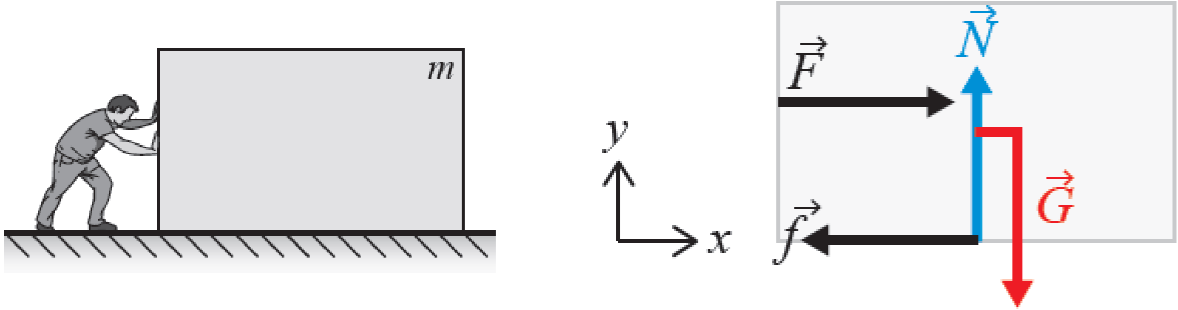
Arbeid og kinetisk energi

23.02.2015

Friksjon



empirisk lov for statisk friksjon: $f_s < f_{s,\max} = \mu_s N$ μ_s: statisk friksjonskoeffisient

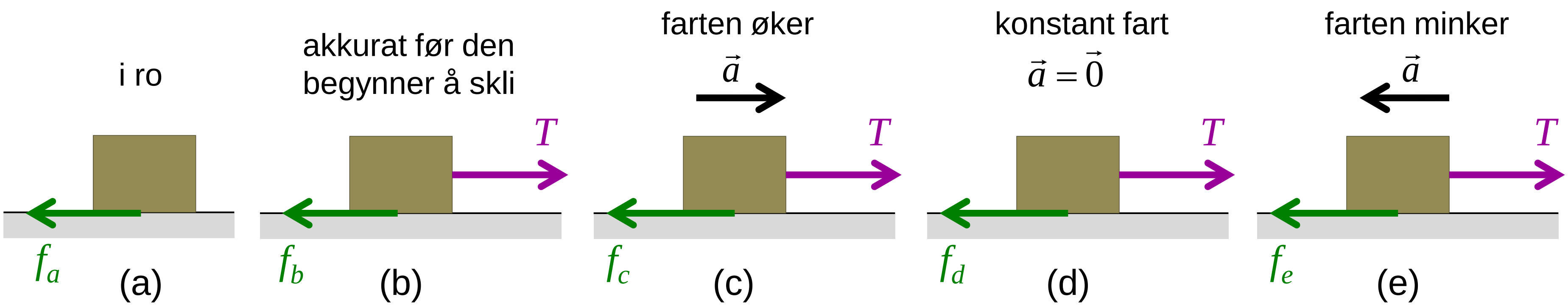
empirisk lov for dynamisk friksjon: $f_d = \mu_d N$ μ_d: dynamisk friksjonskoeffisient

$$\mu_d < \mu_s$$

kraft virker motsatt bevegelsesretning: $\vec{f}_d = -\mu_d |\vec{N}| \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

