Arbeid og potensiell energi

04.03.2015

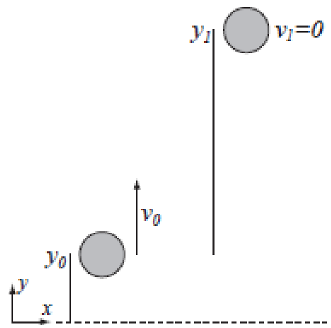
Midtveiseksamen: 26.3.

Pensum: Kap. 1 – 12 i boken

flere lærer på data-lab

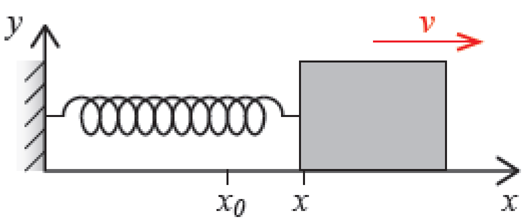
Konservative krefter:

vi kan finne en potensialfunksjon $U(x)$ slik at: $-\frac{dU}{dx} = F(x)$ $\Leftrightarrow$ energibevaring



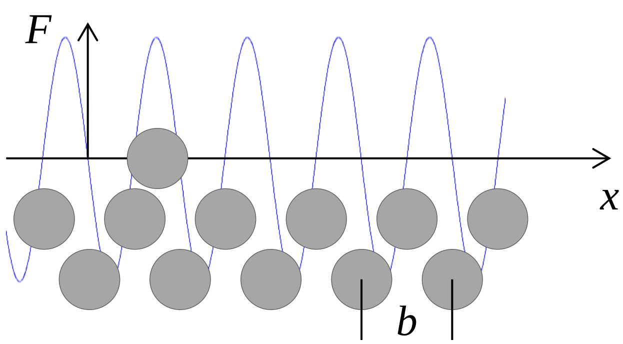
vertikal kast: $U(x) = mgx$

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} = -mg$$



fjær: $U(x) = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2$

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} = -k(x - x_0)$$



atom i krystall: $U(x) = -\frac{F_0 b}{2\pi}\cos(\frac{2\pi x}{b})$

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} = -F_0 \sin\left(\frac{2\pi x}{b}\right)$$

kraft er bare posisjons-avhengig $\Leftrightarrow$ arbeid uavhengig av veien $\Leftrightarrow$ mekanisk energi er bevart $\Leftrightarrow$ $\dfrac{dU}{dx} = -F(x)$ $\Leftrightarrow$ kraft er konservativ

$$\Downarrow$$

potensiell energi: $U(x) = U(x_0) - \int_{x_0}^{x} F(x)\,dx$

potensial til kraften F

vi kan velge nullpunktet x_0
uten konsekvens for kraften

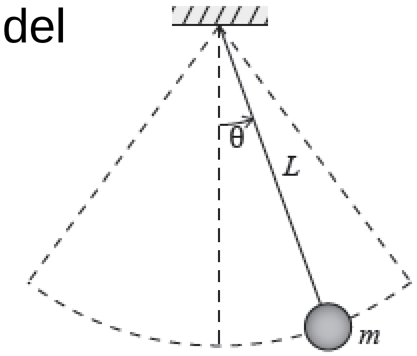
arbeid-energi teorem: $W_{0,1} = \int_{x_0}^{x_1} F(x)\,dx = K(x_1) - K(x_0) = U(x_0) - U(x_1)$

$$K_0 + U_0 = K_1 + U_1 = E$$

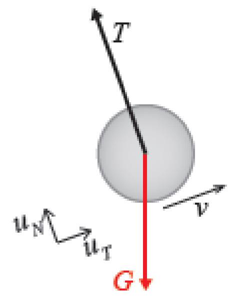
mekanisk energi
er bevart

Eksempel: Pendel

finn $v(\theta)$



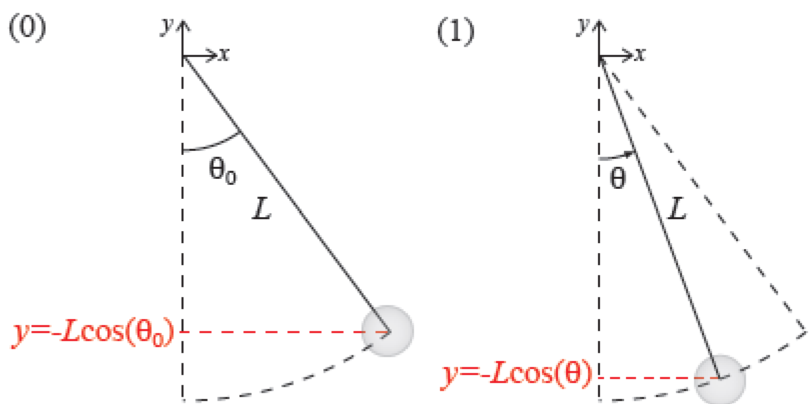
fri-legeme diagram:



snordrag T
tyngdekraft G

snordrag er alltid normal
på bevegelsesretning
$\Rightarrow$ gjør ingen arbeid

potensiell energi
fra tyngdekraften: $U(y) = mgy$



energibevaring:

