Betinget bevegelse og friksjon

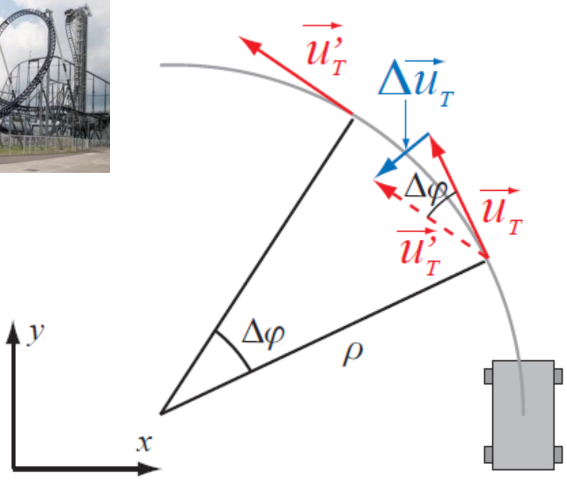
18.02.2015

Betinget bevegelse

bevegelse: $\vec{r}(t)$

bane: $\vec{r}(s)$

bevegelse langs banen: $s(t)$



hastighet: $$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \hat{u}_T\, v(t)$$

tangensialvektor: $$\frac{d\vec{r}}{ds} = \hat{u}_T\big(s(t)\big)$$

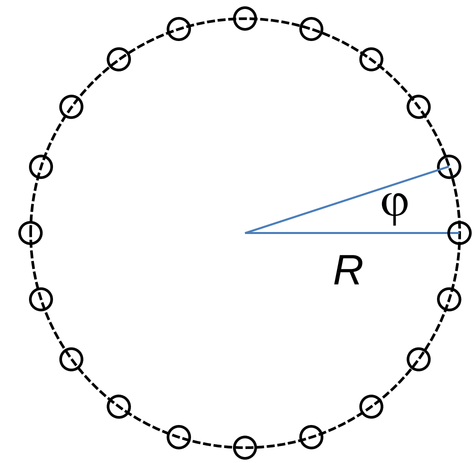
fart langs veien: $$v(t) = \left|\vec{v}(t)\right| = \frac{ds}{dt}$$

akselerasjon: $$\vec{a}(t) = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + v\frac{d\hat{u}_T}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + \frac{v^2}{\rho}\hat{u}_N$$

tangensialakselerasjon: $$a_T = \frac{dv}{dt}$$ forandring av farten langs banen

sentripetalakselerasjon: $$a_N = \frac{v^2}{\rho}$$ forandring av bevegelsesretning

Sirkelbane med konstant fart v.



farten er konstant: $v=\frac{ds}{dt}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{2\pi R}{T}$

$$v=\frac{ds}{dt}=\frac{d}{dt}\left(R\varphi(t)\right)=R\frac{d\varphi}{dt}=R\omega$$

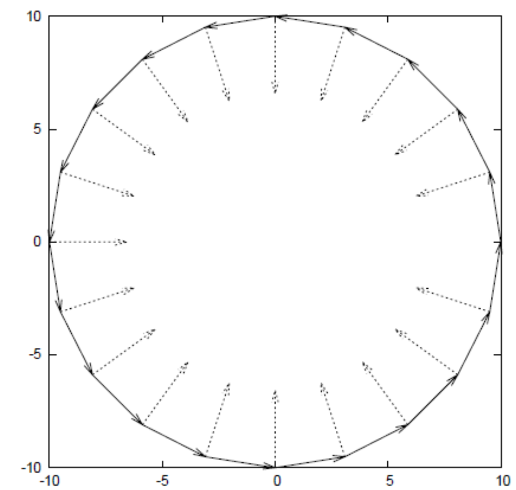
$\omega=\frac{d\varphi}{dt}$ vinkelhastighet, enhet: $\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$

her er vinkelhastigheten konstant: $\omega=\frac{d\varphi}{dt}=\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}=\frac{2\pi}{T}$

$$\vec{a}=\frac{dv}{dt}\hat{u}_T+\frac{v^2}{R}\hat{u}_N=\frac{v^2}{R}\hat{u}_N$$

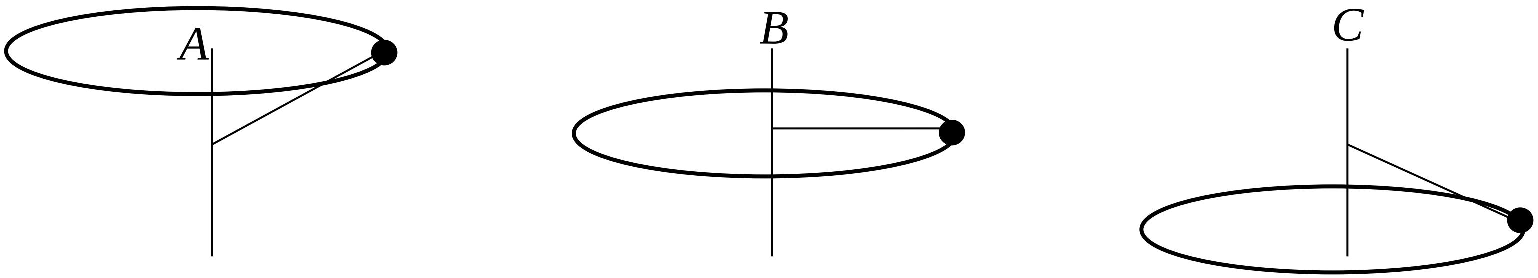
konstant fart $\Rightarrow$ ingen tangensialakselerasjon

