Arbeid og potensiell energi

02.03.2015

Arbeid-energi teorem

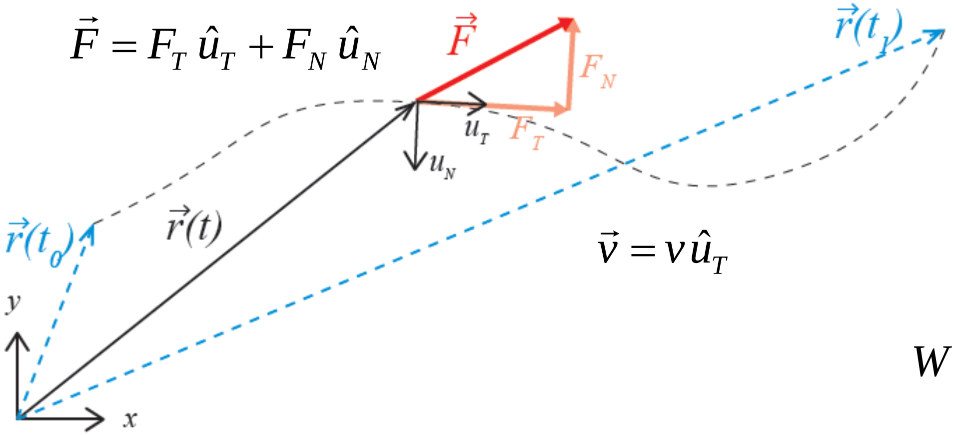
arbeid: $W_{0,1} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_{\text{net}} \cdot \vec{v}\, dt$ kinetisk energi $K = \frac{1}{2} m v^2$ $W_{0,1} = K_1 - K_0$

$$W_{0,1} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_{\text{net}} \cdot \vec{v}\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_{\text{net}} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}\, dt = \int_C \vec{F}_{\text{net}} \cdot d\vec{r}$$

kurveintegral langs en kurve *C*

start i $\vec{r}(t_0)$, slutt i $\vec{r}(t_1)$

$$\vec{F} = F_T\, \hat{u}_T + F_N\, \hat{u}_N$$



$$\vec{v} = v\, \hat{u}_T$$

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = (F_T\, \hat{u}_T + F_N\, \hat{u}_N) \cdot v\, \hat{u}_T = F_T\, v$$

$$W = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F} \cdot \vec{v}\, dt = \int_{t_0}^{t_1} F_T\, v\, dt = \int_{t_0}^{t_1} F_T \frac{ds}{dt}\, dt = \int_C F_T\, ds$$

mange veier fra $\vec{r}(t_0)$ til $\vec{r}(t_1)$

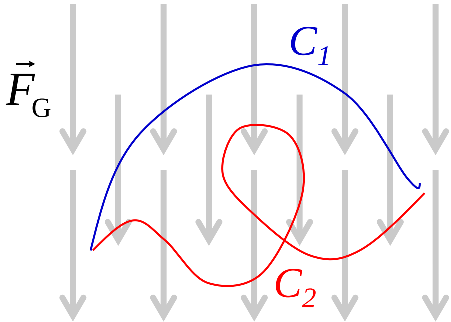
generell: arbeid er avhengig av veien !

konservativ kraft:
- ikke hastighetsavhengig
- arbeid uavhengig av veien

Konservative krefter

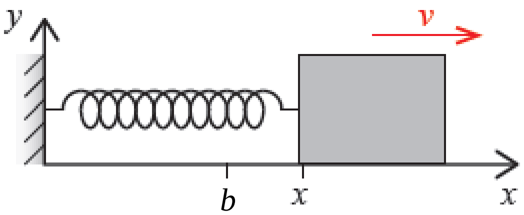
gravitasjon: $\vec{F}_{\mathrm{G}} = -\gamma \frac{mM}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} = -\gamma \frac{mM}{r^2}\hat{u}_r$

på jorden: $\vec{F}_{\mathrm{G}} = -mg\,\hat{j}$



arbeid ikke avhengig av veien

fjærkraft: $F(x) = -k(x-b)$



ikke-konservative krefter:

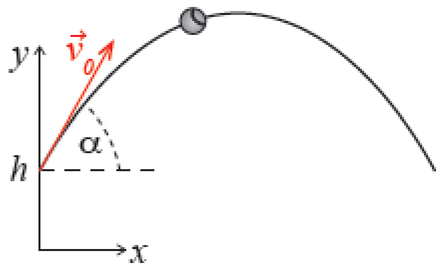
luftmotstand: $\vec{F}_{\mathrm{D}} = -D|\vec{v}|\vec{v}$

friksjon: $\vec{F}_f = -\mu_d |\vec{N}| \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

hastighetsavhengige krefter

arbeid avhengig av veien

skrått kast uten luftmotstand



gravitasjon: $\vec{G} = -mg\,\hat{j}$

konstant kraft: $W = \vec{G}\cdot\Delta\vec{r} \;= -mg\,\hat{j}\cdot(\Delta x\,\hat{i} + \Delta y\,\hat{j}) = -mg\Delta y$

arbeid-energi teorem: $W = K_1 - K_0$

$$-mg\Delta y = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$v_1^2 = v_0^2 - 2g(y_1 - y_0)$$

$$v_{x,1}^2 + v_{y,1}^2 = v_{x,0}^2 + v_{y,0}^2 - 2g(y_1 - y_0)$$

ingen horisontal kraft: $v_{x,1} = v_{x,0}$

$$v_{y,1}^2 = v_{y,0}^2 - 2g(y_1 - y_0)$$

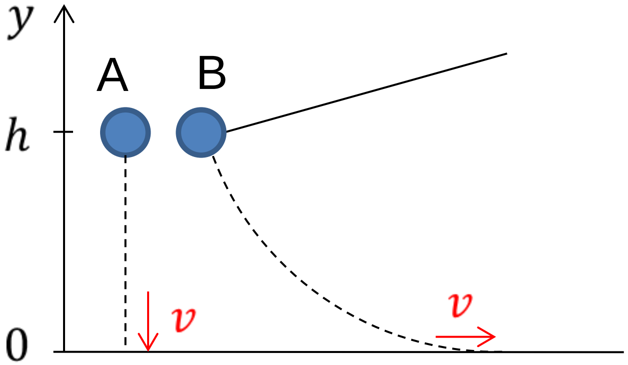
$$v_{y,1} = \pm\sqrt{v_{y,0}^2 - 2g(y_1 - y_0)}$$

Hva hvis bevegelsen er betinget ?

http://pingo.upb.de/ access number: 8178

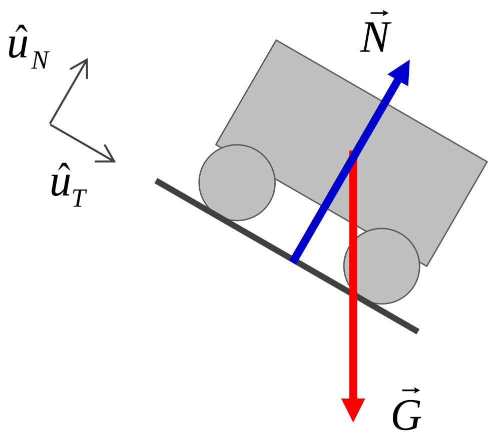
En ball A med masse m faller fra en høyde h.
Et pendel B med samme masse m svinger fra samme høyde h. Vi ser bort fra luftmotstanden.
Hvilken ball har større fart ved høyden $y = 0$?

1. $|v_A| < |v_B|$
2. $|v_A| = |v_B|$
3. $|v_A| > |v_B|$



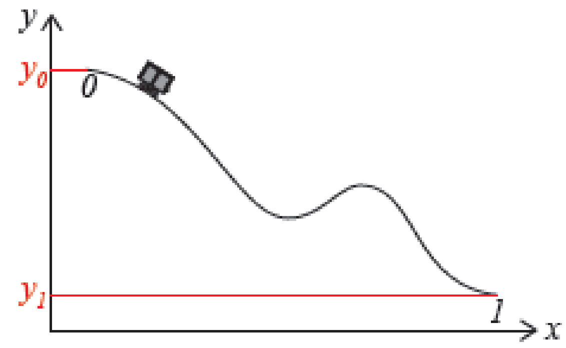
http://techtv.mit.edu/videos/1491-potential-energy-to-kinetic-energy

