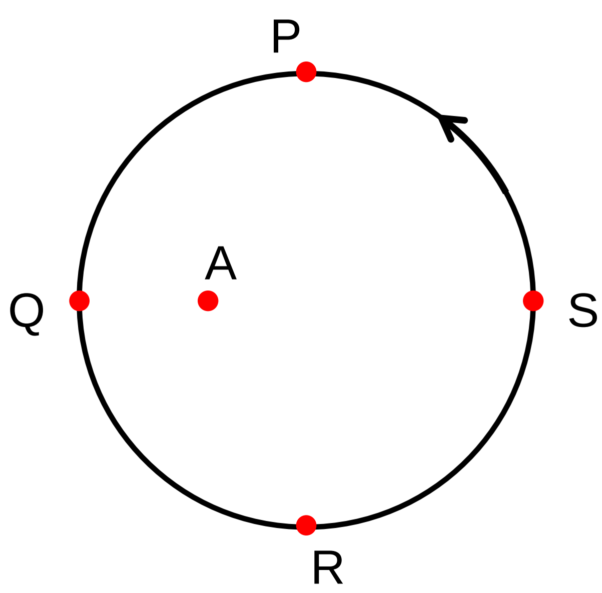
$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + \frac{v^2}{R}\hat{u}_N = \frac{v^2}{R}\hat{u}_N$$ konstant fart $\Rightarrow$ ingen tangensialakselerasjon

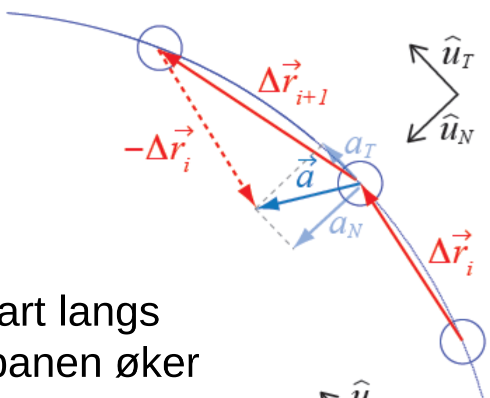
$$|\vec{a}| = \frac{v^2}{R} = R\omega^2$$ sentripetalakselerasjon

http://pingo.upb.de/ access number: 8178

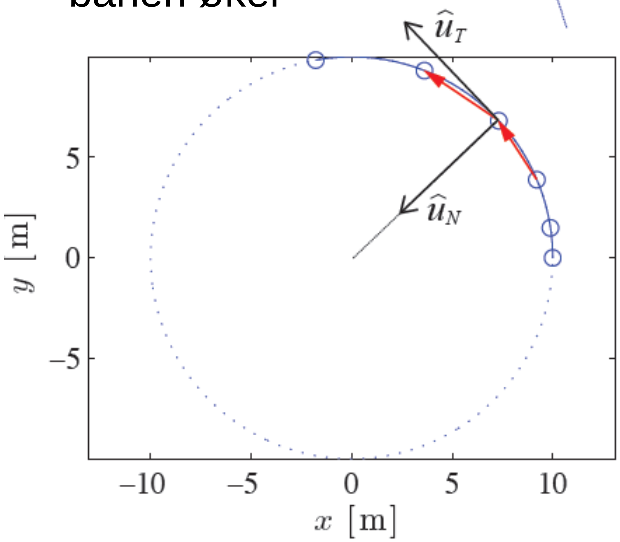
Et objekt beveger seg på en sirkelbane mot klokken. Under bevegelsen peker akselerasjonsvektoren alltid i retning mot punkt *A*. Farten til objektet

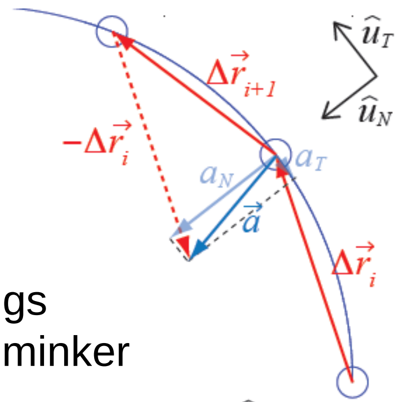
1. øker i *S* og minker i *Q.*
2. minker i *S* og øker i *Q.*
3. øker i *P* og minker i *R.*
4. minker i *P* og øker i *R.*
5. Ingen objekt kan beveger seg på denne måten.