$|\vec{a}|=\frac{v^2}{R}=R\omega^2$ sentripetalakselerasjon



http://pingo.upb.de/ access number: 8178

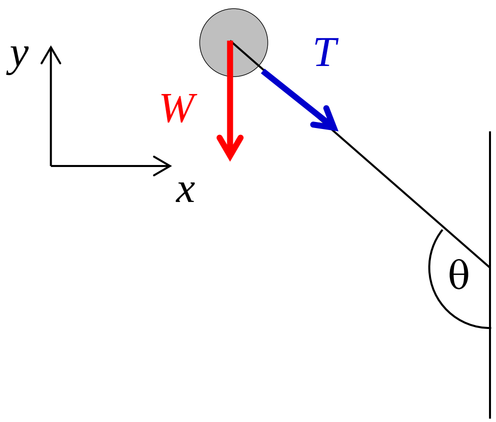
Jeg snurrer en jo-jo i et horisontalt plan om hånden min. Hvilken av følgende baner er mulige:



1. Bane A
2. Bane B
3. Bane C
4. Bane A og B
5. Bane A og C
6. Bane B og C
7. Alle tre

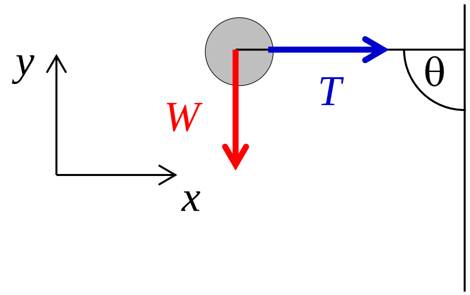
A: $\theta > 90°$

gravitasjon W
snordraget T



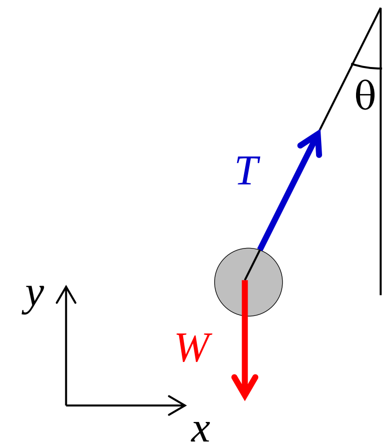
nettokraft nedover
$\Rightarrow$ horisontal bane
ikke mulig

B: $\theta = 90°$



nettokraft nedover
$\Rightarrow$ horisontal bane
ikke mulig

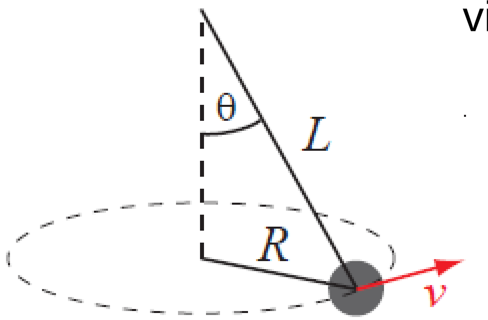
C: $\theta < 90°$

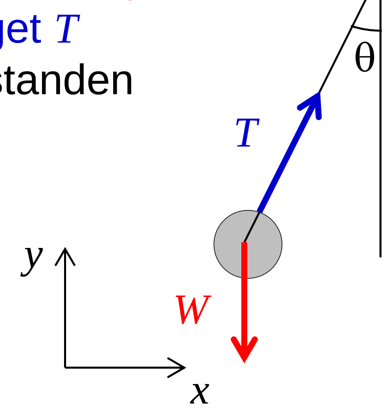


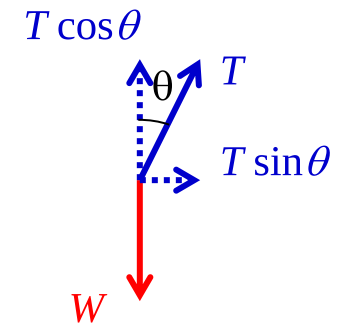
snordraget kan
kompenserer gravitasjon
$\Rightarrow$ nettokraft innover
$\Rightarrow$ sentripetalakselerasjon