Betinget bevegelse: berg-og-dal bane



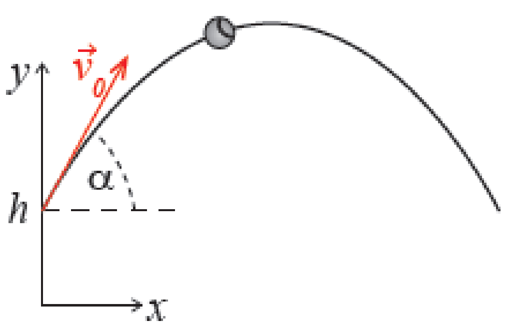
vi ser bort fra friksjon
og luftmotstand

normalkraften varierer
i retning og størrelse:
- vinkel med horisontale
- krumningsradius



normalkraften og vei er ortogonal i hver punkt
$\Rightarrow$ normalkraften gjør ingen arbeid

$$W = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_{\text{net}} \cdot \vec{v}\, dt = \int_{t_0}^{t_1} (\vec{N} + \vec{G}) \cdot \vec{v}\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \vec{G} \cdot \vec{v}\, dt = \int_{0}^{1} \vec{G} \cdot d\vec{r} = -mg\, \hat{j} \cdot \left(\vec{r}(t_1) - \vec{r}(t_0) \right) = -mg\,(y_1 - y_0)$$

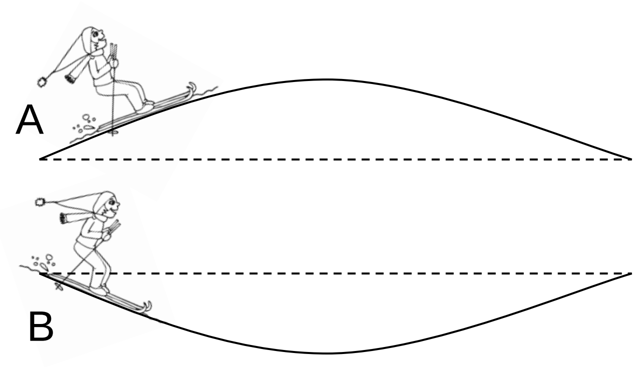


akkurat det samme som for skrått kast

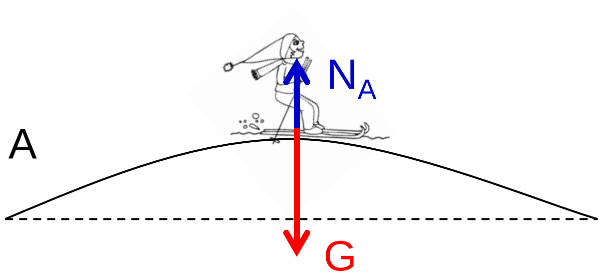
Hva hvis vi inkluderer friksjon ?

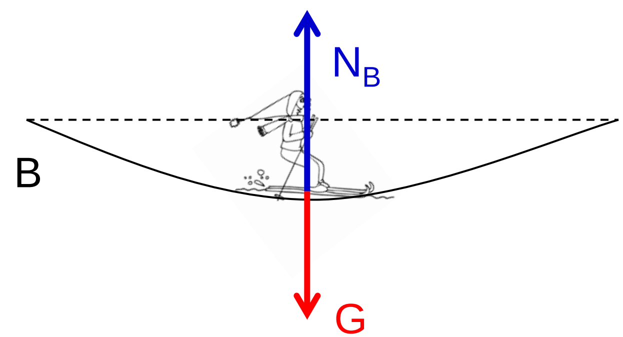
http://pingo.upb.de/ access number: 8178

En langrennsløper kan velge å skli over en kolle (A) eller gjennom en senkning (B).
I hvilket tilfelle gjør friksjonskraften større arbeid langs banen?