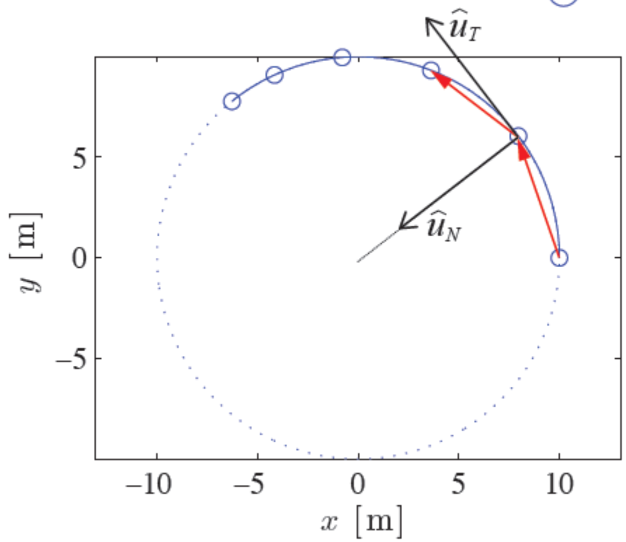


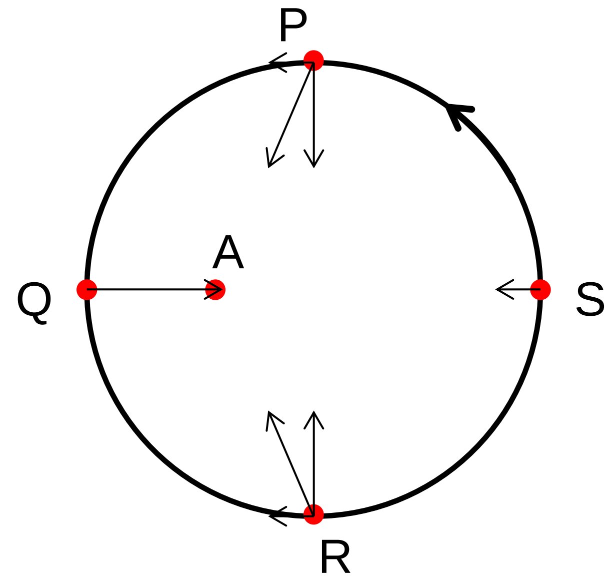
fart langs
banen øker





fart langs
banen minker



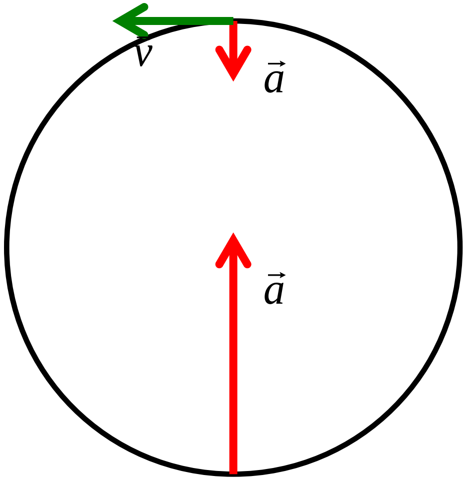


Farten øker i *P* og minker i *R.*

Farten er maksimal i Q og minimal i *S.*

En berg-og-dalbane kjører gjennom en looping. I det laveste punkt er akselerasjonen fire ganger større enn på toppen av loopen. I forhold til farten på toppen er farten i bunnen:

A. $\sqrt{2}$ ganger større
B. 2 ganger større
C. 4 ganger større
D. 16 ganger større
E. avhengig av vekten

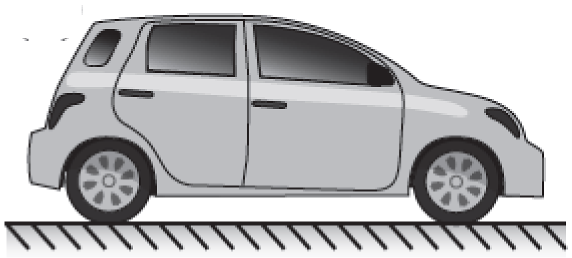


sentripetalakselerasjon: $a_N = \dfrac{v^2}{R}$

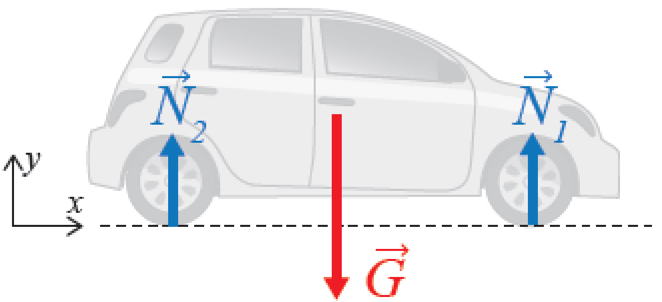
Vi kan beskrive bevegelsen langs en bane,
men hvordan finner vi akselerasjonen?