Konisk pendel

langtrekkende kraft: gravitasjon W
kontaktkraft: snordraget T
vi ser bort fra luftmotstanden







$$T_x = T\sin(\theta)$$
$$T_y = T\cos(\theta)$$

N2L: $$\sum F_x = T_x = T\sin(\theta) = ma_x$$
$$\sum F_y = T_y - W = T\cos(\theta) - mg = ma_y$$

bevegelse i horisontal plan

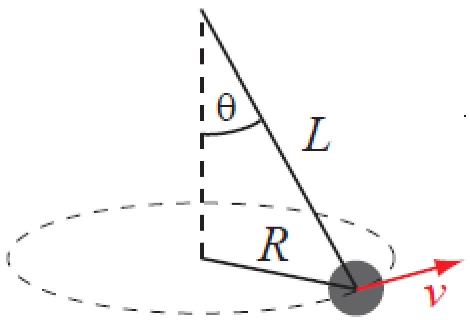
ingen bevegelse i y retning: $a_y = 0$ $\qquad T\cos(\theta) = mg$

snordraget: $$T = \frac{mg}{\cos(\theta)}$$

$$\theta = 0^\circ \quad \Rightarrow \quad T = mg$$

$$\theta \to 90^\circ \quad \Rightarrow \quad T \to \infty$$

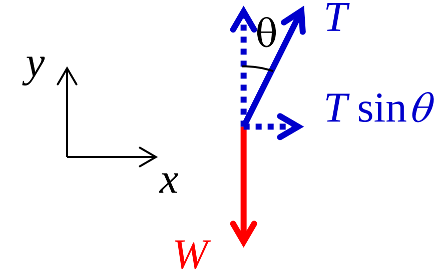
Konisk pendel



N2L:

$$\sum F_y = T\cos(\theta) - mg = 0$$

$$T = \frac{mg}{\cos(\theta)}$$



$$\sum F_x = T_x = T\sin(\theta) = ma_x$$

trenger sentripetalakselerasjon for å holde sirkelbane:

$$a_x = \frac{v^2}{R} = \frac{(\omega R)^2}{R} = R\omega^2 = L\sin(\theta)\omega^2$$

$$T\sin(\theta) = mL\sin(\theta)\omega^2$$

$$T = \frac{mg}{\cos(\theta)} = mL\omega^2$$

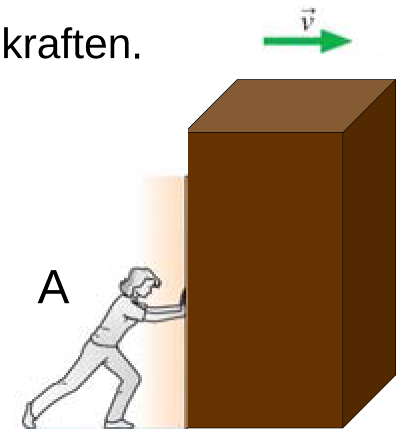
$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L\cos(\theta)}}$$

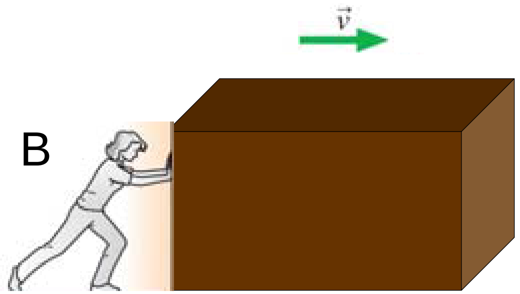
$\theta = 90^\circ$ krever uendelig stor vinkelhastighet og snordrag

http://pingo.upb.de/ access number: 8178

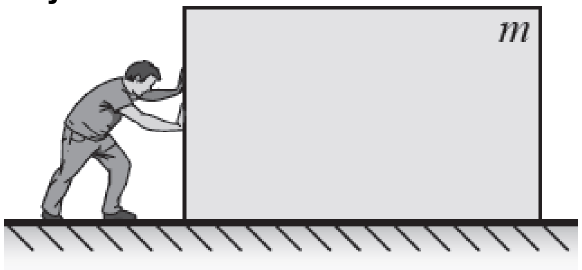
Person A flytter en kiste på høykant over en horisontal flate med konstant fart v. Person B flytter en identisk kiste liggende på siden med samme fart. Hvem må bruker mer kraft for å kompensere friksjon?

1. Person A bruker mer kraft.
2. Person B bruker mer kraft.
3. Begge bruker den samme kraften.





Friksjon



Hvorfor kan vi dytte en liten masse, men ikke en stor?

stor masse: jeg dytter og massen dytter tilbake etter N3L

hvordan det ?

Normalkraft: mikroskopiske deformasjoner

modell: "kiste og gulvet limt sammen med små fjærer"

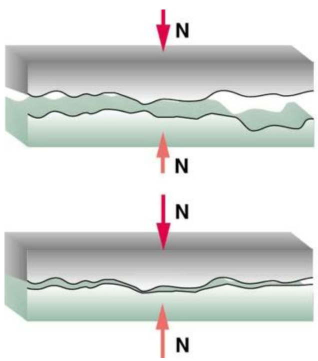
vertikal: gravitasjonskraft dytter på fjærene som dytter tilbake $\Rightarrow$ normalkraft