1. $|W_A| < |W_B|$
2. $|W_A| = |W_B|$
3. $|W_A| > |W_B|$





$$N_A - G = ma_y = -m\frac{v^2}{R}$$

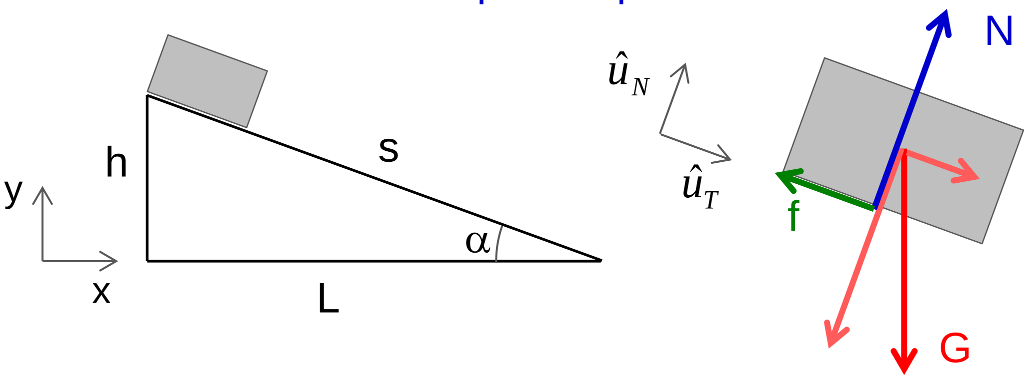
$$N_A = mg - m\frac{v^2}{R} < mg$$

$$N_B - G = ma_y = m\frac{v^2}{R}$$

$$N_B = mg + m\frac{v^2}{R} > mg$$

$$f_B = \mu N_B > \mu N_A = f_A$$

hvor rask sklir en bok på skråplan?



hastighet i tangensialretning: $\vec{v} = v\,\hat{u}_T$

$$W_G = \int_{t_0}^{t_1} \vec{G}\cdot\vec{v}dt = mg\sin(\alpha)\int_{t_0}^{t_1} vdt = mg\sin(\alpha)s = mgh$$

$$W_N = \int_{t_0}^{t_1} \vec{N}\cdot\vec{v}\,dt = 0$$

$$W_f = \int_{t_0}^{t_1} \vec{f}\cdot\vec{v}\,dt = -\mu mg\cos(\alpha)\int_{t_0}^{t_1} v\,dt$$

$$= -\mu mg\cos(\alpha)s = -\mu mgL$$

$$W_{\text{net}} = mg(h - \mu L)$$

gravitasjon:

$$\vec{G} = -mg\,\hat{j} = mg\sin\alpha\,\hat{u}_T - mg\cos\alpha\,\hat{u}_N$$

normalkraft:

N2L i y retning: $\vec{N} = mg\cos\alpha\,\hat{u}_N$

friksjon:

$$\vec{f} = -\mu N\,\hat{u}_T = -\mu\,mg\cos\alpha\,\hat{u}_T$$

arbeid-energi teorem:

$$mg(h - \mu L) = \frac{1}{2}mv_1^2$$

$$v_1^2 = 2g(h - \mu L)$$

betingelse: $h - \mu L \geq 0$

$$\frac{h}{L} - \mu \geq 0$$

$$\tan(\alpha) \geq \mu$$

Effekt: arbeid per tidsenhet (momentant)

arbeid i et kort tidsintervall: $\Delta W = \int_t^{t+\Delta t} \vec{F} \cdot \vec{v}\, dt$

i et kort intervall er kraften konstant:

$$\Delta W = \vec{F} \cdot \int_t^{t+\Delta t} \vec{v}\, dt = \vec{F} \cdot \int_t^{t+\Delta t} \frac{d}{dt} \vec{r}\, dt = \vec{F} \cdot \left(\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t) \right) = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}$$

effekt: $P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{F} \cdot \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \vec{F} \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \vec{F} \cdot \vec{v}$

enhet: 1 Watt = 1 W = 1 J/s = 1 Nm/s

(1 hestekraft = 1 hk = 735.5 W)

