Arbeid og kinetisk energi

25.02.2015

kinetisk energi: $K = \frac{1}{2} m v_x^2$

arbeid: $W_{0,1} = \int_{t_0}^{t_1} F_x^{\text{net}}(t, x, v_x)\, v_x dt$

arbeid-energi teorem: $W_{0,1} = K_1 - K_0$ arbeid er tilført mekanisk energi.

arbeid hvis kraften er bare posisjonsavhengig: $W_{0,1} = \int_{t_0}^{t_1} F_x^{\text{net}}(x)\, v_x dt = \int_{x_0}^{x_1} F_x^{\text{net}}(x)\, dx$

alternativ formulering for Newtons andre lov
$\Rightarrow$ bare gyldig i inertialsystemer

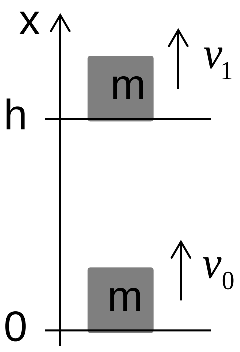
arbeid utført av **nettokraften** $F^{\text{net}} = \sum_j F_j$ summe av **alle** kreftene

$$W^{\text{net}} = \int_{t_0}^{t_1} F^{\text{net}}\, v\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_j F_j\, v\, dt = \sum_j \int_{t_0}^{t_1} F_j\, v\, dt = \sum_j W_j$$

vi måler arbeid og energi i Joule: $1\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{Nm} = 1\,\mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}$

vertikal kast
uten luftmotstand

$$F_x^{\text{net}} = -mg$$

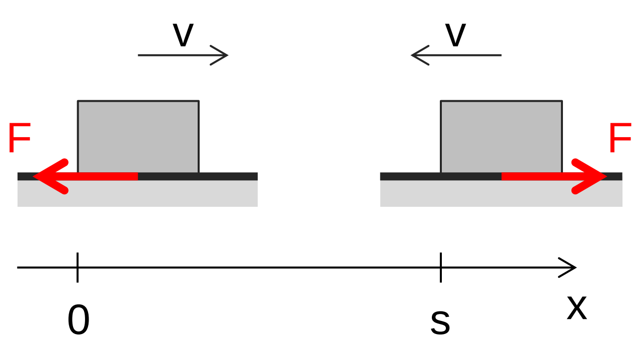


opp: $$W_{0,1} = \int_0^h F_x^{\text{net}}\, dx = -mgh < 0$$

ned: $$W_{1,0} = \int_h^0 F_x^{\text{net}}\, dx = -mg(0-h) = mgh > 0$$

kiste som skli med friksjon

$$F_x^{\text{net}}(v_x) = -\mu N \frac{v_x}{|v_x|}$$

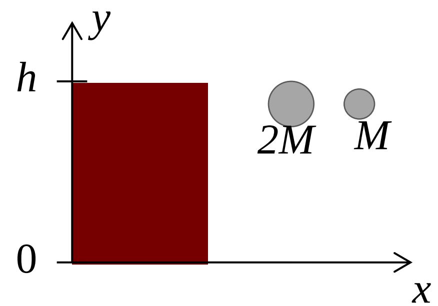


til høyre: $$W_{0,1} = \int_0^s F_x^{\text{net}}\, dx = -\mu N s < 0$$

til venstre: $$W_{0,1} = \int_s^0 F_x^{\text{net}}\, dx = \mu N(0-s) < 0$$

Hva er forskjell mellom de to kreftene ?

To baller med masse M og $2M$ slippes fra taket på fysikkbygningen. (Vi ser bort fra luftmotstanden.)
Rett før de treffer bakken har den tyngre ballen:



1. Halvparten av den kinetiske energien til den lettere ballen
2. Den samme kinetiske energien som den lettere ballen
3. Det dobbelte av den kinetiske energien til den lettere ballen
4. Fire ganger så stor kinetisk energi som den lettere ballen

$$W = \int_h^0 F_G\, dy = \int_h^0 (-mg)\, dy = -mg(0-h) = mgh$$

arbeid-energi teorem: $W = K_1 - K_0$ $\quad K_1 = \frac{1}{2} m v_1^2 \quad K_0 = 0$