$$N - mg = ma_y = 0 \quad \Rightarrow \quad N = mg$$

horisontal: jeg dytter og fjærene dytter tilbake

dytter jeg for sterk rives fjærene

i modellen er friksjon koblet til normalkraften



lite normalkraft
lite friksjon

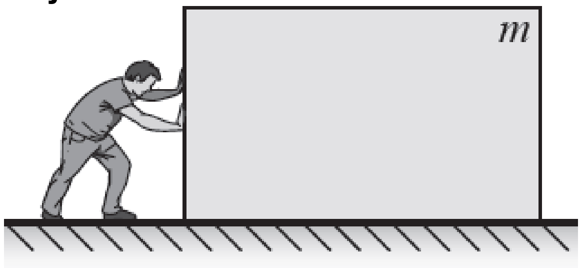
stor normalkraft
stor friksjon

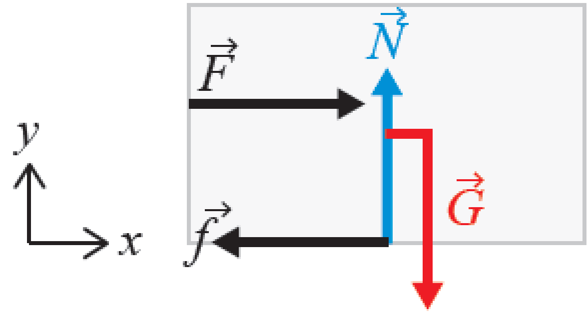
empirisk lov for statisk friksjon: $f_s < f_{s,\max} = \mu_s N$

kompliserte prosesser
bare tilnærming !

μ_s: statisk friksjonskoeffisient
(dimensjonsløs)

Friksjon





statisk fall: ingen bevegelse $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{N} + \vec{G} + \vec{F} + \vec{f} = m\vec{a} = \vec{0}$

vertikal: $N - G = ma_y = 0 \quad \Rightarrow \quad N = G = mg$

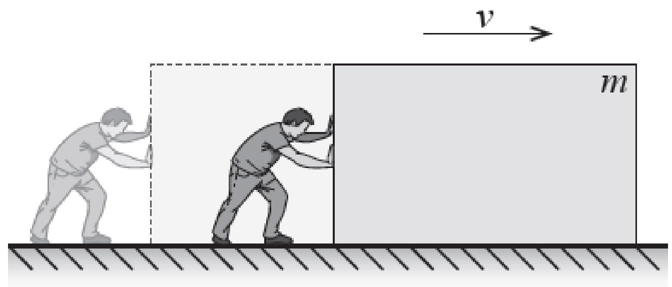
horisontal: $F - f = ma_x = 0 \quad \Rightarrow \quad f = F$

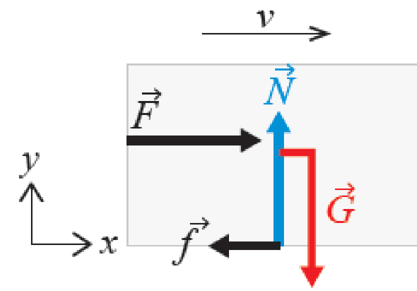
friksjonskraft er like stor som kraften F
fra mann på kisten, men bare hvis: $F < f_{s,\max} = \mu_s N$

hvis: $F > f_{s,\max} \quad \Rightarrow \quad F - f_{s,\max} = ma_x > 0$ kisten beveger seg til høyre

Vi har brukt betingelsen at kisten er i ro,
når kisten beveger seg er statisk friksjonslov ikke lenger gyldig!

Dynamisk friksjon:





Mann øker kraften frem til kisten begynner å skli

hvis han stopper å dytte vil kisten også stopper
$\Rightarrow$ det er fortsatt en friksjonskraft som bremser
$\Rightarrow$ dynamisk friksjon

empirisk lov for dynamisk friksjon: $\boldsymbol{f_d = \mu_d N}$

kraft virker motsatt bevegelsesretning

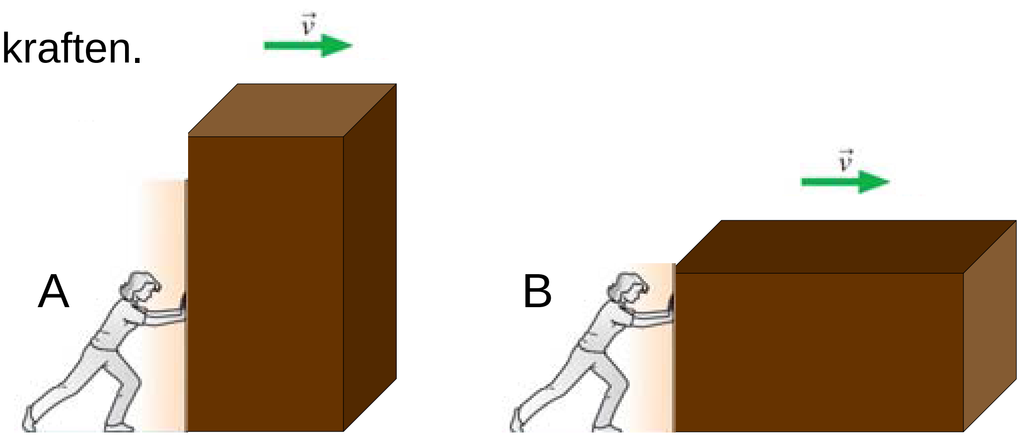
$\mu_d < \mu_s$

igjen: tilnærming

http://pingo.upb.de/ access number: 8178

Person A flytter en kiste på høykant over en horisontal flate med konstant fart v. Person B flytter en identisk kiste liggende på siden med samme fart. Hvem må bruker mer kraft for å kompensere friksjon?