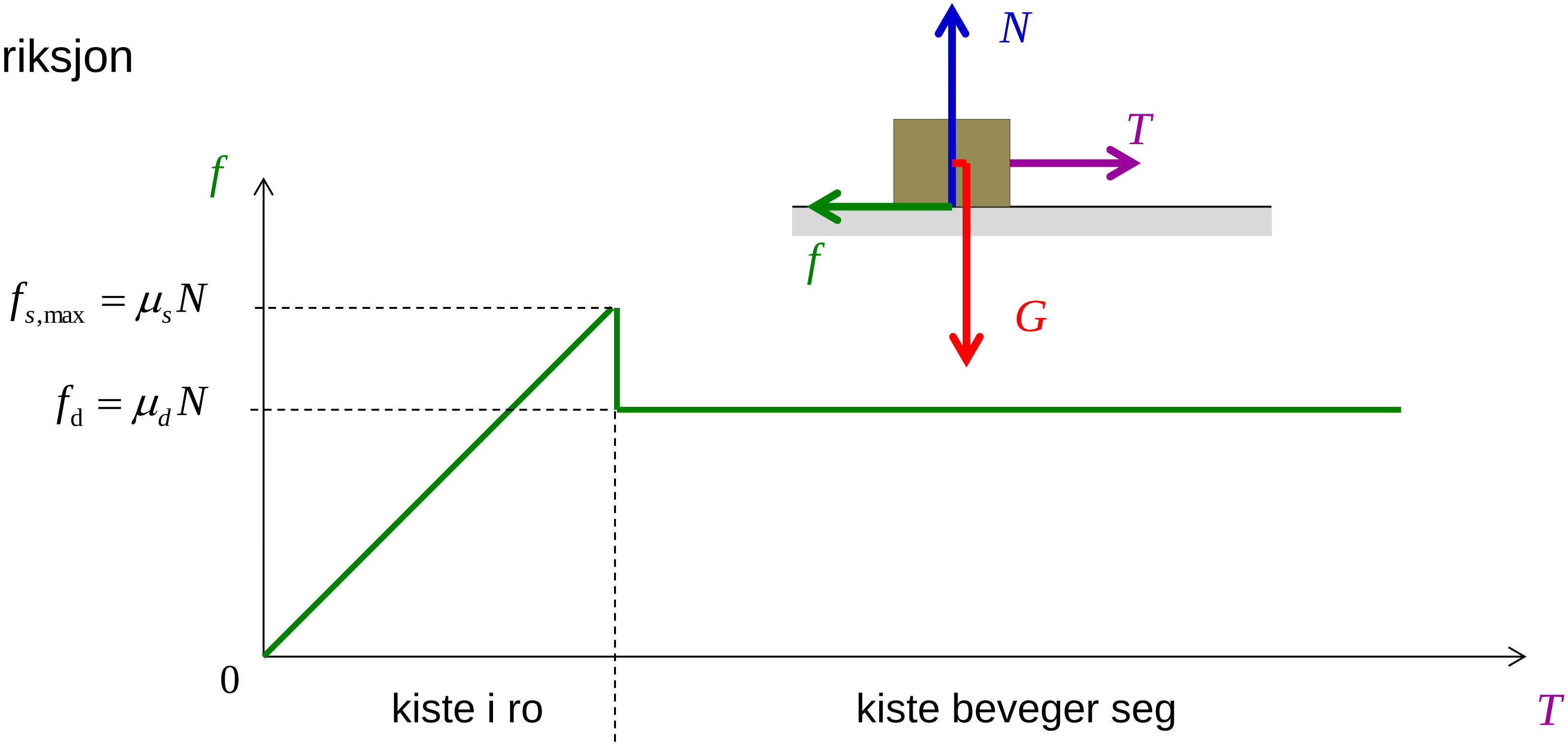
http://pingo.upb.de/ access number: 8178

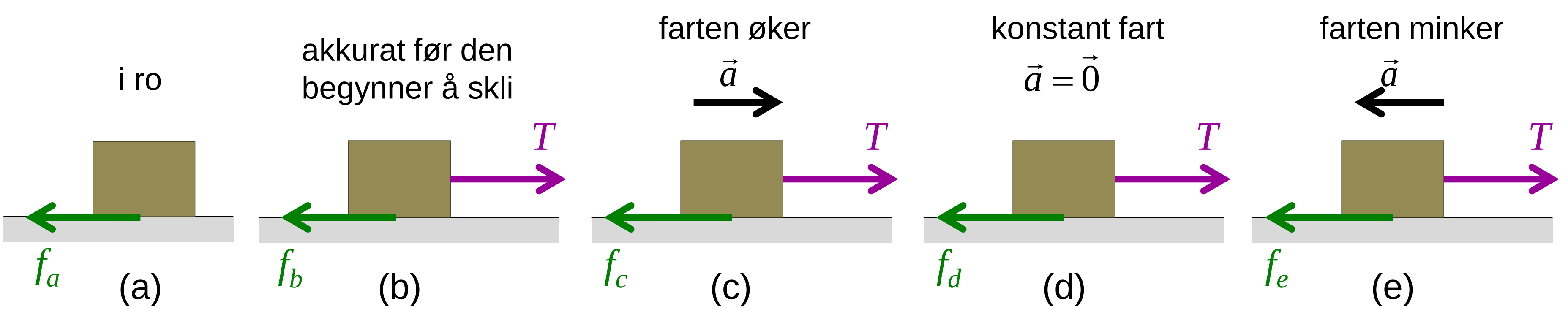
Ranger størrelsen på friksjonskraften i disse situasjonene.
Klossen og gulvet er de samme i alle tilfellene.