$$K_0 + U(y_0) = K_1 + U(y_1)$$

$$0 + mgy_0 = \frac{1}{2} m v_1^2 + mgy_1$$

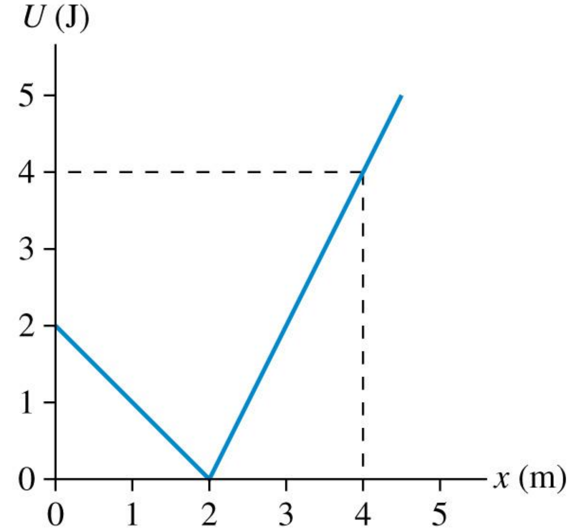
$$mg\left(-L\cos(\theta_0)\right) = \frac{1}{2} m v_1^2 + mg\left(-L\cos(\theta)\right)$$

$$\frac{1}{2} m v_1^2 = mgL\left(\cos(\theta) - \cos(\theta_0)\right)$$

$$v_1 = \sqrt{2gL\left(\cos(\theta) - \cos(\theta_0)\right)}$$

En partikkel beveger seg langs *x*-aksen
med potensiell energi som vist.
Kraften på partikkelen når den er i *x* = *4* m er:

1. 4 N
2. 2 N
3. 1 N
4. -1 N
5. -2 N

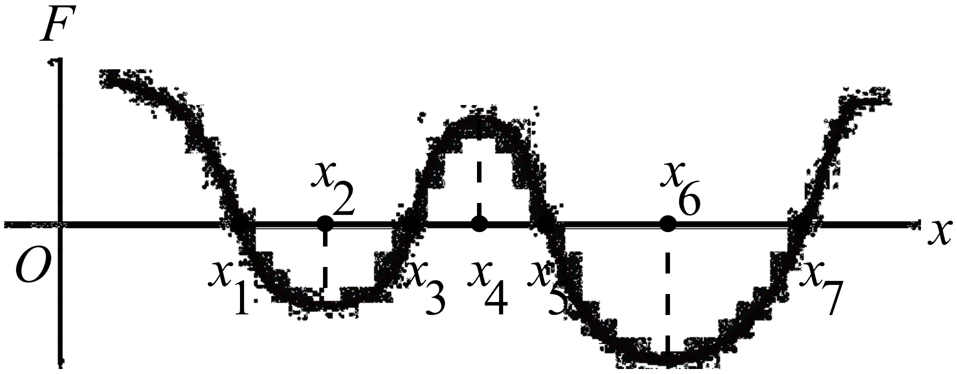


$$F = -\frac{dU}{dx} = -\frac{4\text{J}}{2\text{m}} = -\frac{4\text{Nm}}{2\text{m}} = -2N$$

http://pingo.upb.de/ access number: 8178

Kraften F virker på en partikkel som beveger seg langs x-aksen. Ved hvilke(t) av de avmerkede verdiene for x er den potensielle energien maksimal?

1. Ved x_1 og x_5
2. Ved x_4
3. Ved x_1, x_3, x_5 og x_7
4. Ved x_2 og x_6
5. Ved x_3 og x_7



potensiell energi $U(x)$ har ekstremverdi ved: $\frac{dU}{dx} = -F(x) = 0$

maksimum hvis: $\frac{d^2U}{dx^2} < 0$ $\frac{d^2U}{dx^2} = \frac{d}{dx}\frac{dU}{dx} = -\frac{dF}{dx} < 0$

$\frac{dF}{dx} > 0$ stigning av F positiv i x_3 og x_7

Flere krefter

flere konservative krefter virker på et legeme langs x-aksen: $F_{\text{net}} = \sum_i F_i(x)$

$$W_{0,1} = \int_{x_0}^{x_1} F_{\text{net}}(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} \sum_i F_i(x)\,dx = \sum_i \int_{x_0}^{x_1} F_i(x)\,dx$$

siden kreftene $F_i(x)$ er konservativ: $\frac{dU_i}{dx} = -F_i(x)$

$$W_{0,1} = \sum_i \int_{x_0}^{x_1} \left(-\frac{dU_i}{dx} \right) dx = \sum_i \int_{x_1}^{x_0} \frac{dU_i}{dx}\,dx = \sum_i \left(U_i(x_0) - U_i(x_1) \right) = \sum_i U_i(x_0) - \sum_i U_i(x_1)$$