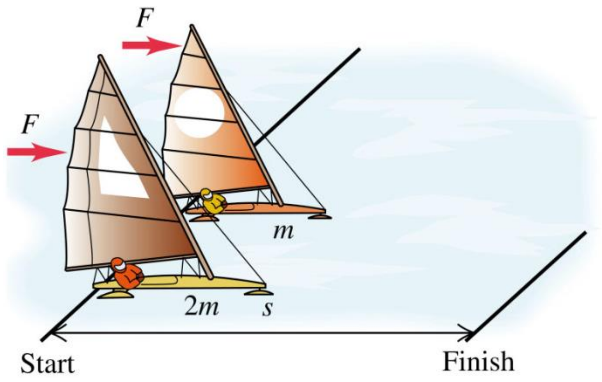
ball med masse m=M: $K_1 = Mgh \quad \frac{1}{2} M v_1^2 = Mgh \quad v_1^2 = 2gh$

ball med masse m=$2M$: $K_1 = 2Mgh \quad \frac{1}{2} 2M v_1^2 = 2Mgh \quad v_1^2 = 2gh$

http://pingo.upb.de/ access number: 8178

To isbåter, en med masse *m* og en med masse *2m*, kjører på en friksjonsfri, horisontal, frossen innsjø. Begge båtene starter fra ro, og vinden utøver samme, konstante kraft på begge.
Hvilken isbåt krysser mållinjen med mest kinetisk energi K ?

1. Isbåten med masse *m*
2. Isbåten med masse *2m*
3. De har den samme K idet de når mållinjen.



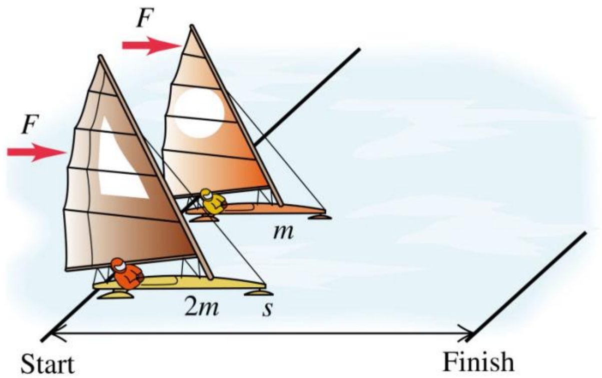
arbeid-energi teorem: $W_{0,1} = \int_{x_0}^{x_1} F_{\text{net}}\, dx = K_1 - K_0 = K_1$

siden kraften er den samme, er også
den kinetiske energien den samme

http://pingo.upb.de/ access number: 8178

To isbåter, en med masse *m* og en med masse *2m*, kjører på en friksjonsfri, horisontal, frossen innsjø. Begge båtene starter fra ro, og vinden utøver samme, konstante kraft på begge.
Hvilken kommer først fram?

1. Isbåten med masse *m*
2. Isbåten med masse *2m*
3. De kommer fram samtidig.



$$K_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

$$m v_1^2 = 2 m v_2^2$$

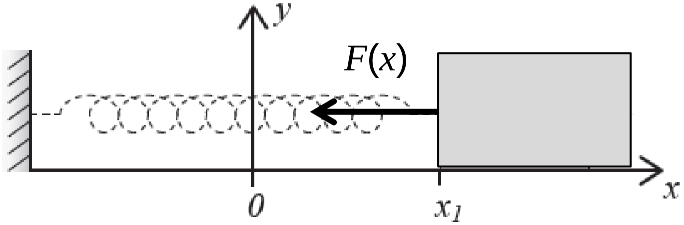
$$v_1 = \sqrt{2} v_2$$

isbåten med masse *m* er raskere og kommer først fram.

Eksempel: En kloss er festet til en fjær og beveger seg uten friksjon og luftmotstand

Fjærkraft: $F_k = -kx$

bare posisjonsavhengig
(likevektsposisjon: $x = 0$)



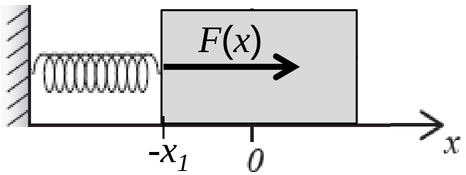
$F(x)$: kraft fra fjæren på klossen

arbeid av fjærkraften på klossen når den beveger seg fra likevektsposisjon $x = 0$ til posisjon $x = x_1$:

$$W = \int_0^{x_1} F_k(x)\,dx = -k\int_0^{x_1} x\,dx = -\frac{1}{2}kx_1^2$$

arbeid er negativ: fjæren bremser klossen i sin bevegelse til høyre.