1. $f_\mathrm{c} > f_\mathrm{d} > f_\mathrm{e} > f_\mathrm{b} > f_\mathrm{a}$
2. $f_\mathrm{b} > f_\mathrm{c} > f_\mathrm{d} > f_\mathrm{e} > f_\mathrm{a}$
3. $f_\mathrm{a} > f_\mathrm{c} = f_\mathrm{d} = f_\mathrm{e} > f_\mathrm{b}$
4. $f_\mathrm{a} = f_\mathrm{b} > f_\mathrm{c} = f_\mathrm{d} = f_\mathrm{e}$
5. $f_\mathrm{b} > f_\mathrm{c} = f_\mathrm{d} = f_\mathrm{e} > f_\mathrm{a}$

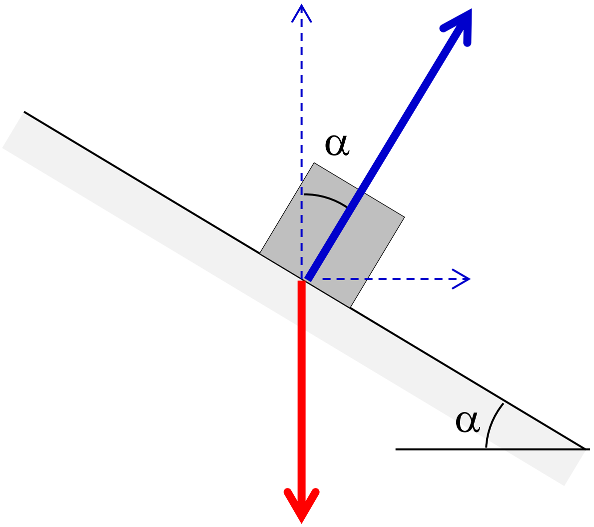
Friksjon





5. $f_b > f_c = f_d = f_e > f_a$

Svingen ved Daytona Speedway har en helningsvinkel $\alpha = 31°$ og krumningsradius $R = 316$ m. Hvor fort kan en bil kjøre?



først uten friksjon

Gravitasjon $G = mg$

Normalkraft N

vertikal: $N\cos\alpha - mg = 0$ $\quad N = \dfrac{mg}{\cos\alpha}$

horisontal: $N\sin\alpha = m\dfrac{v^2}{R}$

$$\frac{mg}{\cos\alpha}\sin\alpha = m\frac{v^2}{R}$$

$$g\tan\alpha = \frac{v^2}{R}$$

$$v = \sqrt{gR\tan\alpha} = 155\ \mathrm{km/h}$$

Uten friksjon må du kjøre med denne farten for å holde banen.

Hva hvis det er friksjon?

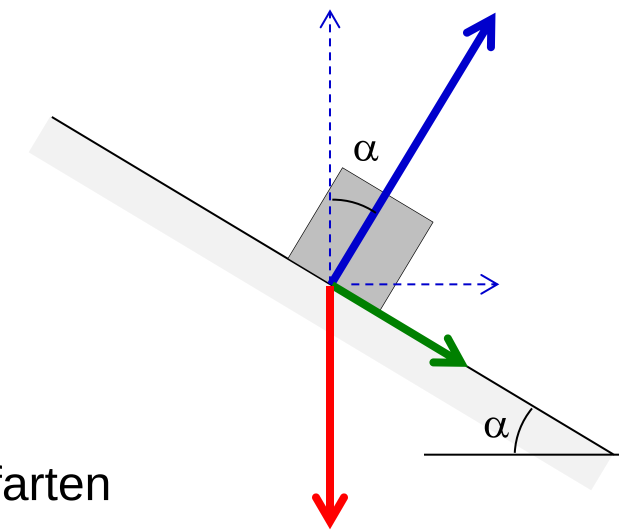
http://pingo.upb.de/ access number: 8178