arbeid-energi teorem: $W_{0,1} = K_1 - K_0$

$$K_0 + \sum_i U_i(x_0) = K_1 + \sum_i U_i(x_1)$$

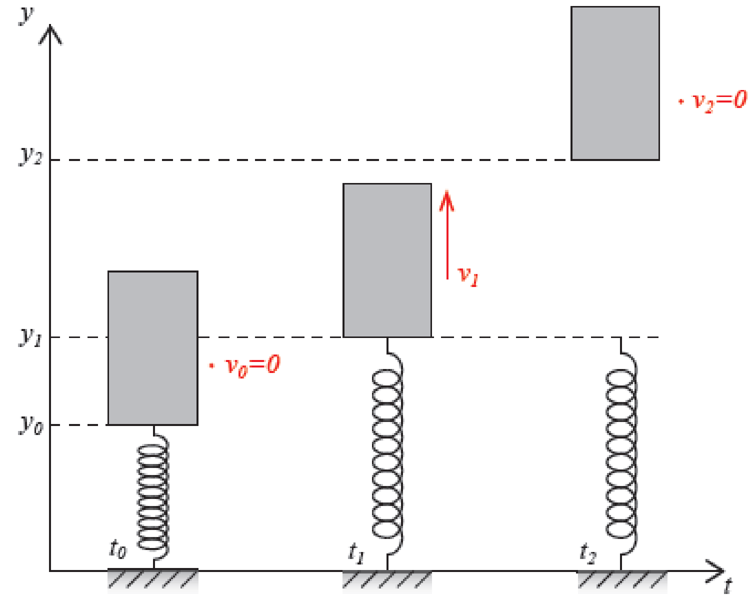
med: $U(x) = \sum_i U_i(x)$

energibevaring: $K_0 + U(x_0) = K_1 + U(x_1)$

Eksempel: Fjærkanon

fjær med likevektslengde y_1
og fjærkonstant k

Hvor høyt kommer klossen?



krefter: gravitasjon, fjærkraft
begge er konservativ

$$U(y) = U_G(y) + U_k(y) = mgy + \begin{cases} \frac{1}{2}k(y-y_1)^2 & y \le y_1 \\ 0 & y > y_1 \end{cases}$$

vi kan direkte sammenligne energi ved tid t_0 og t_2:

$$K_0 + U(y_0) = K_2 + U(y_2)$$

$$0 + mgy_0 + \frac{1}{2}k(y_0 - y_1)^2 = 0 + mgy_2$$

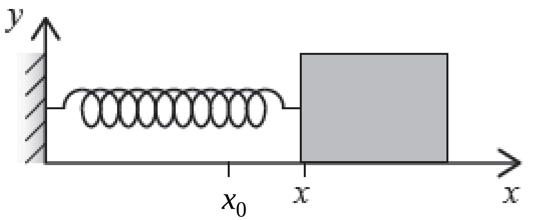
$$y_2 = y_0 + \frac{k}{2mg}(y_0 - y_1)^2$$

Hvordan finner vi potensialet til en konservativ kraft?

$$\frac{dU}{dx} = -F(x)$$

eksempel: fjærkraft

$$F(x) = -k(x - x_0)$$



$$\int_{x_0}^{x} \frac{dU}{dx}\,dx = \int_{x_0}^{x} \left(-F(x)\right)dx$$

$$U(x) = U(x_0) + k\int_{x_0}^{x} (x - x_0)\,dx$$

$$U(x) - U(x_0) = -\int_{x_0}^{x} F(x)\,dx$$

$$= U(x_0) + k\int_{0}^{x-x_0} x'\,dx' = U(x_0) + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2$$

$$U(x) = U(x_0) - \int_{x_0}^{x} F(x)\,dx$$

vi kan velge $U(x_0)$, f. eks. $U(x_0) = 0$

$$U(x) = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2$$

hva hvis

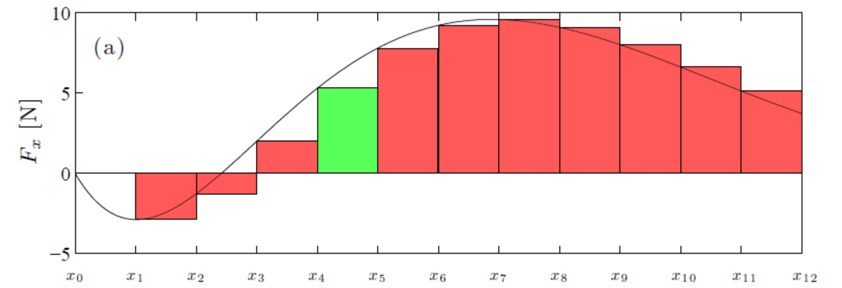
- kraften er meget komplisert
- vi kjenner kraften fra måling

$\Rightarrow$ numerisk integrasjon $\int_{x_0}^{x} F(x)\,dx$

numerisk integrasjon $\int_{x_A}^{x_B} F(x)\,dx$

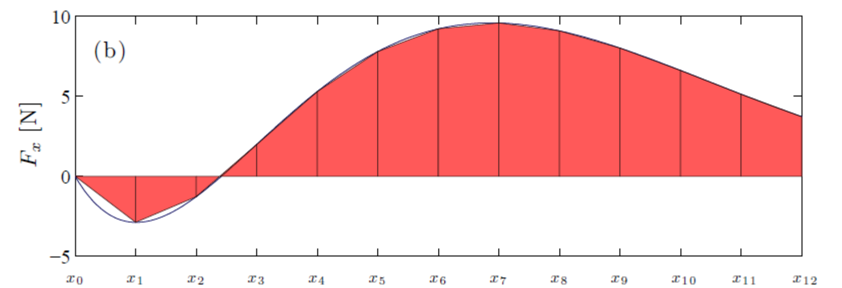
vi deler intervallet i *n* små intervaller: $\Delta x = \frac{x_B - x_A}{n}$ $x_i = x_A + i\,\Delta x$

$$\int_{x_A}^{x_B} F(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} F(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} F(x_i)\,\Delta x$$



bedre tilnærming enn rektangel: trapes

$$\int_{x_A}^{x_B} F(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2}\big(F(x_i) + F(x_{i+1})\big)\Delta x$$



