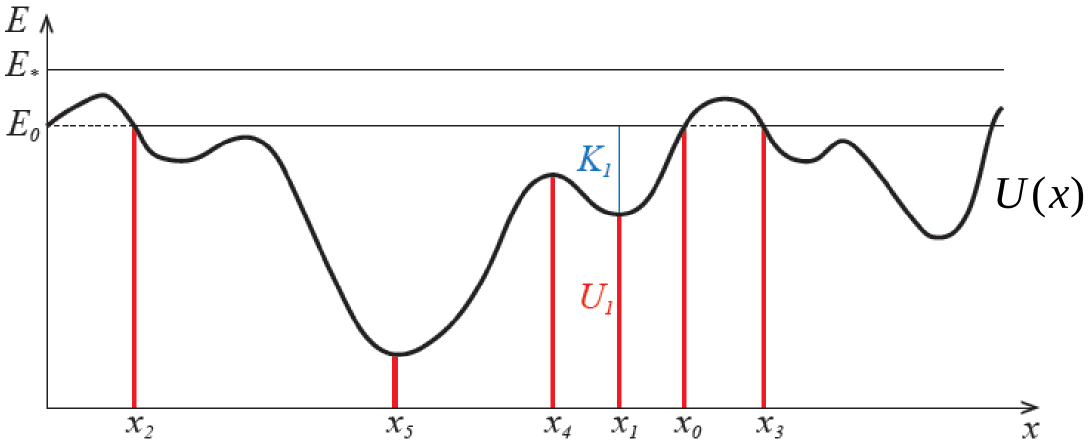
Potensiell energi
Bevegelsesmengde og kollisjoner

09.03.2015

Energidiagrammer



energibevaring:

$$E = K(x) + U(x) = K(x_0) + U(x_0)$$

$$\frac{dU}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad F = -\frac{dU}{dx} = 0 \quad \Rightarrow$$ likevektspunkt

minimum i potensiell energi
$\Rightarrow$ stabilt likevektspunkt $\qquad \frac{d^2U}{dx^2} > 0$

maksimum i potensiell energi
$\Rightarrow$ ustabilt likevektspunkt $\qquad \frac{d^2U}{dx^2} < 0$

Potensial i tre dimensjoner

konservativ kraft: $\vec{F} = -\vec{\nabla} U$ potensiell energi: $U(\vec{r}) = U(x, y, z)$

arbeid: $W_{0,1} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F} \cdot \vec{v}\, dt = \int_0^1 \vec{F} \cdot d\vec{r} = U(\vec{r}_0) - U(\vec{r}_1) = K(\vec{r}_1) - K(\vec{r}_0)$

integral uavhengig av veien,
bare avhengig av start og sluttposisjon

energibevaring: $K_0 + U_0 = K_1 + U_1 = E$

eksempel: gravitasjon

$$U(\vec{r}) = -G\frac{mM}{r}$$

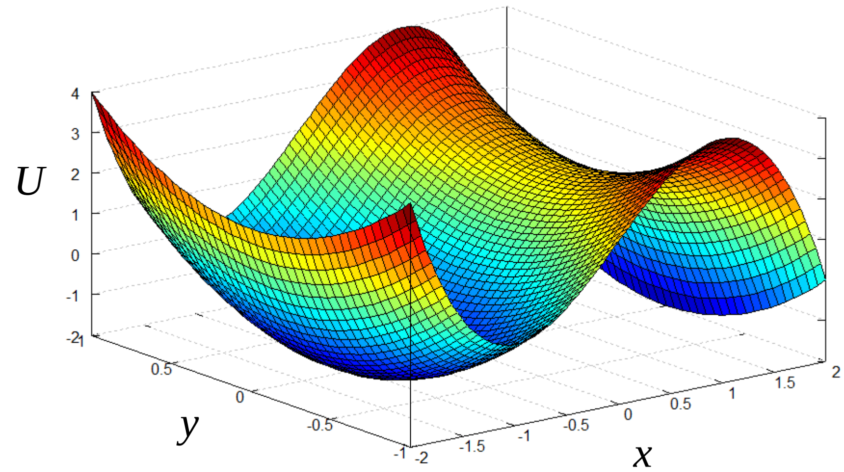
$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U(\vec{r}) = -G\frac{mM}{r^2}\hat{u}_r$$