1. Person A bruker mer kraft.
2. Person B bruker mer kraft.
3. Begge bruker den samme kraften.

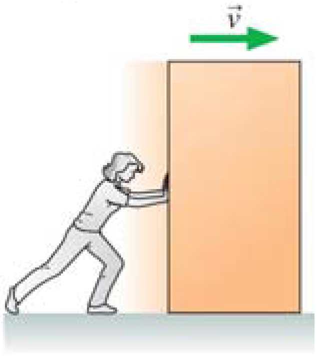


konstant fart $\Rightarrow$ dynamisk friksjon

$$f_d = \mu_d N$$

$$N = mg$$

Du flytter en kiste med masse M over en horisontal flate med konstant fart v. Hvis du bruker dobbelt så stor fart, så er friksjonskraften:

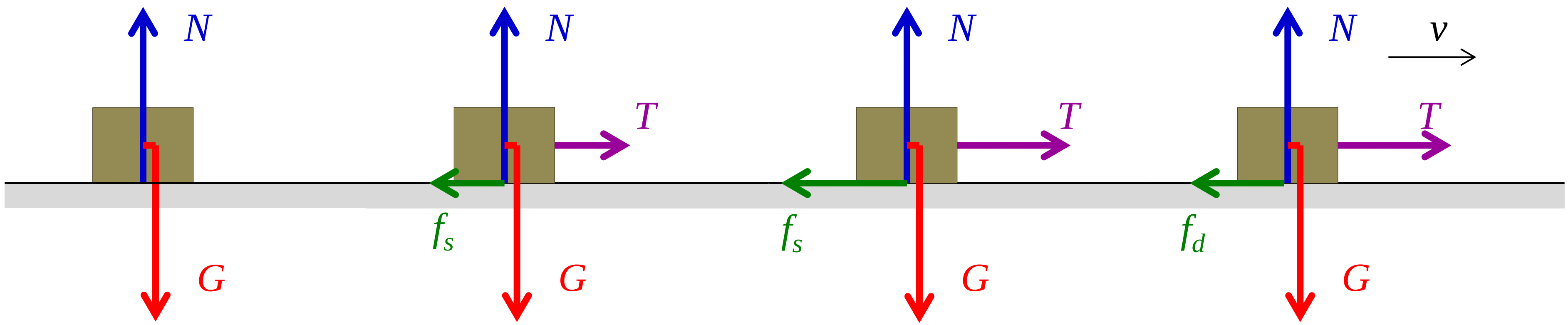


1. bare halvparten så stor
2. den samme
3. dobbelt så stor
4. fire ganger så stor

$$f_d = \mu_d N$$

$$\vec{f}_d = -\mu_d N \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

friksjonskraft avhengig av bevegelsesretning men uavhengig av fart



ingen horisontal kraft
ingen friksjon

små kraft T
kiste forblir i ro
statisk friksjon:

$$f_s < f_{s,\max} = \mu_s N$$

større kraft T
kiste begynner
å skli når:

$$f_s = f_{s,\max} = \mu_s N$$

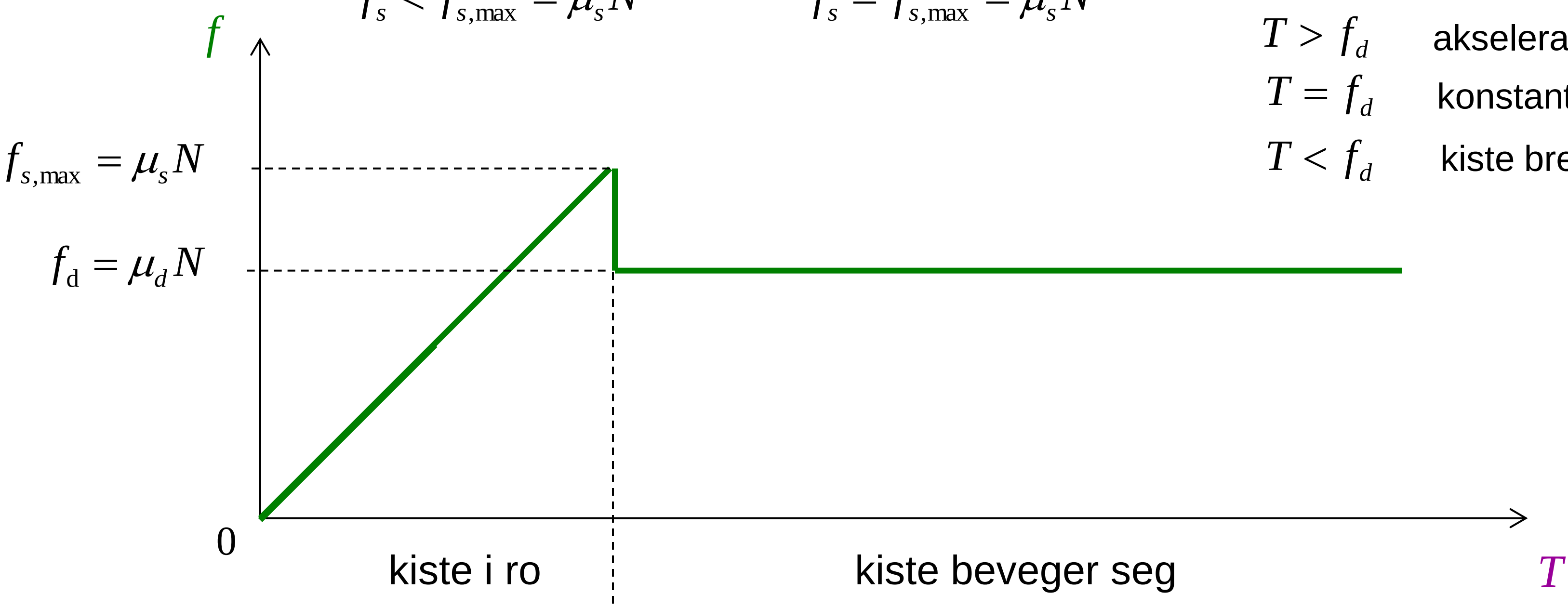
kiste sklir
dynamisk friksjon:

$$f_d = \mu_d N$$

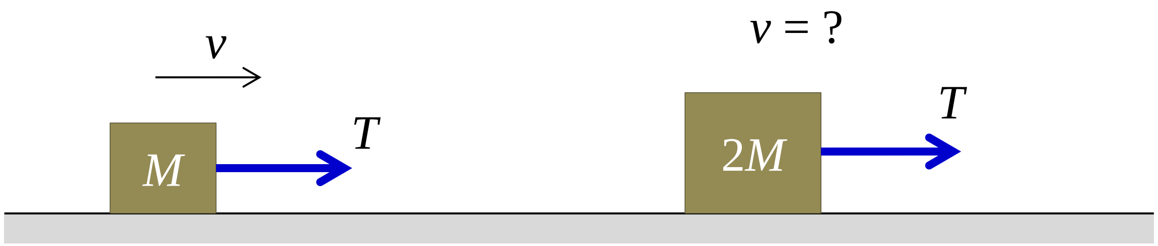
$T > f_d$ akselerasjon

$T = f_d$ konstant fart

$T < f_d$ kiste bremser

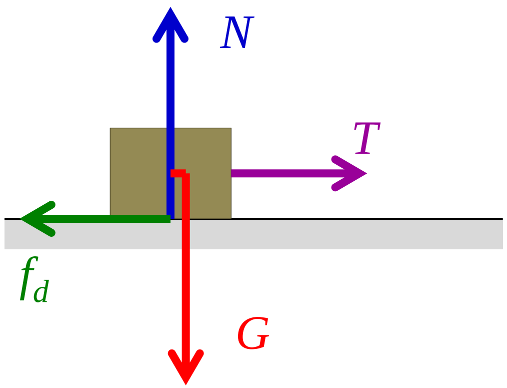


Du trekker en kiste med masse M over en horisontal flate med kraft T, og kisten beveger seg med konstant fart v. Hvis du trekker med den samme kraften T på en kiste med masse $2M$ som står i ro på den samme overflaten, så vil denne



1. forbli i ro
2. akselerere inntil farten når 0.5 v
3. beveger seg med konstant fart v
4. ingen av de ovennevnte

Du trekker en kiste med masse M over en horisontal flate med kraft T, og kisten beveger seg med **konstant fart v**.



konstant fart $\Rightarrow$ akselerasjon null

$$\sum F_x = T - f_d = 0$$
$$\sum F_y = N - G = 0$$

$$N = Mg$$
$$T = f_d = \mu_d N = \mu_d Mg$$

Hvis du trekker med den samme kraften T på en kiste med **masse $2M$ som står i ro** på den samme overflaten, så vil denne...

for å bevege kisten må være: $T > f_{s,\max}$

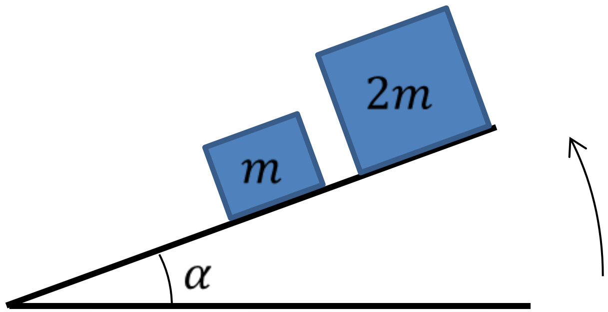
$$\sum F_y = N - G = 0 \quad \Rightarrow \quad N = 2Mg$$

statisk og dynamisk friksjonskoeffisienter: $\mu_s > \mu_d$

$$f_{s,\max} = \mu_s N = \mu_s 2Mg > \mu_d 2Mg = 2T$$

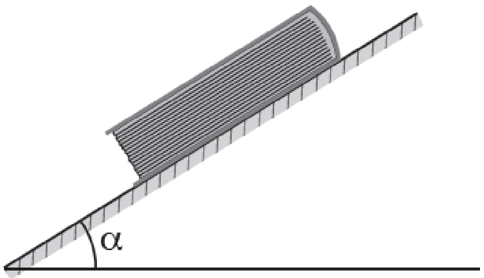
kiste forblir i ro.

To kister med masse m og $2m$ står på et skråplan og vi øker helningsvinkelen α kontinuerlig. Hvilken kiste begynner å skli først?