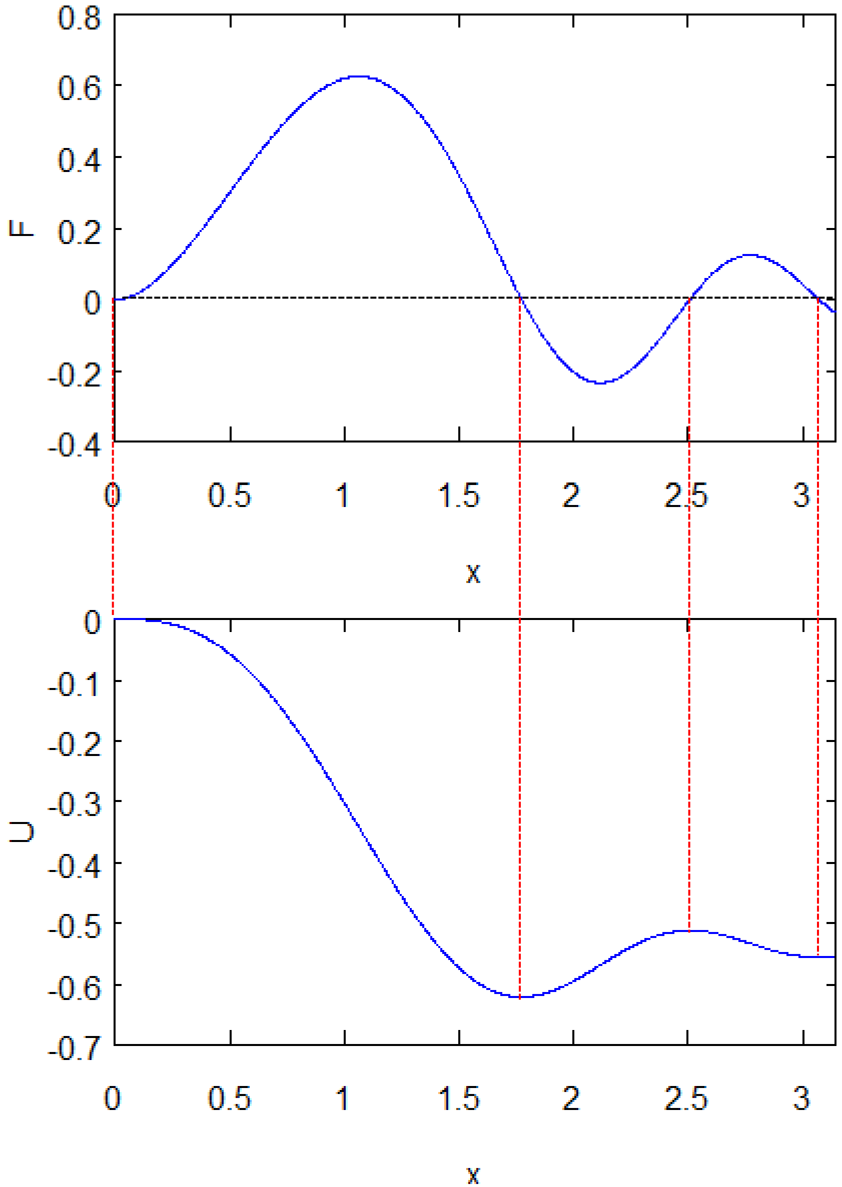
eksempel: $F(x) = 2\sin(x^2)e^{-x}$

```
x = linspace(0,pi,1000);
F = 2*sin(x.^2).*exp(-x);
subplot(2,1,1);
plot(x,F);
xlabel('x');
ylabel('F');
I = trapz(x,F)
U = cumtrapz(x,-F);
subplot(2,1,2);
plot(x,U);
xlabel('x');
ylabel('U');
```

$$F(i) = 2\sin(x(i)^2)e^{-x(i)}$$

$$I = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2}\big(F(x_i) + F(x_{i+1})\big)\Delta x$$

cumulative
trapezoidal
integration



$$\int_0^{\pi} 2\sin(x^2)e^{-x}dx = 0.55396$$

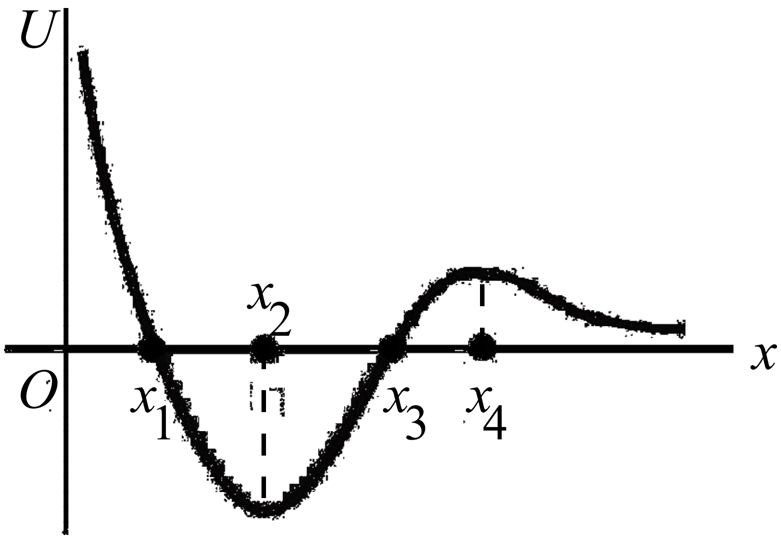
$$U(x) = U(x_0) + \int_{x_0}^{x} \big(-F(x')\big)dx' \qquad U(x_0) = 0$$