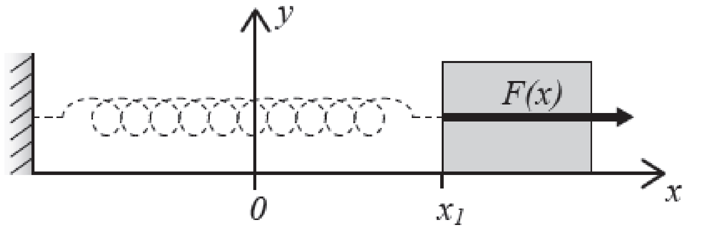
arbeid av fjærkraften på klossen når den beveger seg fra $x = x_1$ til likevektsposisjonen ved $x = 0$:



$$W = \int_{-x_1}^{0} F_k(x)\,dx = -k\int_{-x_1}^{0} x\,dx = -k\left(0 - \frac{1}{2}(-x_1)^2\right) = \frac{1}{2}kx_1^2$$

arbeid er positiv: fjæren akselererer klossen i sin bevegelse til høyre.

hvis jeg trekker på klossen



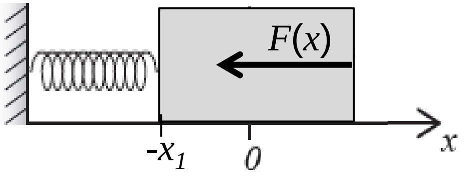
jeg bruke en kraft som er motkraft til fjærkraften: $F_k = kx$

min arbeid på klossen for å bevege den
fra likevektsposisjon $x = 0$ til posisjon $x = x_1$:

$$W = k\int_0^{x_1} x\,dx = \frac{1}{2}kx_1^2$$

jeg gjør positiv arbeid på klossen

hvis jeg dytter klossen inn i fjæren



min arbeid på klossen for å bevege den
fra likevektsposisjon $x = 0$ til posisjon $x = -x_1$:

$$W = k\int_0^{-x_1} x\,dx = \frac{1}{2}k(-x_1)^2 = \frac{1}{2}kx_1^2$$

jeg gjør positiv arbeid på klossen

hva hvis jeg bare holder klossen?

http://pingo.upb.de/ access number: 8178

Mens du går er det friksjonskraften fra gulvet på føttene dine som akselererer deg framover. Denne friksjonskraften gjør

1. positivt arbeid
2. negativt arbeid
3. ingen arbeid

Kontaktpunktet mellom fot og veien er i ro mens den statiske friksjonskraften virker på foten.
$\Rightarrow$ Friksjonskraften gjør ingen arbeid.

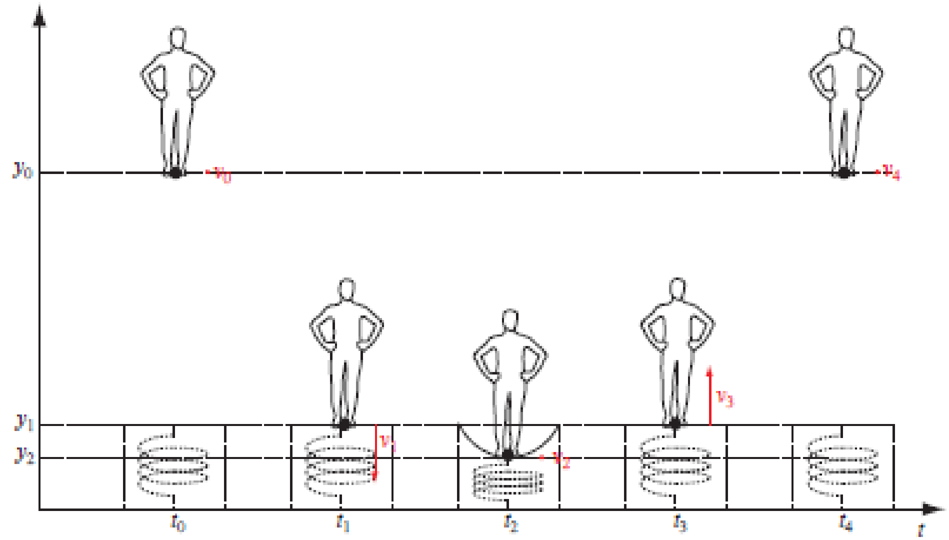
Bare hvis du sklir beveger foten seg motsatt til kraftretning og friksjon gjør negativt arbeid.