arbeid: $W_{0,1} = \int_{t_0}^{t_1} P(t)\, dt$

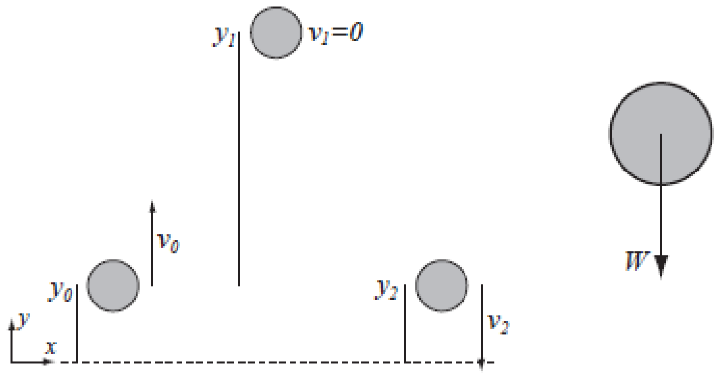
http://pingo.upb.de/ access number: 8178

Reaktoren i et Klingon-romskip har en konstant effekt på 1 GW. Kaptein Worf kjører fullt pådrag og akselererer fra 0 til 30,000 km/s. Hvilket utsagn er riktig?

A. Akselerasjonen er større ved lav fart.
B. Akselerasjonen er konstant.
C. Akselerasjonen er større ved høy fart.

effekt: $$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{F} \cdot \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Arbeid i tyngdefelt



Jeg kaster en ball opp i luften med hastighet v_0.

kinetisk energi: $K_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$

på toppen av banen: $v_1 = 0$ $\quad K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 = 0$

Hva har skjedd med energien?

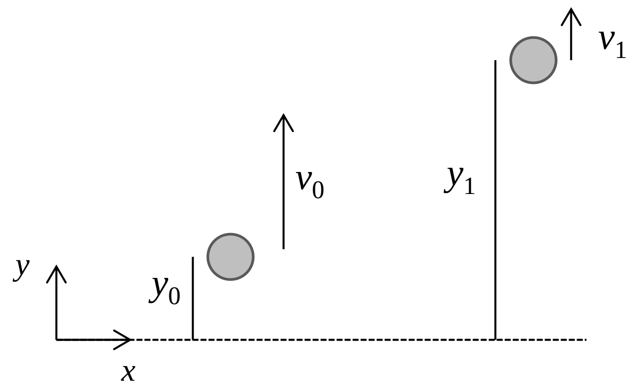
etter ballen har kommet ned igjen: $v_2 = -v_0$ $\quad K_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 = K_0$

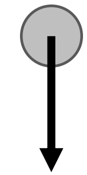
Hvor kommer energien fra?

energi: størrelse som er bevart

arbeid: tilført mekanisk energi

Arbeid i tyngdefelt





$$\vec{F} = -mg\,\hat{j}$$

arbeid: $W_{0,1} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F} \cdot \vec{v}\, dt = -mg(y_1 - y_0)$

arbeid-energi teorem:

$$W_{0,1} = K_1 - K_0$$

$$mgy_0 - mgy_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$mgy_0 + \frac{1}{2}mv_0^2 = mgy_1 + \frac{1}{2}mv_1^2$$