$\Rightarrow$ krefter i en betinget bevegelse.

Spesialfall for betinget bevegelse: ingen bevegelse



ingen bevegelse, men en betingelse:
bakken hindrer bilen å falle $\Rightarrow$ banen er gitt



fri-legeme diagram:

- kontaktkrefter: normalkrefter $\vec{N}_1, \vec{N}_2$
- langtrekkende kraft: gravitasjon $\vec{G}$

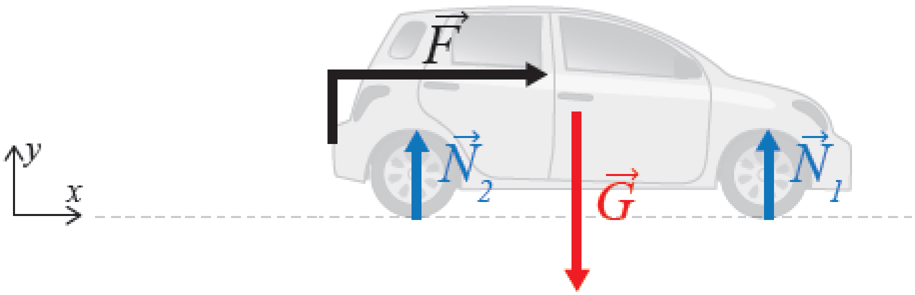
vi kjenner gravitasjonskraft: $\vec{G} = -mg\,\hat{j}$
men vi kjenner ikke normalkreftene.

Newtons andre lov:

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{G} = m\vec{a} = 0$$

$$\vec{N}_1 + \vec{N}_2 = -\vec{G}$$

betingelse fra banen (”bilen faller ikke”)
$\Rightarrow$ informasjon om normalkreftene



en bil kjører langs en horisontal vei

betinget bevegelse: banen er gitt

gravitasjon: $\vec{G} = -mg\,\hat{j}$

normalkraft: $\vec{N} = \vec{N}_1 + \vec{N}_2 = (N_1 + N_2)\,\hat{j}$

Vi antar at en ytre kraft F beveger bilen horisontal langs veien.

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{G} + \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = (N_1 + N_2 - mg)\,\hat{j} + F\,\hat{i} = ma_x\,\hat{i} + ma_y\,\hat{j}$$

langs veien
$\Rightarrow$ fri bevegelse

$$F = ma_x$$

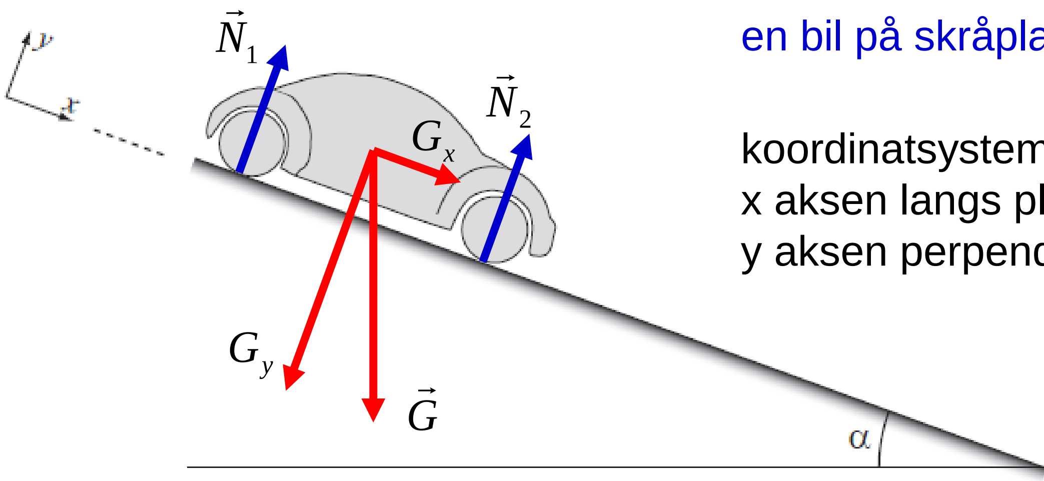
normal til veien
$\Rightarrow$ betinget bevegelse

$$N_1 + N_2 - mg = ma_y = 0$$

$$N_1 + N_2 = mg$$

hvis veien er gitt (betinget bevegelse)
dekomponer kreftene:

- krefter langs veien
- krefter normal til veien



en bil på skråplan

koordinatsystem:
x aksen langs planen
y aksen perpendikulær

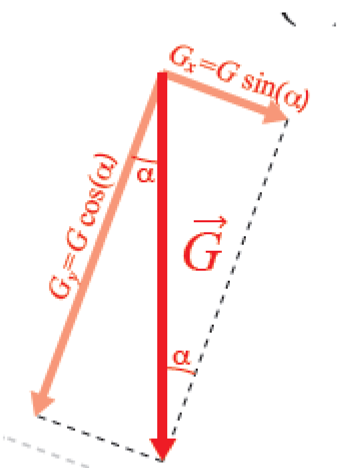
Newtons andre lov:

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{G} = m\vec{a}$$

normalkraft: $\vec{N} = \vec{N}_1 + \vec{N}_2 = (N_1 + N_2)\,\hat{j}$

$$N_1\,\hat{j} + N_2\,\hat{j} + G_x\,\hat{i} + G_y\,\hat{j} = ma_x\,\hat{i} + ma_y\,\hat{j}$$

gravitasjon: komponenter i x og y retning



$$\vec{G} = G_x\,\hat{i} + G_y\,\hat{j}$$

$$G_x = G\sin(\alpha)$$

$$G_y = -G\cos(\alpha)$$

$$\vec{G} = G\sin(\alpha)\,\hat{i} - G\cos(\alpha)\,\hat{j}$$

$$|\vec{G}| = G = mg$$

ingen bevegelse i y retning:

$$N_1 + N_2 + G_y = ma_y = 0$$

$$N_1 + N_2 = -G_y = G\cos(\alpha) = mg\cos(\alpha)$$

akselerasjon i x retning:

$$G_x = ma_x$$

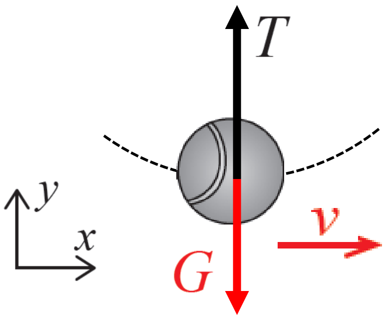
$$G_x = G\sin(\alpha) = mg\sin(\alpha) = ma_x$$

$$a_x = g\sin(\alpha)$$

http://pingo.upb.de/ access number: 8178

Jeg svinger en ball i en snor på en vertikal sirkelbane.
I det nederste punktet på banen er snordraget:

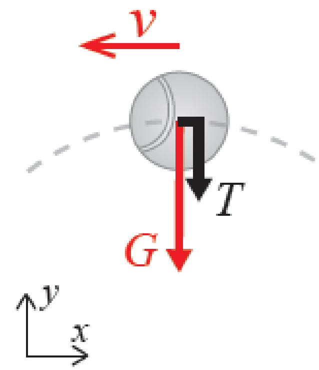
1. Større enn tyngden til ballen
2. Like stor som tyngden til ballen
3. Mindre enn tyngden til ballen



Snordraget T:
kraft fra snoren på ballen

Gravitasjon G

(Vi ser bort fra luftmotstand.)



N2L i y retning: $T - G = ma_y$

$$-T - G = ma_y$$

$$a_y = -\frac{v^2}{R}$$

sentripetalakselerasjon
mot sirkelens sentrum: $a_y = +\frac{v^2}{R}$

$$-T - mg = -m\frac{v^2}{R}$$

$$T - mg = m\frac{v^2}{R}$$

$$T = m\frac{v^2}{R} - mg$$

$$T = m\frac{v^2}{R} + mg$$

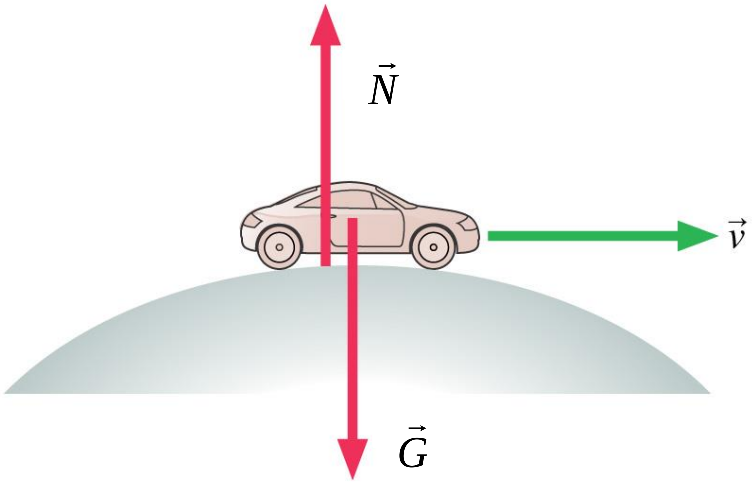
Snoren kan bare dra, ikke dytte: T>0

Snordraget er større en tyngden til ballen.