Eksempel:

En person (m=70 kg) hopper fra en høyde y_0=2.5 m på en trampoline som kan beskrives med en fjærkonstant k=10000 N/m. Finn:

- farten når han treffer på trampolinen
- maksimal nedbøyning av trampolinen

Du kan se bort fra luftmotstand og friksjon.



vi definerer aksen:

- person starter ved høyden y_0=2.5 m
- trampoline befinner seg ved y_1=0 m
- maksimal utslag ved $y_2 < 0$

vi deler bevegelsen i fire faser:

- person i luften
- person i kontakt med trampolinen på veien ned
- person i kontakt med trampolinen på veien opp
- person igjen i luften

vi er ikke interessert i bevegelsen som funksjon av tiden

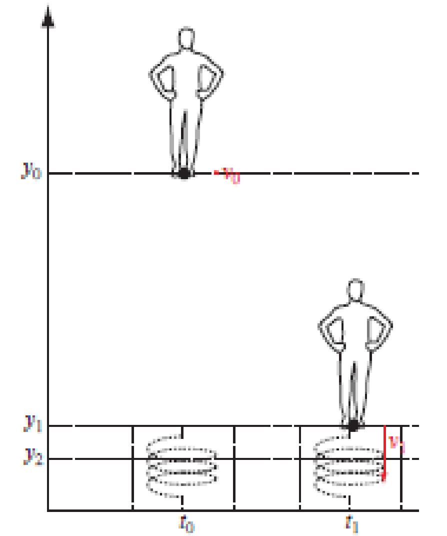
vi trenger sammenheng mellom posisjon og fart:

- fart når person er ved y=0 m
- posisjon i nederste punkt y_2 når farten er null

vi bruker arbeid-energi teorem istedenfor bevegelseslover

fase 1:

- start ved høyden y_0 = 2.5 m med fart v_0 = 0 m/s
- slutt ved høyden y_1 = 0 m med ukjent fart v_1



eneste kraft: gravitasjon: $F_{\text{net}} = F_G = -mg$

arbeid-energi teorem: $W_{0,1} = K_1 - K_0$

kinetisk energi $K_0 = \frac{1}{2} m v_0^2 = 0$

kinetisk energi $K_1 = \frac{1}{2} m v_1^2$

arbeid $W_{0,1} = \int_{y_0}^{y_1} F_G \, dy = -mg(y_1 - y_0) = mgy_0$

$$W_{0,1} = 70\,\text{kg} \cdot 9.81\,\text{m/s}^2 \cdot 2.5\,\text{m} \approx 1717\,\text{J}$$

gravitasjon gjør positivt arbeid
på kroppen $\Rightarrow$ kinetisk energi øker

arbeid-energi teorem:

$$mgy_0 = \frac{1}{2} m v_1^2$$

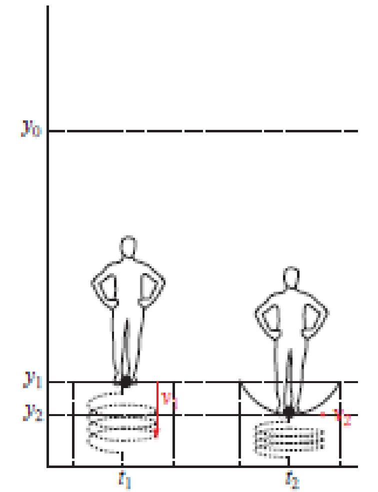
$$v_1 = \pm\sqrt{2gy_0}$$

$$|v_1| = \sqrt{2 \cdot 9.81\,\text{m/s} \cdot 2.5\,\text{m}} \approx 7.0\,\text{m/s}$$

fase 2:
- start ved høyden y_1 = 0 m med fart v_1
- slutt ved ukjent høyden y_2 < 0 med fart v_2 = 0 m/s

krefter:
- gravitasjon: $F_G = -mg$
- fjærkraft: $F_k(y) = -k(y - y_1) = -ky$

nettokraft bare posisjonsavhengig



arbeid $W_{1,2} = \int_{y_1}^{y_2} F_{\text{net}}\, dy = \int_{0}^{y_2} (-mg - ky)\, dy = -mgy_2 - \frac{1}{2} k y_2^2$