$$U_0 + K_0 = U_1 + K_1$$

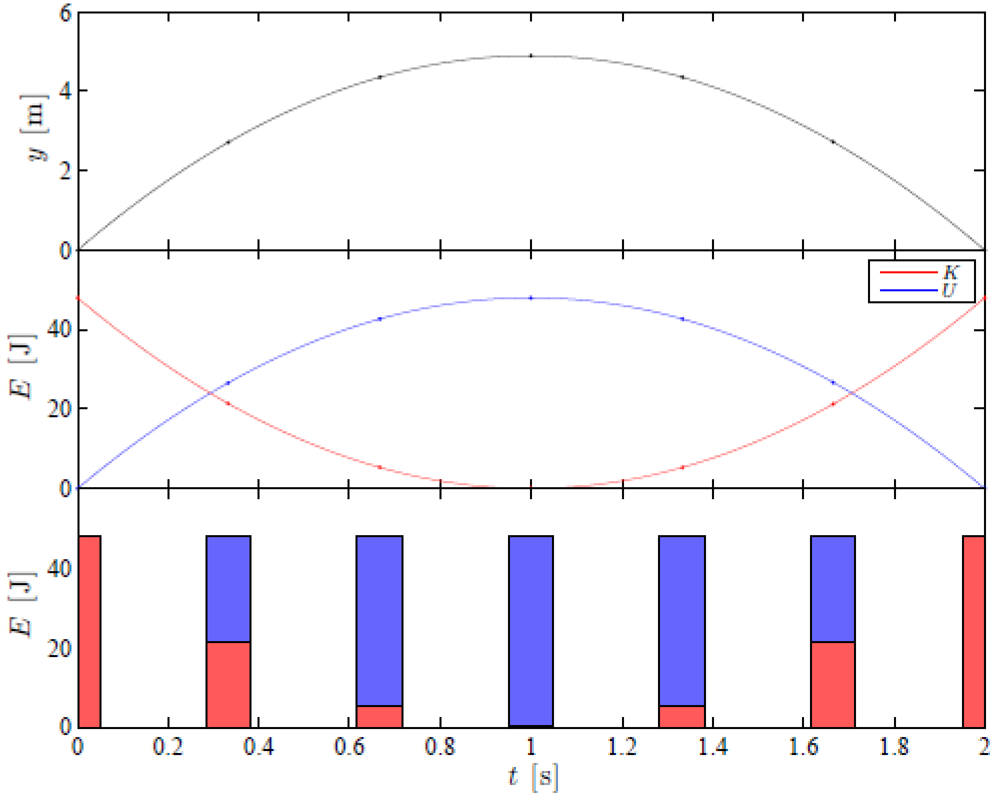
kinetisk energi: $K = \frac{1}{2}mv^2$

$U = mgy$ har samme enhet $\Rightarrow$ energi

potensiell energi

total energi er konstant: $E = U + K$

vertikal kast



kinetisk energi $K = \frac{1}{2} m v^2$

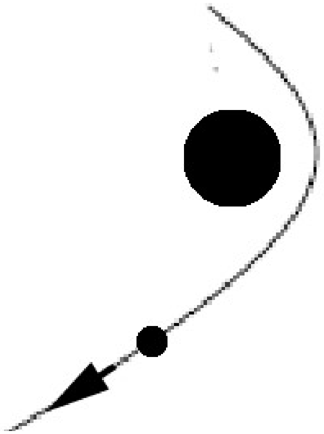
potensiell energi $U = mgy$

total energi er konstant: $E = U + K$

energibevaring

http://pingo.upb.de/ access number: 8178

En komet er påvirket av solens gravitasjon.
Mens kometen beveger seg bort fra solen
er forandringen i den potensielle energien



1. positiv
2. null
3. negativ

gravitasjonsraft fra solen på kometen rettet mot solen
$\Rightarrow$ gravitasjonskraft gjør negativt arbeid på kometen

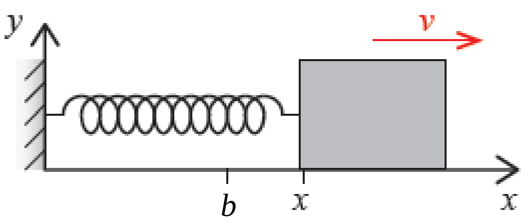
$$K_0 + U_0 = K_1 + U_1 = E$$

$$W_{0,1} = K_1 - K_0 = U_0 - U_1 < 0$$

$$U_1 > U_0$$

Fjær

fjærkonstant *k*
likevektslengde *b*



$$F(x) = -k(x-b)$$

(vi ser bort fra friksjon og luftmotstand)

arbeid for å bevege klossen fra x_0 til x_1:

$$W_{0,1} = \int_{x_0}^{x_1} F(x)\,dx = -k\int_{x_0}^{x_1}(x-b)\,dx = -k\int_{x_0-b}^{x_1-b} x'\,dx' = -k\left(\frac{1}{2}(x_1-b)^2 - \frac{1}{2}(x_0-b)^2\right)$$

$$x' = x - b$$

arbeid-energi teorem:

$$W_{0,1} = K_1 - K_0$$

$$\frac{1}{2}k(x_0-b)^2 - \frac{1}{2}k(x_1-b)^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}k(x_0-b)^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}k(x_1-b)^2$$