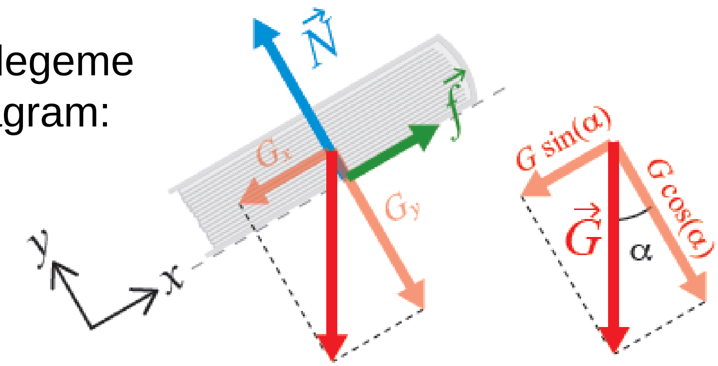


1. den lille
2. den store
3. begge sklir samtidig

Eksempel: bok på skråplan: hvor stor må vinkelen være for at boken sklir?



fri-legeme diagram:



kontaktkrefter:
- normalkraft N
- friksjonskraft f

langtrekkende kraft:
- gravitasjon G

vi velger x aksen langs planen.

små vinkel: $G\sin(\alpha)$ er små
$\Rightarrow$ friksjon *f* er små

stor vinkel: $G\sin(\alpha)$ er stor
$\Rightarrow$ friksjon *f* er (for) stor

vi antar at boken ikke sklir.

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{N} + \vec{G} + \vec{f} = m\vec{a} = \vec{0}$$

y retning: $N - G_y = N - mg\cos(\alpha) = ma_y = 0$

$$N = mg\cos(\alpha)$$

x retning: $f - G_x = f - mg\sin(\alpha) = ma_x = 0$

$$f = mg\sin(\alpha)$$

betingelse for at boken ikke sklir: $f < \mu_s N$

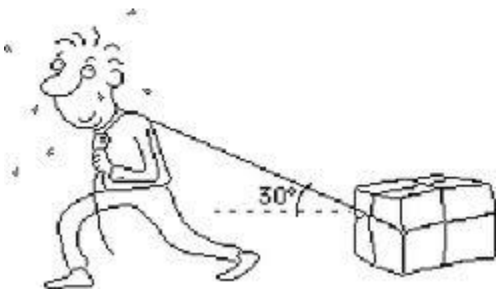
$$mg\sin(\alpha) < \mu_s mg\cos(\alpha)$$

$$\tan(\alpha) < \mu_s$$

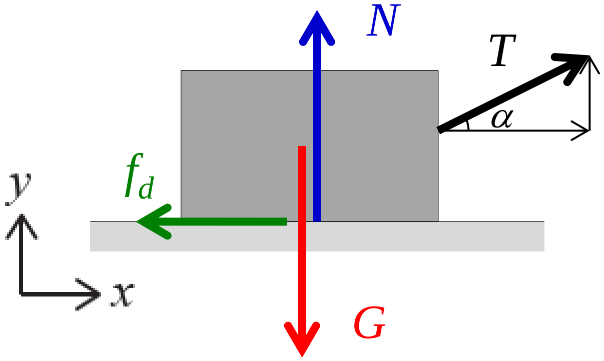
det er lett å måle μ_s

http://pingo.upb.de/ access number: 8178

Du trekker en kiste på en horisontal overflate med konstant hastighet. Det er friksjon mellom kisten og overflaten ($\mu_d > 0$). Er det bedre å trekke horisontal eller med en vinkel?



1. bedre horisontal
2. bedre med en vinkel
3. det spiller ingen rolle



gravitasjon $G = mg$
normalkraft N
snordraget T
dynamisk friksjon $f_d = \mu_d N$

ingen bevegelse i vertikal retning: $N + T\sin(\alpha) - mg = 0$

konstant hastighet i vertikal retning: $T\cos(\alpha) - \mu_d N = 0$ $\qquad N = \dfrac{T\cos(\alpha)}{\mu_d}$