gravitasjon gjør positivt arbeid: $W_{G,1,2} = -mgy_2 > 0$

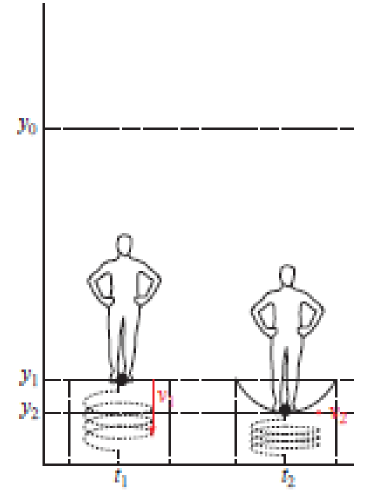
fjærkraft gjør negativt arbeid: $W_{k,1,2} = -\frac{1}{2} k y_2^2 < 0$

arbeid-energi teorem: $W_{1,2} = K_2 - K_1$

kinetisk energi $K_1 = \frac{1}{2} m v_1^2 = mgy_0$

kinetisk energi $K_2 = \frac{1}{2} m v_2^2 = 0$

arbeid-energi teorem: $W_{1,2} = K_2 - K_1$



$$-mgy_2 - \frac{1}{2}ky_2^2 = 0 - mgy_0$$

$$y_2^2 + \frac{2mg}{k}y_2 - \frac{2mgy_0}{k} = 0$$ andregradsligning

$$y_2 = -\frac{mg}{k} \pm \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{2mgy_0}{k}}$$

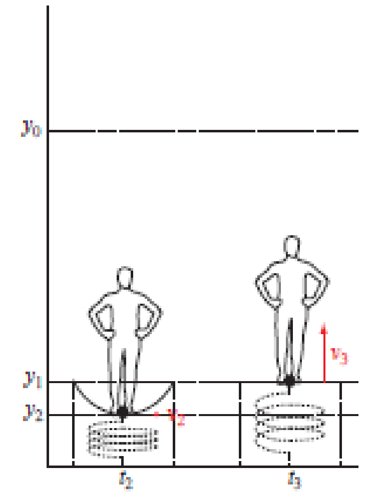
vi vurderer den negative løsningen: $$y_2 = -\frac{mg}{k} - \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{2mgy_0}{k}} \approx -0.66\,\mathrm{m}$$ maksimal utslag

arbeid fra tyngdekraften fra y_0 til y_1: $W_{G,0,1} = mgy_0 \approx 1717\,\mathrm{J}$

arbeid fra tyngdekraften fra y_1 til y_2: $W_{G,1,2} = -mgy_2 \approx 452\,\mathrm{J}$

arbeid fra fjærkraften fra y_1 til y_2: $W_{k,1,2} = -\frac{1}{2}ky_2^2 \approx -2169\,\mathrm{J}$

fase 3:
- start ved høyden y_2 = -0.66 m med fart v_2 = 0 m/s
- slutt ved høyden y_1 = 0 m



krefter:
- gravitasjon: $F_G = -mg$
- fjærkraft: $F_k(y) = -ky$

arbeid $$W_{2,1} = \int_{y_2}^{y_1} F_{\text{net}}\, dy = -\int_{y_1}^{y_2} F_{\text{net}}\, dy = -W_{1,2} = mgy_2 + \frac{1}{2}ky_2^2$$