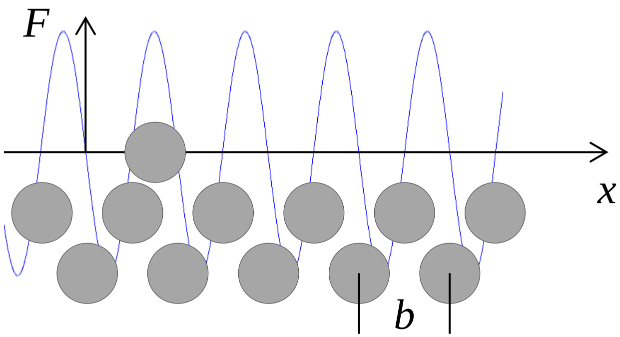
$$K_0 + U_0 = K_1 + U_1$$

potensiell energi for en fjær:

$$U(x) = \frac{1}{2}k(x-b)^2$$

potensiell energi er
avhengig av kraften

Periodisk kraft mellom atomer



$$F(x) = -F_0 \sin(\frac{2\pi x}{b})$$

arbeid for å bevege atomet fra x_0 til x_1:

$$W_{0,1} = \int_{x_0}^{x_1} F(x)\,dx = -F_0 \int_{x_0}^{x_1} \sin(\frac{2\pi x}{b})\,dx \qquad x' = \frac{2\pi x}{b} \qquad dx' = \frac{2\pi}{b}\,dx$$

$$W_{0,1} = -F_0 \frac{b}{2\pi} \int_{\frac{2\pi x_0}{b}}^{\frac{2\pi x_1}{b}} \sin(x')\,dx' = -\frac{F_0 b}{2\pi}\left(-\cos(\frac{2\pi x_1}{b}) + \cos(\frac{2\pi x_0}{b})\right) = \frac{F_0 b}{2\pi}\cos(\frac{2\pi x_1}{b}) - \frac{F_0 b}{2\pi}\cos(\frac{2\pi x_0}{b})$$

$$W_{0,1} = K_1 - K_0$$

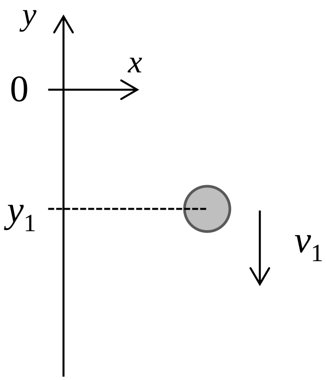
$$\frac{F_0 b}{2\pi}\cos(\frac{2\pi x_1}{b}) - \frac{F_0 b}{2\pi}\cos(\frac{2\pi x_0}{b}) = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$U(x) = -\frac{F_0 b}{2\pi}\cos(\frac{2\pi x}{b})$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{F_0 b}{2\pi}\cos(\frac{2\pi x_0}{b}) = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{F_0 b}{2\pi}\cos(\frac{2\pi x_1}{b})$$

negativ potensiell energi?

$$K_0 + U_0 = K_1 + U_1$$



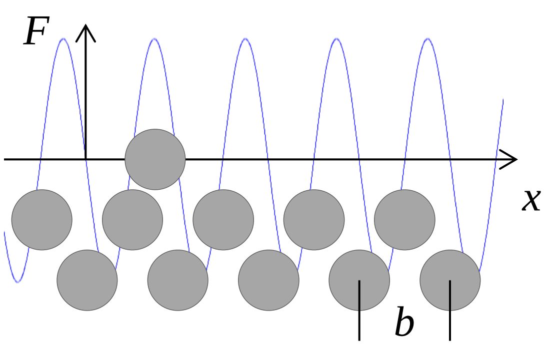
vi kan velge nullpunktet for potensiell energi