$$U(\pi) = -0.55396 \qquad U(x)\,?$$

$F=0 \Rightarrow$ ekstremverdi til U

http://pingo.upb.de/ access number: 8178

Grafen viser den potensielle energien til en partikkel som beveger seg langs *x*-aksen. Partikkelen starter ved $x=x_4$ og beveger seg i negativ *x*-retning. Ved hvilke(t) av de merkede punktene er kraften på partikkelen null?



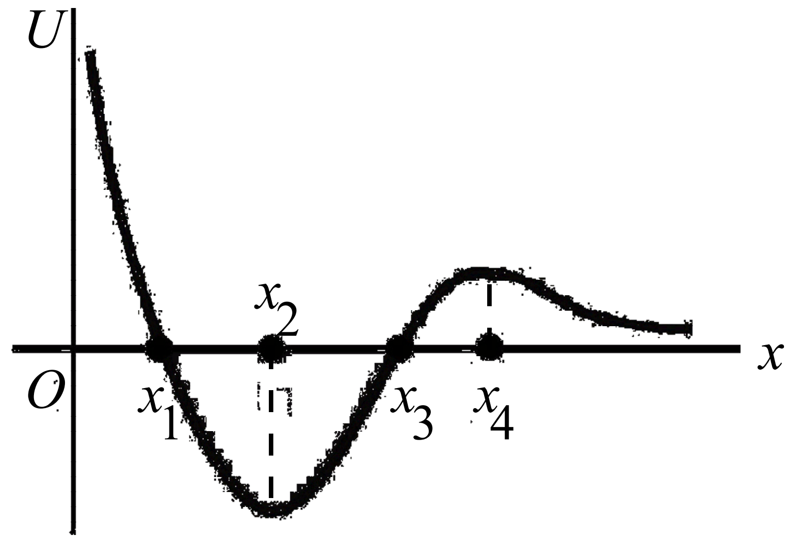
1. Ved både x_1 og x_3
2. Kun ved x_2
3. Kun ved x_4
4. Ved både x_2 og x_4

$$F = -\frac{dU}{dx} = 0$$

stigning for funksjonen $U(x)$ er null i x_2 og x_4

http://pingo.upb.de/ access number: 8178

Grafen viser den potensielle energien til en partikkel som beveger seg langs x-aksen. Partikkelen starter ved $x=x_4$ og beveger seg i negativ x-retning. Ved hvilket av de merkede punktene er farten størst?