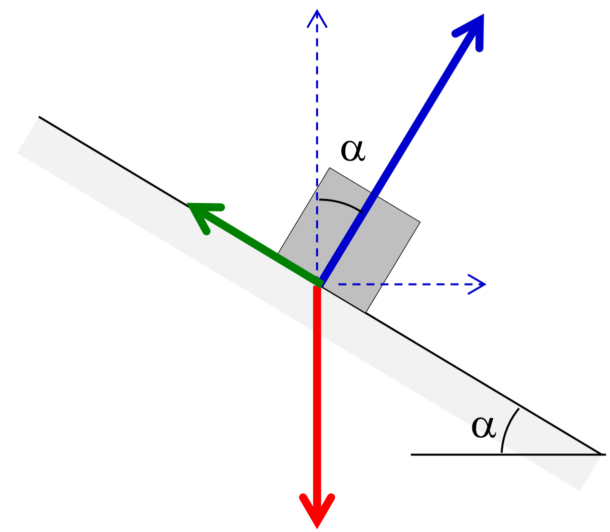
Hvis det er friksjon, hvilken retning har friksjonskraften?

A. innover

B. utover

C. avhengig av farten



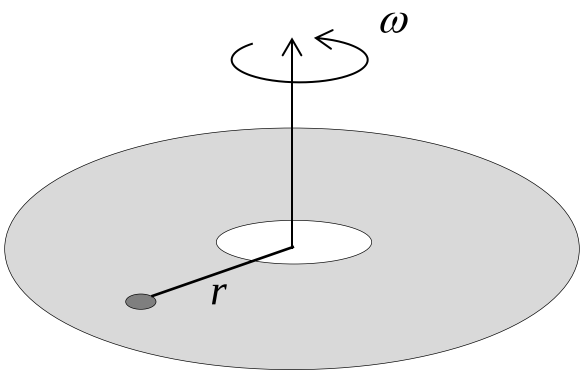


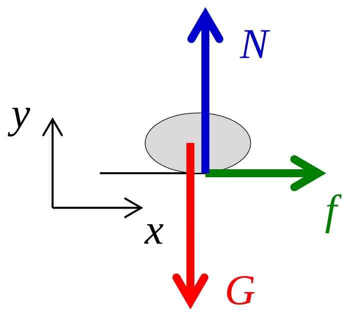
stor fart:
trenger ekstrakraft for å gi oss nok sentripetalakselerasjon

sakte fart:
trenger kraft for å ikke skli ned

statisk friksjonskraft: $f_s < f_{s,\max} = \mu_s N$

Eksempel: Et innsekt sitter på en roterende DVD i en avstand r fra sentrum. DVD-platen roterer med en vinkelhastighet ω. Den statiske friksjonskoeffisienten er μ_s. Hvor langt ut kan mauren være før den sklir?





N2L y $\quad N - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad N = mg$

N2L x $\quad f = ma$

mauren trenger sentripetalakselerasjon $a_N = \dfrac{v^2}{r} = r\omega^2$ for å holde sirkelbanen

mauren sklir når $f = \mu_s N = \mu_s mg$

$$f = mr\omega^2 = \mu_s mg$$

$$r = \frac{\mu_s g}{\omega^2}$$

Hvordan er bevegelsen når mauren sklir?

en vanlig problemstilling: finn hastighet som funksjon av posisjon.