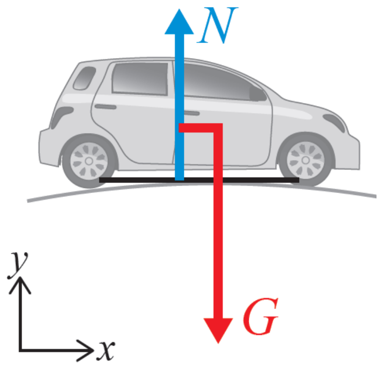
minimalfart for å holde snordraget positiv!

http://pingo.upb.de/ access number: 8178

En bil kjører over en bakketopp med farten v.
Da er:



1. $\left|\vec{N}\right| > \left|\vec{G}\right|$
2. $\left|\vec{N}\right| = \left|\vec{G}\right|$
3. $\left|\vec{N}\right| < \left|\vec{G}\right|$
4. Vi kan ikke si noe om N uten å kjenne v.



vertikale krefter:

- normalkraft fra bakken $\vec{N} = N\,\hat{j}$
- gravitasjon $\vec{G} = -mg\,\hat{j}$

vi neglisjerer luftmotstand
og friksjonskrefter

N2L i y retning: $N - G = ma_y$

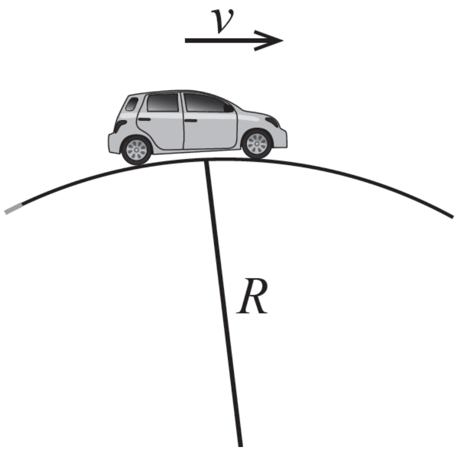
bil i kontakt med bakken: $a_y = -\frac{v^2}{R}$ sentripetalakselerasjon

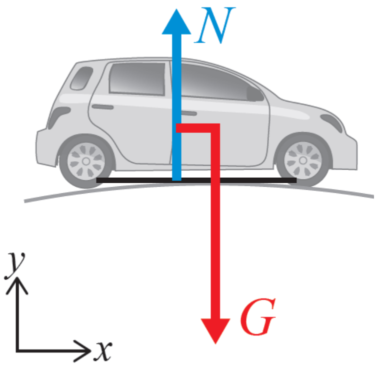
sentripetalakselerasjon må være negativ: $|\vec{N}| < |\vec{G}|$

http://pingo.upb.de/ access number: 8178

En stuntmann kjører en bil med masse $m = 1000\ \mathrm{kg}$ over en bakketopp med krumningsradius $R = 100\ \mathrm{m}$. Etter noen forsøk finner han ut at han må kjøre med $v_c = 113\ \mathrm{km/h}$ for å miste kontakten med bakken. Hvor fort må han kjøre for å gjøre det samme med en bil med masse $m = 1500\ \mathrm{kg}$?

1. $v = v_c = 113\ \mathrm{km/h}$
2. $v = \sqrt{1.5}v_c = 138\ \mathrm{km/h}$
3. $v = 1.5v_c = 169\ \mathrm{km/h}$
4. $v = (1.5)^2 v_c = 254\ \mathrm{km/h}$





vertikale krefter:

- normalkraft fra bakken $\vec{N} = N\,\hat{j}$
- gravitasjon $\vec{G} = -mg\,\hat{j}$

N2L i y retning: $N - mg = ma_y$

bil i kontakt med bakken: $a_y = -\dfrac{v^2}{R}$ sentripetalakselerasjon

$$N - mg = -m\frac{v^2}{R} \qquad N = m\left(g - \frac{v^2}{R}\right)$$

normalkraft er fartsavhengig

Med økende fart blir normalkraften mindre.

Passasjerer føler redusert tyngdeakselerasjon.

Bilen mister kontakt med bakken når $N = m\left(g - \dfrac{v^2}{R}\right) = 0$

$$v = \sqrt{gR} = \sqrt{981}\,\text{m/s} = 113\,\text{km/h}$$

Om bilen mister kontakt er uavhengig av massen m.