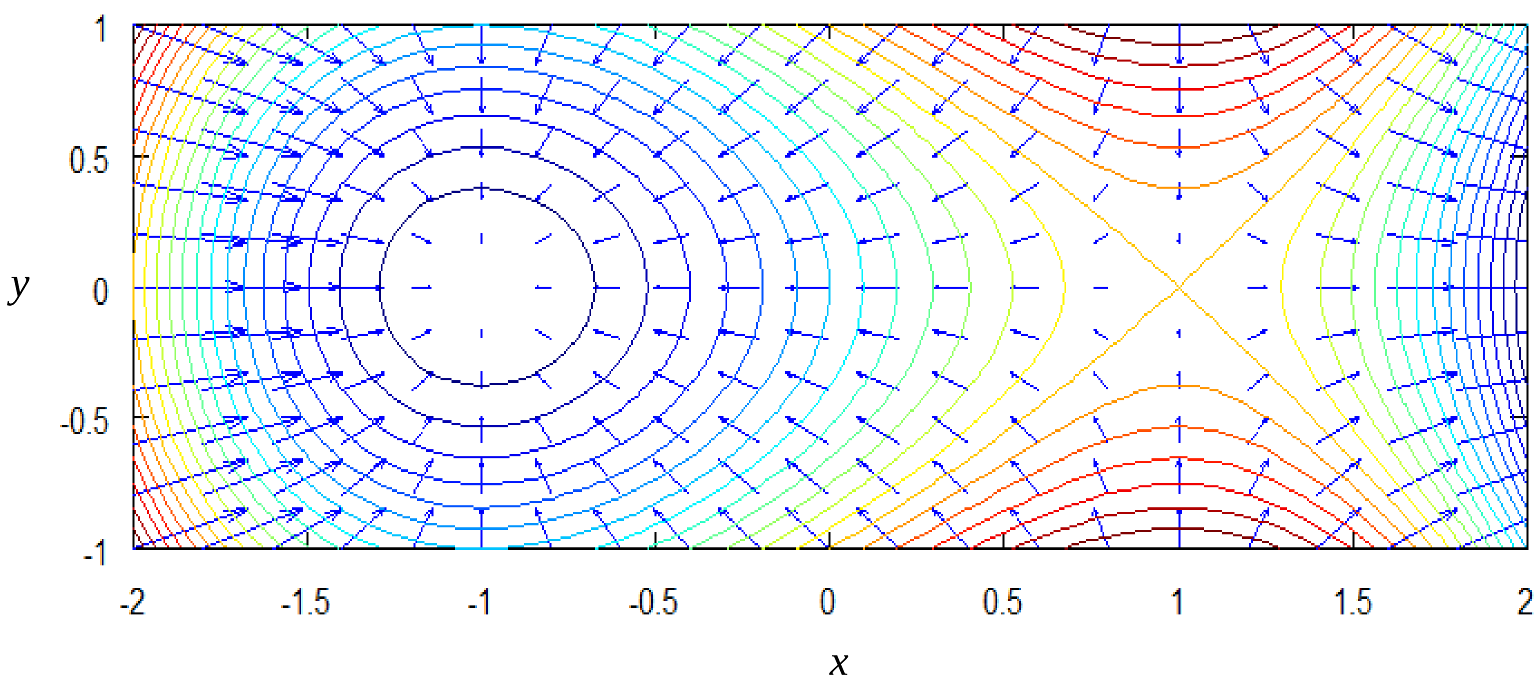
Exempel: $U(x,y) = 3x - x^3 + 2y^2$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 3 - 3x^2 \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = 4y$$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U(x,y) = (3x^2 - 3)\,\hat{i} - 4y\,\hat{j}$$

gradient i retning av den
største helningen i potensialet



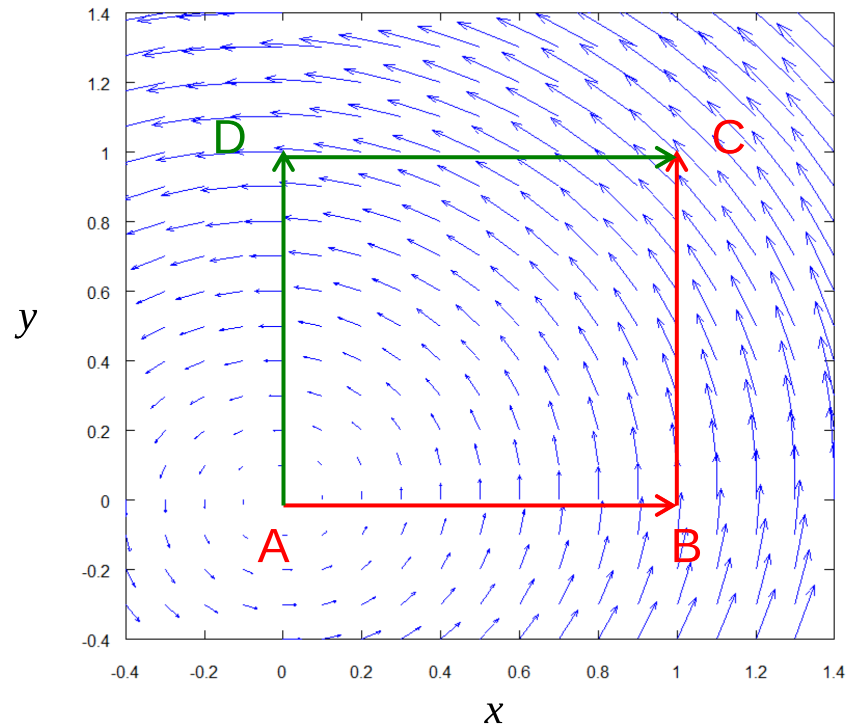


http://pingo.upb.de/ access number: 8178

Er kraften konservativ?