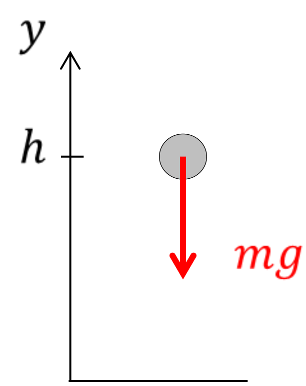
vi kan bruke den vanlige metoden:

- identifiser kreftene
- Newtons andre lov $\Rightarrow$ akselerasjon
- integrasjon $\Rightarrow$ hastighet $v(t)$
- integrasjon $\Rightarrow$ posisjon $x(t)$
- finn tid t_1 for å komme til posisjon x_1
- bruk tiden t_1 for å finne $v(x_1) = v(t_1)$

Denne metoden vil alltid fungere.
Det kan være vanskelig eller umulig å gjøre analytisk
$\Rightarrow$ bruk numeriske metoder

Vi får hastighet $v(t)$ og posisjon $x(t)$ for alle tider.
I utgangspunkt var vi ikke interessert i tiden,
bare i hastighet for en viss posisjon.
$\Rightarrow$ Vi prøver å finne en enklere og mer direkte metode.

Eksempel: vertikal kast: finn hastighet ved høyde h



vi ser bort fra luftmotstand
eneste kraft er gravitasjon

$$\sum F = -mg = ma \quad \Rightarrow \quad a = -g$$

initialbetingelser: $y(0) = 0$

$v(0) = v_0$

integrasjon: $v(t) = v_0 - gt$

$$y(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

tid t_1 for å komme til høyde h: $y(t_1) = h$

$$t_1^2 - \frac{2v_0}{g} t_1 + \frac{2h}{g} = 0 \qquad t_1 = \frac{v_0}{g} \pm \sqrt{\frac{v_0^2}{g^2} - \frac{2h}{g}} \qquad g t_1 = v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2gh}$$

Hastighet ved høyde h: $v(t_1) = v_0 - g t_1 = \mp \sqrt{v_0^2 - 2gh}$

to løsninger:
på veien opp og ned

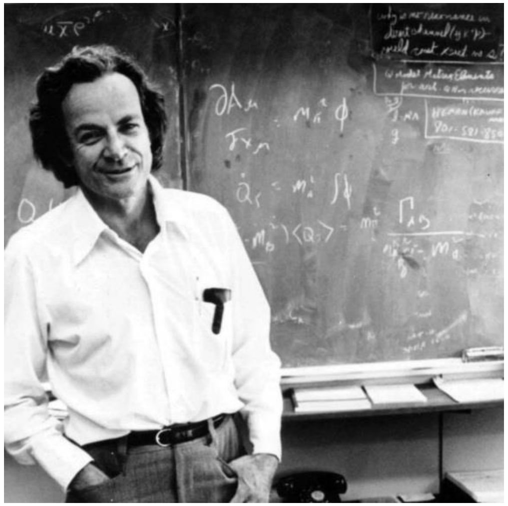
$$v^2 = v_0^2 - 2gh$$

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = -mgh \qquad \Rightarrow \text{ energi}$$

Hva er energi ?

Store Norsk Leksikon: *" … den evne et mekanisk system har til å utføre arbeid."*

Hvordan kan vi kvantifisere energi ?



Richard Feynman (1918 - 1988)

"It is important to realize that in physics today, we have no knowledge of what energy is. … However, there are formulas for calculating some numerical quantity, and we add it all together it gives "28" - always the same number. It is an abstract thing in that it does not tell us the mechanism or the reasons for the various formulas."

The Feynman Lectures on Physics, Vol.1, 4-1

- kinetisk energi
- gravitasjonsenergi
- elektrostatisk energi
- strålingsenergi
- termisk energi
- kjemisk energi
- kjerneenergi
- …

Energi *"størrelse som er bevart"*

Noether teorem: symmetri $\Leftrightarrow$ bevaringslov

homogenitet av tiden $\Rightarrow$ bevaring av energi
(valg av tid null)

homogenitet av rommet $\Rightarrow$ bevaring av bevegelsesmengde
(valg av standpunkt)

isotropi av rommet $\Rightarrow$ bevaring av spinn
(valg av retning)