gravitasjon gjør negativt arbeid: $W_{G,1,2} = mgy_2 < 0$

fjærkraft gjør positivt arbeid: $W_{k,1,2} = \frac{1}{2}ky_2^2 > 0$

arbeid-energi teorem: $W_{2,1} = K_1 - K_2$

kinetisk energi $K_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 = 0$

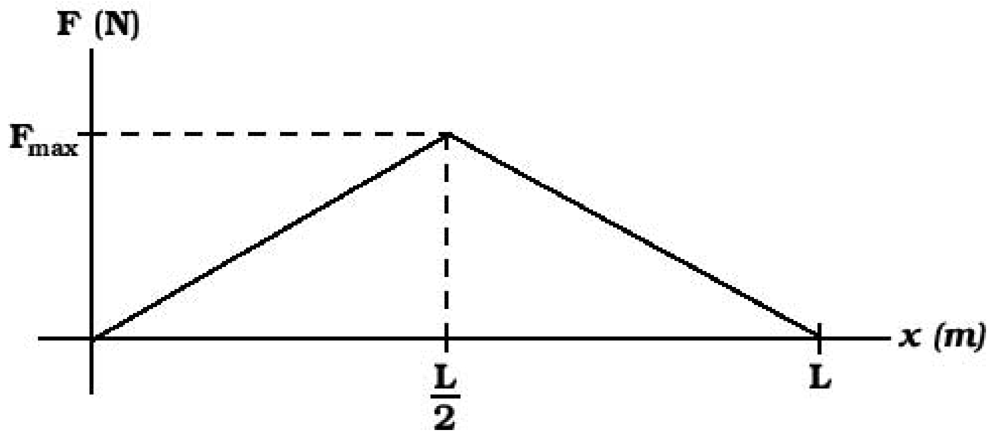
kinetisk energi $K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 = mgy_0$

kinetisk energi på veien opp er
den samme som på veien ned,
men hastighet har motsatt fortegn: $v_3 = -v_1$

http://pingo.upb.de/ access number: 8178

En partikkel starter i ro ved $x = 0$ og beveger seg til $x = L$ mens kraften $F(x)$ virker.
Hva er partikkelens kinetisk energi ved $x = L/2$ og $x = L$?

1. $F_{\max}\dfrac{L}{2}$ og $F_{\max}L$
2. $F_{\max}\dfrac{L}{4}$ og 0
3. $F_{\max}L$ og 0
4. $F_{\max}\dfrac{L}{4}$ og $F_{\max}\dfrac{L}{2}$
5. $F_{\max}\dfrac{L}{2}$ og $F_{\max}\dfrac{L}{4}$



arbeid $\leftrightarrow$ areal under kurven

$$W_{0,1} = K_1 - K_0 = K_1$$

$$x = \frac{L}{2}: \quad W = \frac{1}{2}F_{\max}\frac{L}{2} = F_{\max}\frac{L}{4}$$

$$x = L: \quad W = 2F_{\max}\frac{L}{4} = F_{\max}\frac{L}{2}$$

Arbeid-energi teoremet i tre dimensjoner

Vi tar utgangspunkt i Newtons andre lov:

$$\vec{F}_{\text{net}} = m\vec{a}$$

$$\vec{F}_{\text{net}} \cdot \vec{v} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}$$

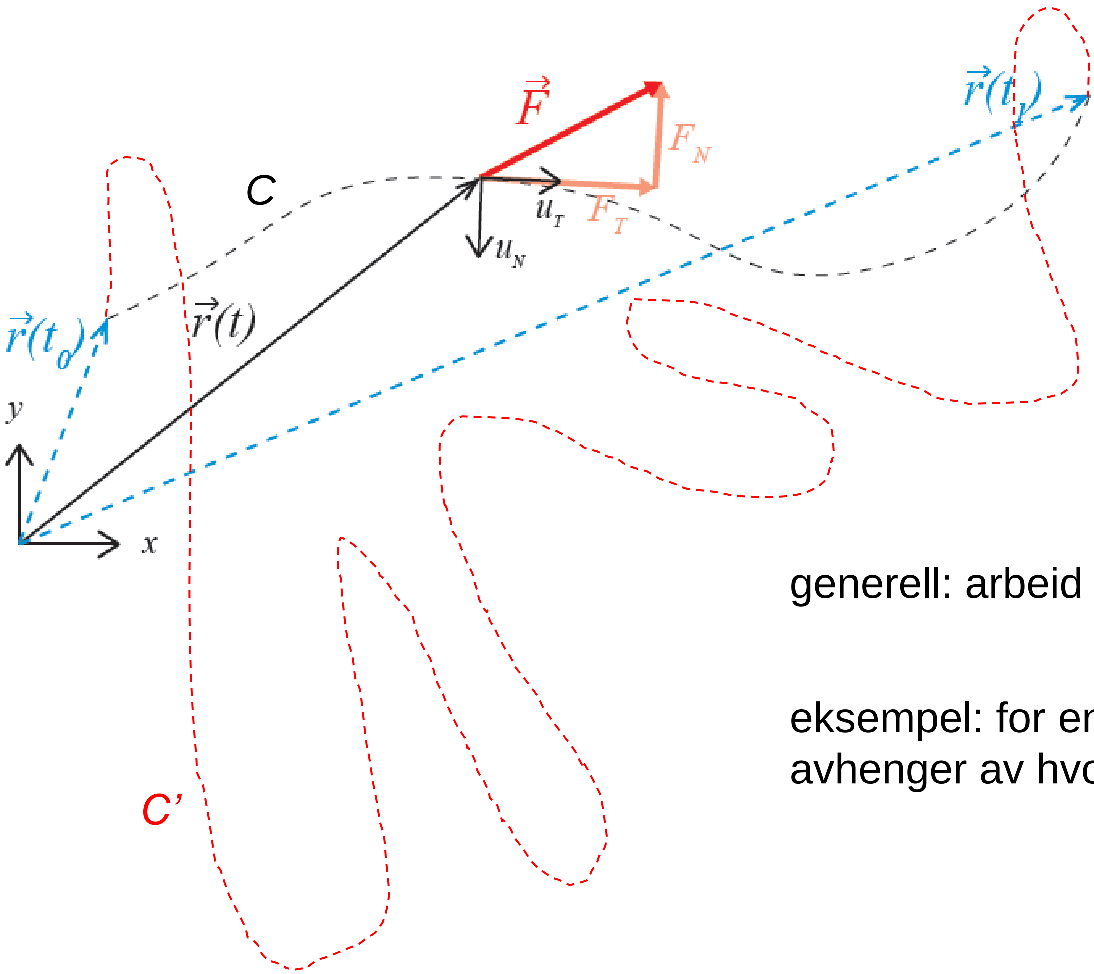
$$\vec{F}_{\text{net}} \cdot \vec{v} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\vec{v} \cdot \vec{v}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_{\text{net}} \cdot \vec{v}\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) dt = \frac{1}{2}mv^2(t_1) - \frac{1}{2}mv^2(t_0)$$