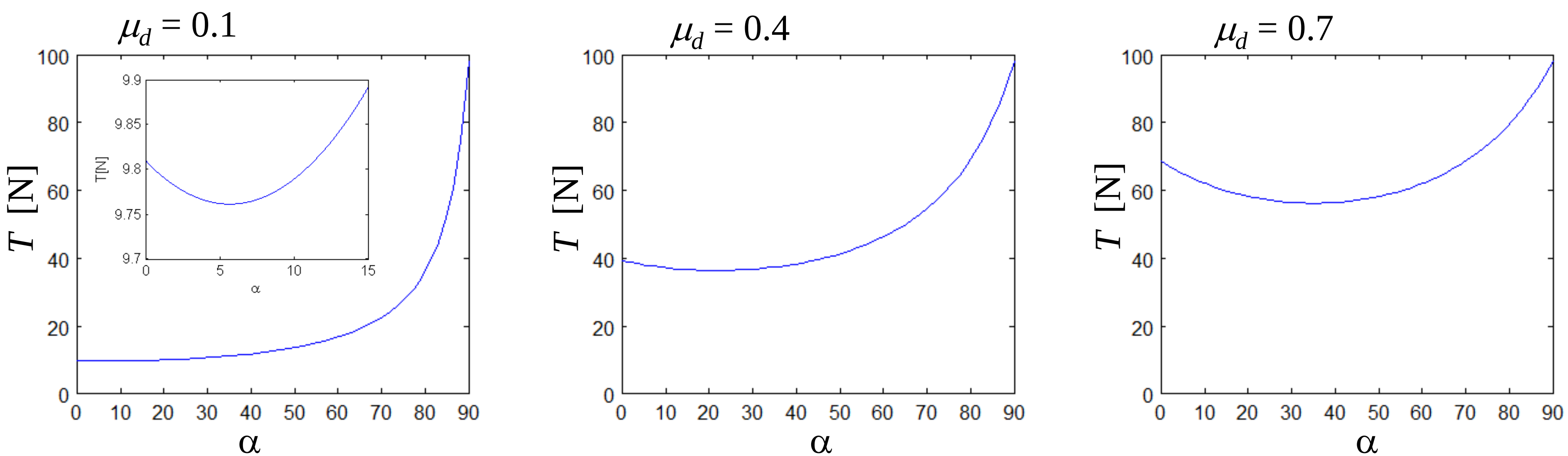
$$\frac{T\cos(\alpha)}{\mu_d} + T\sin(\alpha) = mg$$

$$T = \frac{\mu_d mg}{\cos(\alpha) + \mu_d \sin(\alpha)}$$

finn ekstremverdi: $$\frac{dT}{d\alpha} = \frac{-\mu_d mg}{\left(\cos(\alpha) + \mu_d \sin(\alpha)\right)^2}\left(-\sin(\alpha) + \mu_d \cos(\alpha)\right) = 0$$

$$\mu_d = \tan(\alpha)$$

eller plot funksjon $T = \dfrac{\mu_d mg}{\cos(\alpha) + \mu_d \sin(\alpha)}$ i Matlab eller Python

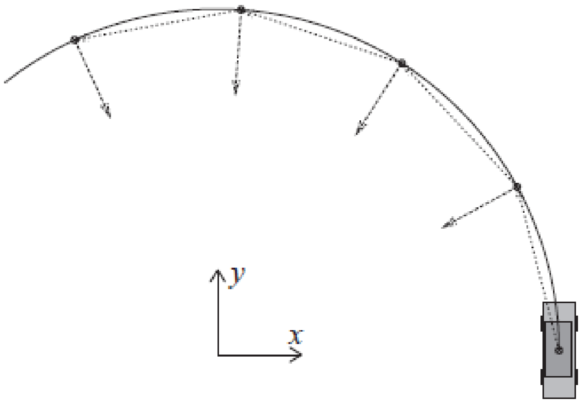


her brukte jeg $m = 10$ kg

ville resultatet være forskjellig for en annen masse?

$\mu_d = \tan(\alpha)$

Eksempel: En bil kjører med konstant fart v gjennom en sving med kurveradius R.



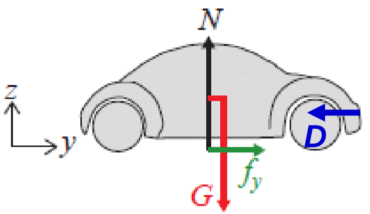
ingen bevegelse i z retning: $N - mg = ma_z = 0$

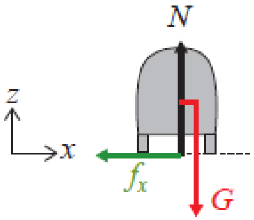
$$N = mg$$

bilen kjører med konstant fart i y retning:

$$f_y - D = ma_y = 0$$

Friksjon fra veien f_y er kraften som akselererer bilen fremover i y retning. For å holde farten konstant må fremdrivende friksjon kompensere luftmotstanden *D*.





for å ta svingen trenger bilen sentripetalakselerasjonen: $a_x = -\frac{v^2}{R}$

Friksjon fra veien f_x er kraften som akselererer bilen rund svingen: $f_x = ma_x = -m\frac{v^2}{R}$

betingelse for at bilen ikke sklir: $|f_x| < \mu_s N$

$$m\frac{v^2}{R} < \mu_s mg$$

$$v < \sqrt{\mu_s g R}$$ uavhengig av massen til bilen

Du kjører bil gjennom en svinge med radius $R = 100\ \mathrm{m}$.
I tørre forhold er den statiske friksjonskoeffisienten mellom dekk og veien $\mu_s = 0.7$. Hvor fort kan du kjøre gjennom svingen?

$$v < \sqrt{\mu_s g R} = \sqrt{0.7 \cdot 9.81\,\mathrm{m/s}^2 \cdot 100\,\mathrm{m}} = 26.2\,\mathrm{m/s} = 94.3\,\mathrm{km/h}$$

Hva hvis veien er våt og friksjonskoeffisienten redusert til $\mu_s = 0.4$?

$$v < \sqrt{\mu_s g R} = \sqrt{0.4 \cdot 9.81\,\mathrm{m/s}^2 \cdot 100\,\mathrm{m}} = 19.8\,\mathrm{m/s} = 71.3\,\mathrm{km/h}$$