Emmy Noether
1882 - 1935

Newtons andre lov i en dimensjon:

$$\sum F_x = F_x^{\text{net}} = ma_x = m\frac{dv_x}{dt}$$

$$F_x^{\text{net}}\, v_x = m\frac{dv_x}{dt} v_x = m\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v_x^2\right)$$

$$\int_{t_0}^{t_1} F_x^{\text{net}}\, v_x dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv_x^2\right) dt = \frac{1}{2}mv_x^2(t_1) - \frac{1}{2}mv_x^2(t_0)$$

$$K = \frac{1}{2}mv_x^2$$ kinetisk energi

$$W_{0,1} = \int_{t_0}^{t_1} F_x^{\text{net}}(t, x, v_x)\, v_x dt$$ arbeid utført av kraften F mellom tid t_0 og t_1

arbeid-energi teorem: $W_{0,1} = K_1 - K_0$

arbeid er tilført mekanisk energi.

vi trenger fortsatt hastigheten v(t) for å beregne arbeidet

$$W_{0,1} = \int_{t_0}^{t_1} F_x^{\mathrm{net}}(t, x, v_x)\, v_x dt$$

hvis kraften avhenger bare av posisjonen og ikke av hastigheten:

$$F_x^{\mathrm{net}}(t, x, v_x) = F_x^{\mathrm{net}}(x(t))$$

eksempler:
- gravitasjon
- fjærkraft

$$W_{0,1} = \int_{t_0}^{t_1} F_x^{\mathrm{net}}(x)\, v_x dt = \int_{t_0}^{t_1} F_x^{\mathrm{net}}(x)\, \frac{dx}{dt} dt = \int_{x(t_0)}^{x(t_1)} F_x^{\mathrm{net}}(x)\, dx$$

arbeid-energi teorem:

$$\int_{x_0}^{x_1} F_x^{\mathrm{net}}(x)\, dx = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_0^2$$

vi måler arbeid i Joule: $1\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{Nm} = 1\,\mathrm{kg}\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}$

arbeid-energi teorem: $W_{0,1} = K_1 - K_0$

- alternativ formulering for Newtons andre lov
  $\Rightarrow$ bare gyldig i inertialsystemer

- arbeid utført av **nettokraften** $F^{\text{net}} = \sum_j F_j$ summe av **alle** kreftene

$$W^{\text{net}} = \int_{t_0}^{t_1} F^{\text{net}} v\,dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_j F_j\, v\,dt = \sum_j \int_{t_0}^{t_1} F_j\, v\,dt = \sum_j W_j$$

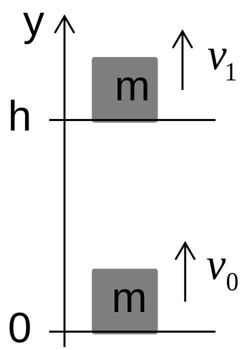
for å bruke arbeid-energi teoremet må vi ta hensyn til **alle** kreftene

- hvis kraften avhenger av hastighet: $\int_{t_0}^{t_1} F_x^{\text{net}}(t, x, v_x)\, v_x dt = K_1 - K_0$

- hvis kraften er bare posisjonsavhengig: $\int_{x_0}^{x_1} F_x^{\text{net}}(x)\, dx = K_1 - K_0$

konstant kraft F_x: $$W = \int_{t_0}^{t_1} F_x v\, dt = \int_{x_0}^{x_1} F_x\, dx = F_x \int_{x_0}^{x_1} dx = F_x (x_1 - x_0) = F_x\, \Delta x$$

eksempel: vertikal kast uten luftmotstand



$$F_y = -mg$$

$$W = \int_{y_0}^{y_1} F_y\, dy = -mg \int_0^h dy = -mgh$$

arbeid er negativ

kinetisk energi blir mindre

arbeid-energi teorem: $W_{0,1} = K_1 - K_0$

$$-mgh = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$v_1 < v_0$$

hvis massen faller ned igjen: $$W = -mg \int_h^0 dy = -mg(0-h) = +mgh$$

arbeid er positiv $\Rightarrow$ kinetisk energi øker

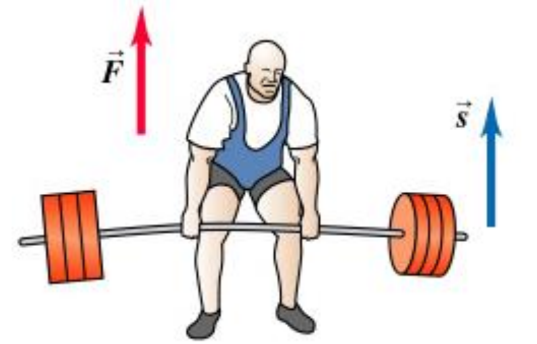
på høyde null: kinetisk energi er det samme som i utgangspunkt $K = \frac{1}{2} m v_0^2$