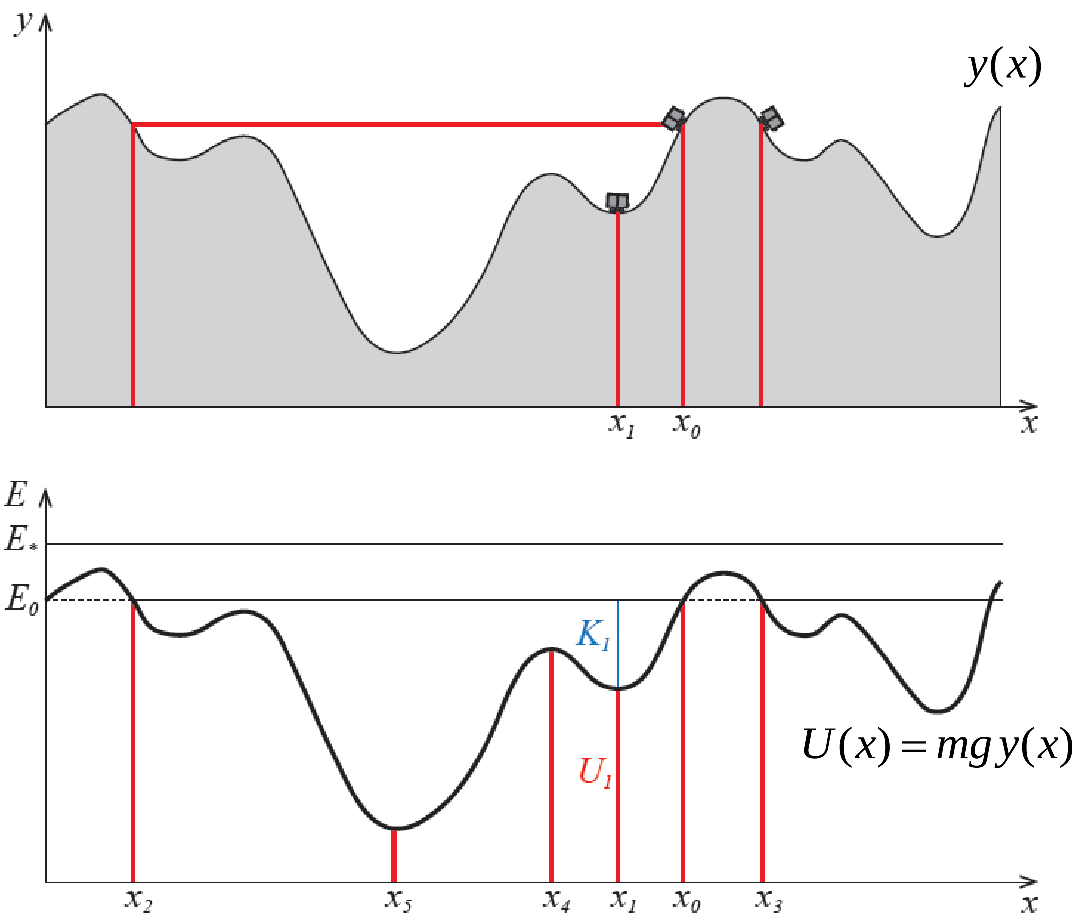


1. Ved $x=x_1$
2. Ved $x=x_2$
3. Ved $x=x_3$
4. Ved $x=x_4$

$$E = K_i + U(x_i) = \text{konstant}$$

kinetisk energi er maksimal når potensiell energi er minimal ved x_2

Energidiagrammer



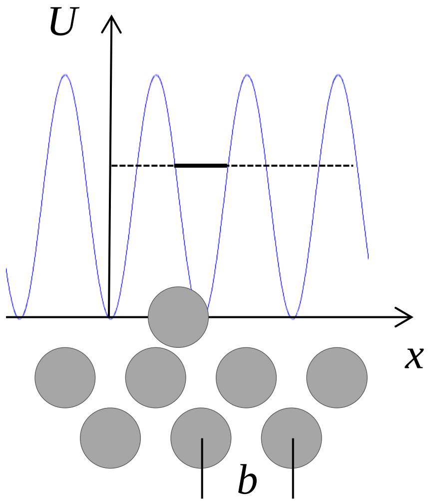
energibevaring:

$$E = K(x) + U(x) = K(x_0) + U(x_0)$$

hvis $K(x_0) = 0$

$$K(x) = U(x_0) - U(x) \geq 0$$

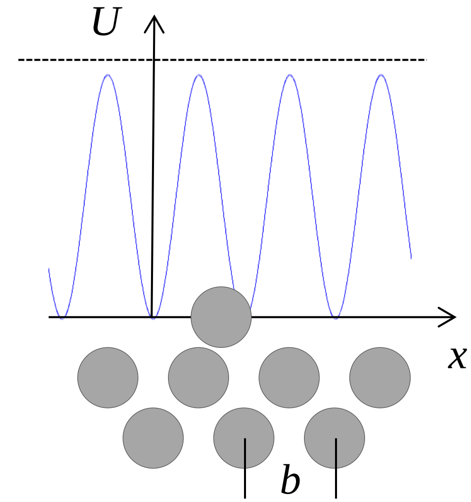
$$U(x) \leq U(x_0)$$



$$E = K + U < U_{\max}$$

kinetisk energi
kan bli null

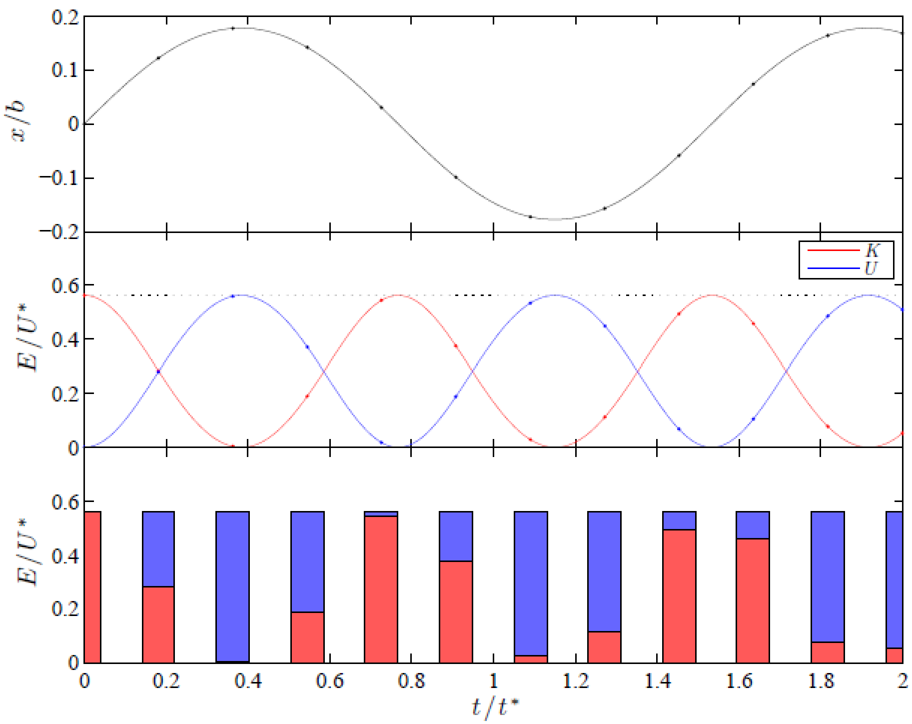
atom er ”fanget” i
potensialet og svinger
frem og tilbake