$W_{0,1} = K_1 - K_0$ arbeid-energi teorem

kinetisk energi: $K = \frac{1}{2}mv^2$ arbeid: $W_{0,1} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_{\text{net}} \cdot \vec{v}\, dt$

arbeid: $W_{0,1} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_{\text{net}} \cdot \vec{v}\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_{\text{net}} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}\, dt = \int_0^1 \vec{F}_{\text{net}} \cdot d\vec{r} \; = \int_C \vec{F}_{\text{net}} \cdot d\vec{r}$



det er mange veier for å komme fra 0 til 1

kurveintegral langs en kurve *C*

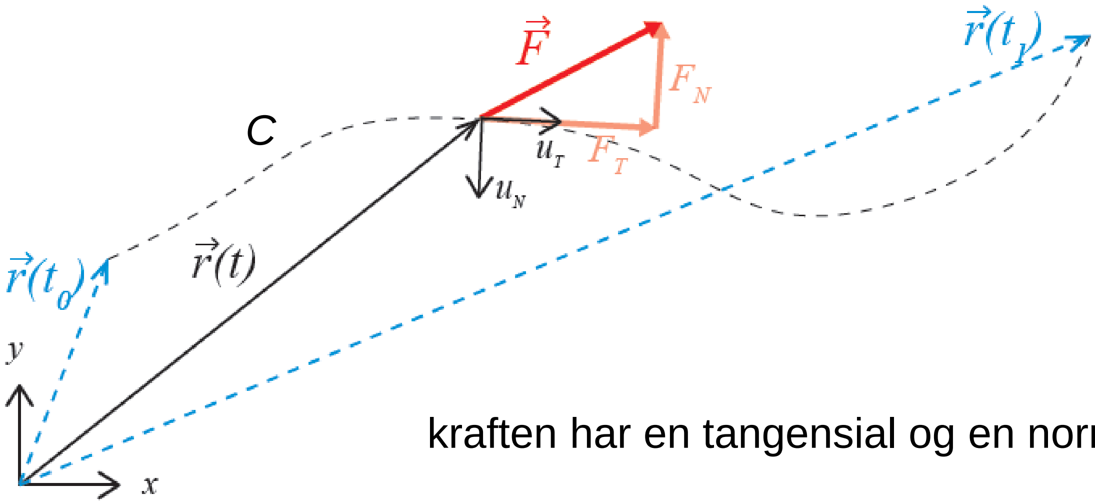
start i $\vec{r}(t_0)$

slutt i $\vec{r}(t_1)$

generell: arbeid avhenger av veien fra $\vec{r}(t_0)$ til $\vec{r}(t_1)$

eksempel: for en friksjonskraft vil arbeid avhenger av hvor lenge veien er.