massen beveger seg i motsatt retning $v = -v_0$

arbeidet utført av gravitasjonskraften på massen for hele bevegelsen er null

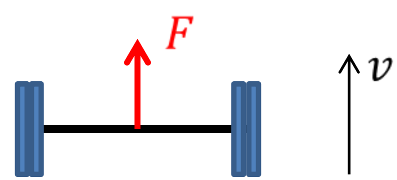
http://pingo.upb.de/ access number: 8178

En vektløfter løfter en vekt fra gulvet.
Mens han løfter den:

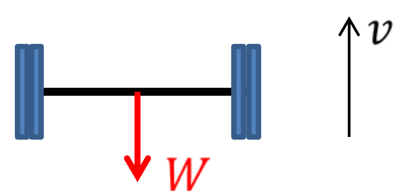


1. gjør han positivt arbeid på vekten, og vekten gjør positivt arbeid på ham.
2. gjør han negativ arbeid på vekten, og vekten gjør positivt arbeid på ham.
3. gjør han positivt arbeid på vekten, og vekten gjør negativt arbeid på ham.
4. gjør han negativt arbeid på vekten, og vekten gjør negativt arbeid på ham.

arbeid utført av vektløfteren på vekten:
- kraft fra vektløfteren på vekten
- kraft og forflytning har samme fortegn
- arbeid er positiv

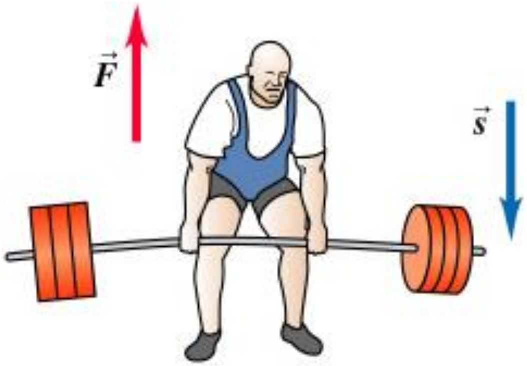


arbeid utført av vekten på vektløfteren:
- kraft fra vekten på vektløfteren (motkraft)
- kraft og forflytning har motsatt fortegn
- arbeid er negativ



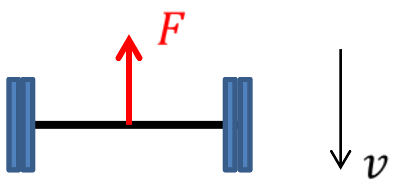
http://pingo.upb.de/ access number: 8178

En vektløfter setter en vekt ned på gulvet.
Mens han senker den:

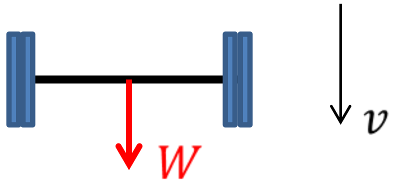


1. gjør han positivt arbeid på vekten, og vekten gjør positivt arbeid på ham.
2. gjør han negativ arbeid på vekten, og vekten gjør positivt arbeid på ham.
3. gjør han positivt arbeid på vekten, og vekten gjør negativt arbeid på ham.
4. gjør han negativt arbeid på vekten, og vekten gjør negativt arbeid på ham.

arbeid utført av vektløfteren på vekten:
- kraft fra vektløfteren på vekten
- kraft og forflytning har motsatt fortegn
- arbeid er negativ

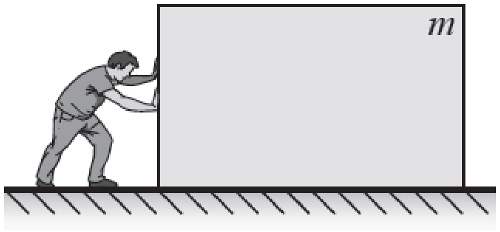


arbeid utført av vekten på vektløfteren:
- kraft fra vekten på vektløfteren (motkraft)
- kraft og forflytningen har samme fortegn
- arbeid er positiv



http://pingo.upb.de/ access number: 8178

Du beveger en masse m en meter til høyre og tilbake igjen en meter til venstre. Friksjonskraften er $F = \mu N$. For den totale bevegelsen gjør friksjonskraften:



1. positivt arbeid på klossen.
2. negativt arbeid på klossen.
3. ingen arbeid på klossen.