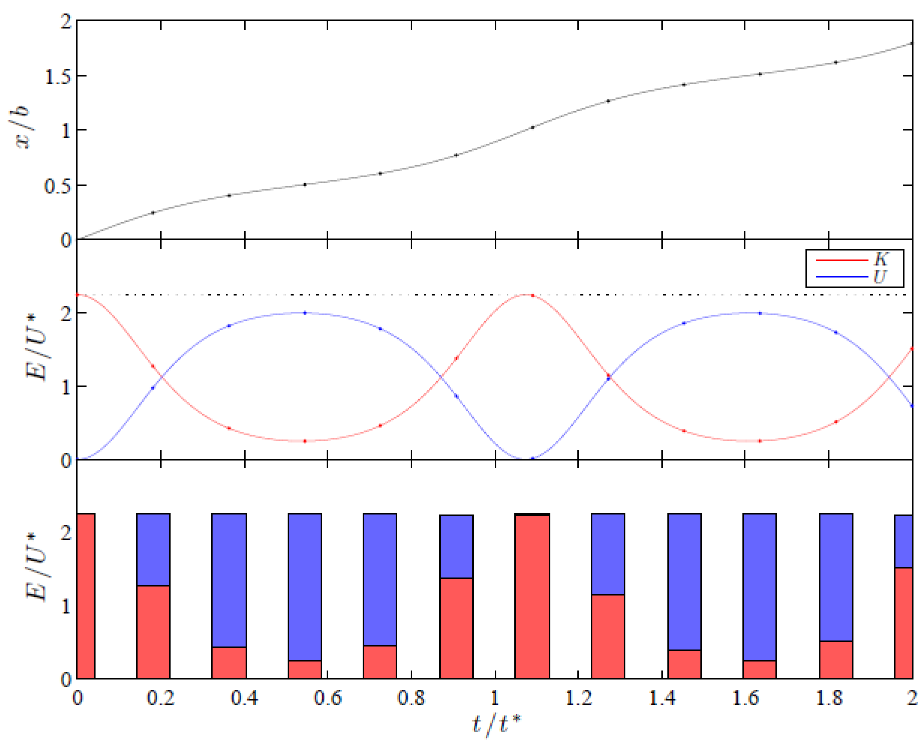


$$E = K + U > U_{\max}$$

$$K(x) > 0$$

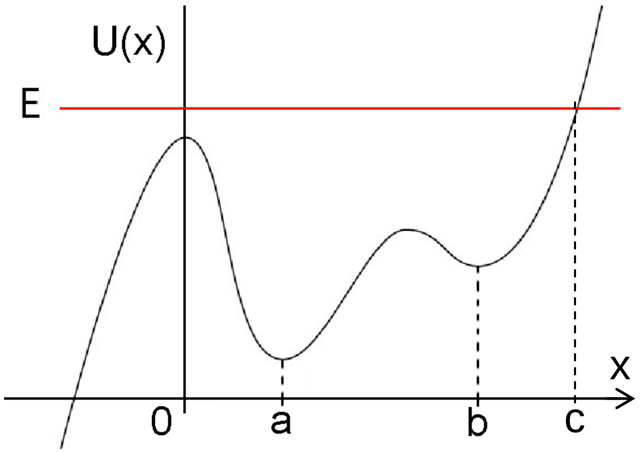
atomet kan bevege
seg overalt





http://pingo.upb.de/ access number: 8178

En partikkel befinner seg i posisjon $x = a$ med total energi E og beveger seg mot høyre.
Hva kommer til å skje?



1. Partikkelen svinger om posisjon $x=a$.
2. Partikkelen stanser og forblir ved $x=c$.
3. Partikkelen slipper unna mot uendelig i negativ x retning.
4. Ikke nok informasjon for å avgjøre.