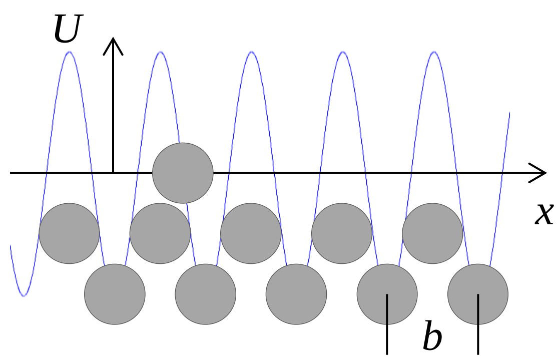
$$U_1 = mgy_1 < 0$$

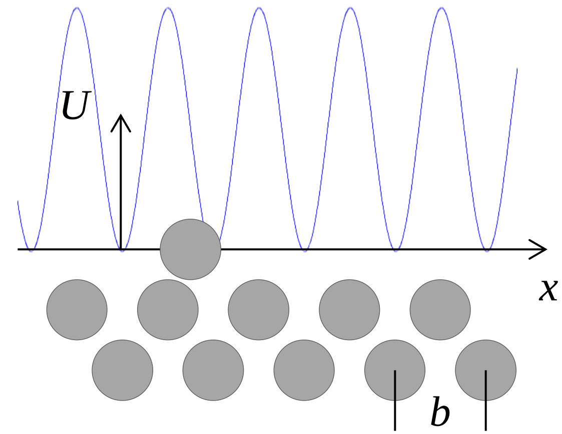
vi velger et annet nullpunkt:

$$U'(x) = \frac{F_0 b}{2\pi}\left(1 - \cos\left(\frac{2\pi x}{b}\right)\right)$$

$$U(x) = -\frac{F_0 b}{2\pi}\cos\left(\frac{2\pi x}{b}\right)$$







$$U' = U + C$$

$$K_0 + U_0' = K_1 + U_1'$$

$$K_0 + U_0 + C = K_1 + U_1 + C$$

$$K_0 + U_0 = K_1 + U_1$$

nullpunkt for potensiell energi:
ingen betydning for energibevaring

kinetisk energi kan ikke være negativ:

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

eksempler: gravitasjon, fjærkraft, periodisk kraft på atomær overflate

kraft er bare posisjonsavhengig

arbeid avhenger av start- og sluttposisjon

arbeid-energi teorem: $W_{0,1} = \int_{x_0}^{x_1} F(x)\,dx = K_1 - K_0$

vi har funnet en funksjon $U(x)$ slik at: $U(x_0) - U(x_1) = K_1 - K_0$

$K_0 + U(x_0) = K_1 + U(x_1)$ energibevaring

potensiell energi: $U(x) = U(x_0) - \int_{x_0}^{x} F(x)\,dx$ potensial til kraften F

$$\frac{dU}{dx} = -F(x)$$

vi kan velge en annen konstant $U(x_0)$
uten konsekvens for kraften

kraft er bare posisjons-avhengig $\Leftrightarrow$ arbeid uavhengig av veien $\Leftrightarrow$ mekanisk energi er bevart $\Leftrightarrow$ $\dfrac{dU}{dx} = -F(x)$ $\Leftrightarrow$ kraft er konservativ vertikal kast: $$U(x) = mgx$$

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} = -mg$$

fjær: $$U(x) = \frac{1}{2}k(x-b)^2$$

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} = -k(x-b)$$

atom: $$U(x) = \frac{F_0 b}{2\pi}\left(1-\cos(\frac{2\pi x}{b})\right)$$

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} = -F_0 \sin\left(\frac{2\pi x}{b}\right)$$

Kraft og potensiell energi:

for en konservativ kraft kan vi finne et potensial slik at: $F(x) = -\frac{dU}{dx}$

arbeid utført av kraften F mellom posisjon x_0 og x_1:

$$W_{0,1} = \int_{x_0}^{x_1} F(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} \left(-\frac{dU}{dx}\right) dx = \int_{x_1}^{x_0} \frac{dU}{dx}\,dx = U(x_0) - U(x_1)$$

hvis F er den eneste kraften: $W_{0,1} = U(x_0) - U(x_1) = K_1 - K_0$

$$E = U(x_0) + K_0 = U(x_1) + K_1 = \text{konstant}$$

energibevaring