Friksjon virker alltid i motsatt bevegelsesretning

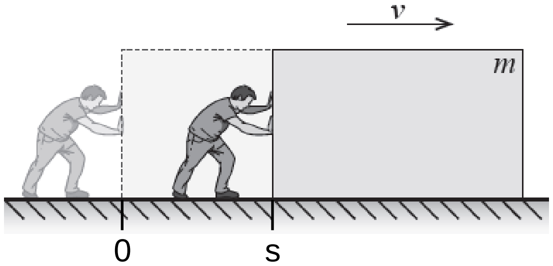
- arbeidet er negativ for bevegelsen til høyre
- arbeidet er også negativ for bevegelsen til venstre

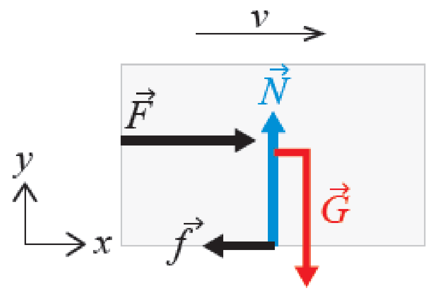
Friksjonskraft er hastighetsavhengig: $\vec{F} = -\mu N \frac{\vec{v}}{v}$

klossen taper energi når den beveger seg
systemet gjenvinner ikke energien ved å invertere bevegelsen

Vertikal kast med luftmotstand?

En mann dytter en kiste med en konstant kraft F.





friksjon: $\vec{f} = -\mu_d N\,\hat{i}$

kraft fra mannen på kisten: $\vec{F} = F\,\hat{i}$

normalkraft: $\vec{N} = N\,\hat{j}$

gravitasjon: $\vec{G} = -mg\,\hat{j}$

ingen bevegelse i vertikalretning:

$$N - mg = ma_y = 0 \quad \Rightarrow \quad N = mg$$

arbeid fra mann på kisten: $W_F = \int_0^s F\,dx = F\int_0^s dx = Fs > 0$

arbeid fra friksjon på kisten: $W_f = \int_0^s f\,dx = -\mu_d mg\int_0^s dx = -\mu_d mgs < 0$

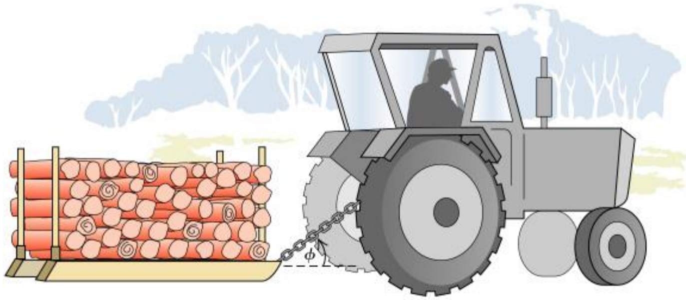
nettoarbeid: $W_{\text{net}} = \int_0^s F_{\text{net}}\,dx = \int_0^s (F - \mu_d mg)\,dx = Fs - \mu_d mgs = W_F + W_f$

arbeid-energi teorem: $W_{\text{net}} = K_1 - K_0$

$$Fs - \mu_d\,mgs = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

http://pingo.upb.de/ access number: 8178

En traktor som kjører med konstant fart trekker en slede lastet med tømmer. Det er friksjon mellom sleden og veien. Når sleden har flyttet seg en avstand *d* er arbeidet som er utført på sleden:



1. Positivt
2. Negativt
3. Null
4. Ikke nok informasjon til å avgjøre

farten er konstant: $K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 = K_0$

arbeid-energi teorem: $W_{0,1} = K_1 - K_0 = 0$

traktoren gjør positiv arbeid på sleden,
friksjonen gjør negativ arbeid på sleden