$x = a$: $v > 0$

partikkelen beveger seg mot høyre

$$E = K(x) + U(x) = \text{konstant}$$

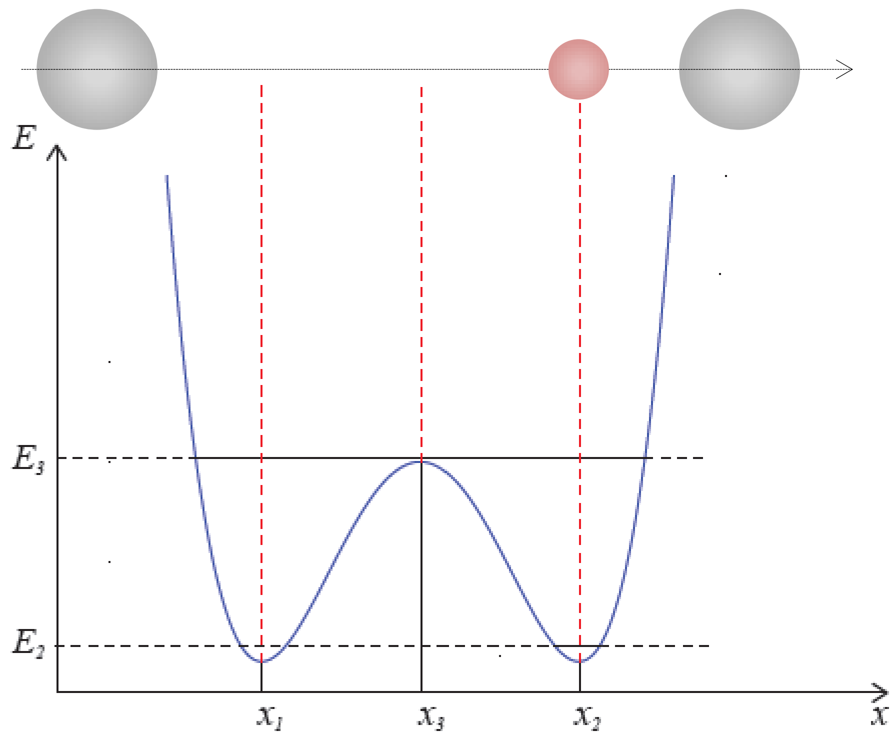
$$K(x) = E - U(x)$$

$x = c$: $K = 0 \Rightarrow v = 0$

$$F = -\frac{dU}{dx} < 0$$ kraft mot venstre

partikkelen snu og har negativ hastighet fremover

Likevekt



minimum i potensiell energi
$\Rightarrow$ stabilt likevektspunkt

$$\frac{d^2U}{dx^2} > 0$$

maksimum i potensiell energi
$\Rightarrow$ ustabilt likevektspunkt

$$\frac{d^2U}{dx^2} < 0$$

partikkel i x_2 med v=0

$$\frac{dU}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad F = -\frac{dU}{dx} = 0$$

partikkel blir i x_2

litt kinetisk energi
$\Rightarrow$ partikkel svinger med små amplitude rund x_2

partikkel i x_3 med v=0

$$\frac{dU}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad F = -\frac{dU}{dx} = 0$$

partikkel blir i x_3

litt kinetisk energi
$\Rightarrow$ partikkel beveger seg enten mot x_1 eller mot x_2 og fjerner seg langt fra x_3

Potensial i tre dimensjoner

konservativ kraft: $\vec{F}$

arbeid: $W_{0,1} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F} \cdot \vec{v}\, dt = \int_0^1 \vec{F} \cdot d\vec{r} = U(\vec{r}_0) - U(\vec{r}_1)$

integral uavhengig av veien,
bare avhengig av start og sluttposisjon

potensiell energi: $U(\vec{r}) = U(x, y, z)$

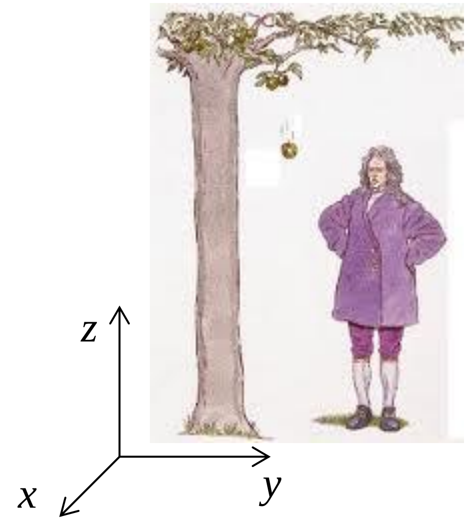
én dimensjon: $F(x) = -\frac{dU}{dx}$

tre dimensjoner: $F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$

$$\vec{F} = F_x\,\hat{i} + F_y\,\hat{j} + F_z\,\hat{k} = -\frac{\partial U}{\partial x}\hat{i} - \frac{\partial U}{\partial y}\hat{j} - \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k} = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)U = -\vec{\nabla}U$$

konservativ kraft $\Leftrightarrow$ $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$ $\Leftrightarrow$ arbeid uavhengig av veien

Eksempel: gravitasjon på jorden



$$\vec{F} = -mg\,\hat{k}$$

$$U = mgz$$

$$\vec{\nabla} U = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k} \right) mgz$$

$$= \frac{\partial(mgz)}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial(mgz)}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial(mgz)}{\partial z}\hat{k}$$

$$= 0\,\hat{i} + 0\,\hat{j} + mg\,\hat{k} = mg\,\hat{k}$$

$$\vec{F} = -mg\,\hat{k} = -\vec{\nabla} U$$

Gravitasjon generell:

$$\vec{F} = -G\frac{mM}{r^2}\hat{u}_r = -G\frac{mM}{r^3}\vec{r} \qquad\qquad U = -G\frac{mM}{r}$$

$$\vec{\nabla}U = -GmM\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\frac{1}{r}$$

$$\vec{\nabla}U\cdot\hat{i} = -GmM\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r} = -GmM\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= -GmM\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}2x = G\frac{mM}{r^3}x$$

på samme måte $\quad \vec{\nabla}U\cdot\hat{j} = G\frac{mM}{r^3}y \qquad \vec{\nabla}U\cdot\hat{k} = G\frac{mM}{r^3}z$

i sfæriske koordinater:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U = \left(\frac{\partial}{\partial r}\hat{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\hat{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\hat{u}_\varphi\right)G\frac{mM}{r} = -G\frac{mM}{r^2}\hat{u}_r$$

Exempel: $U(x,y) = 3x - x^3 + 2y^2$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 3 - 3x^2 \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = 4y$$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U(x,y) = (3x^2 - 3)\,\hat{i} - 4y\,\hat{j}$$

gradient i retning av den
største helningen i potensialet