arbeid: $W_{0,1} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_{\text{net}} \cdot \vec{v}\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_{\text{net}} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}\, dt = \int_0^1 \vec{F}_{\text{net}} \cdot d\vec{r} = \int_C \vec{F}_{\text{net}} \cdot d\vec{r}$



vi velger en vei C

kraften har en tangensial og en normal komponent: $\vec{F} = F_T\, \hat{u}_T + F_N\, \hat{u}_N$

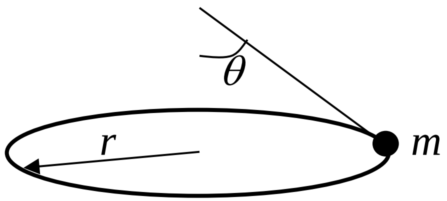
hastighetsvektor er i tangensial retning: $\vec{v} = v\hat{u}_T$

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = (F_T\, \hat{u}_T + F_N\, \hat{u}_N) \cdot v\hat{u}_T = F_T\, v$$

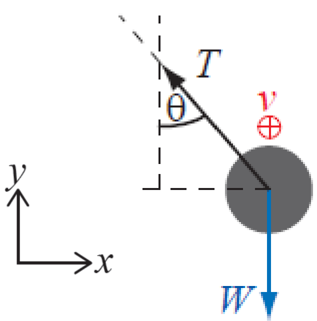
$$W = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F} \cdot \vec{v}\, dt = \int_{t_0}^{t_1} F_T\, v\, dt = \int_{t_0}^{t_1} F_T\, \frac{ds}{dt}\, dt = \int_C F_T\, ds$$

http://pingo.upb.de/ access number: 8178

Du svinger et legeme med masse m i en horisontal sirkel med radius r. Vi ser bort fra luftmotstanden. Hva er arbeidet utført på klossen i løpet av en svingeperiode?



1. $W = mg\sin(\theta)\,2\pi r$
2. $W = mg\cos(\theta)\,2\pi r$
3. $W = mg\,2\pi r$
4. $W = m\left(\frac{v^2}{r}\right)2\pi r$
5. $W = 0$



Nettokraft i x retning:
sentripetalkraft som holder massen på sirkelbanen

Kraft og vei er ortogonale i hvert punkt:

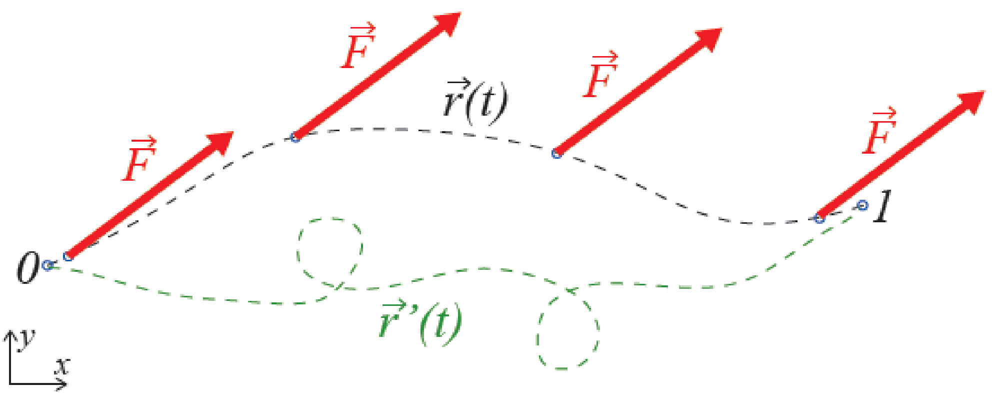
$$W = \int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_C \left(-m\frac{v^2}{R}\right)\hat{u}_N \cdot ds\,\hat{u}_T = 0$$

Arbeidet av netto kraft blir null.

Arbeid av en konstant kraft

$$W = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \vec{F} \cdot \int_{t_0}^{t_1} \vec{v} dt = \vec{F} \cdot \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \vec{r} dt = \vec{F} \cdot \left(\vec{r}(t_1) - \vec{r}(t_0) \right) = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}$$

For en konstant kraft er arbeidet ikke avhengig av veien:



En kraft med denne egenskapen heter **konservativ**.

eksempel for en konservativ kraft: gravitasjon

generell: krefter som bare avhenger av posisjonen

eksempler for krefter som er ikke konservativ: friksjon, luftmotstand

generell: krefter som er hastighetsavhengig