$$\vec{F} = -y\hat{i} + x\hat{j}$$

1. Ja
2. Nei
3. vet ikke



langs lukket kurve: $W_{ABCDA} \neq 0$

rotasjon (curl): $\vec{\nabla} \times \vec{F} \neq 0$

$W_{AD} = 0$ $W_{AB} = 0$

$W_{DC} < 0$ $W_{BC} > 0$

3-dim: konservativ kraft $\Rightarrow$ / $\not\Leftarrow$ kraft bare posisjonsavhengig (nødvendig men ikke tilstrekkelig betingelse)

konservativ kraft $\Leftrightarrow$ $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ $\Leftrightarrow$ $\vec{F} = -\vec{\nabla} U$

Ikke-konservative krefter

vi dekomponerer nettokraften i
- konservative kraft *F*
- ikke-konservative kraft *f*

$$\vec{F}_{\text{net}} = \vec{F} + \vec{f}$$

$$W_{\text{net}} = \int_{t_0}^{t_1} \left(\vec{F} + \vec{f}\right) \cdot \vec{v}\, dt = W_F + W_f$$

for en konservativ kraft *F* kan vi finner et potensial slik at:

$$W_F = U_0 - U_1$$

$$W_{\text{net}} = W_F + W_f = U_0 - U_1 + W_f = K_1 - K_0$$

$$K_1 + U_1 = K_0 + U_0 + W_f$$

$$E_1 = E_0 + W_f$$

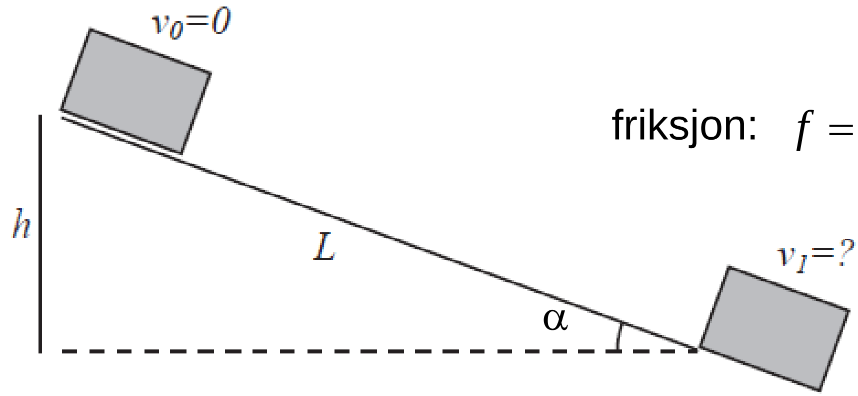
$$\Delta E = E_1 - E_0 = W_f = \int_0^1 \vec{f} \cdot d\vec{r}$$

forandring i den mekaniske energien

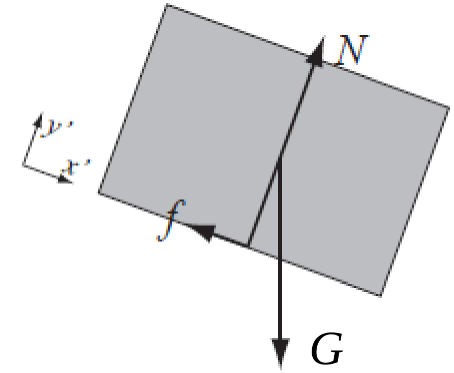
=

arbeid av ikke-konservative krefter

Eksempel:
skråplan



friksjon: $f=\mu_d N$



N2L i y'-retning: $\sum F_{y'} = N - G_{y'} = N - mg\cos\alpha = ma_{y'} = 0$

$$N = mg\cos\alpha \qquad \Rightarrow \qquad f = \mu_d N = \mu_d mg\cos\alpha$$

potensiell energi: $U_0 = mgh = mgL\sin\alpha \qquad U_1 = 0$

energibevaring: $\Delta E = (K_1+U_1)-(K_0+U_0) = W_f = \int_0^1 \vec{f}\cdot d\vec{r} = \int_0^L (-f)\,dx'$

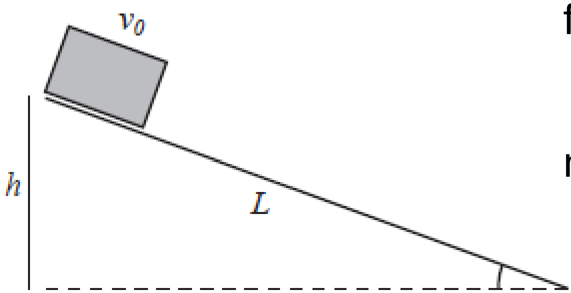
$$\Delta E = (\frac{1}{2}mv_1^2+0)-(0+mgL\sin\alpha) = \int_0^L (-\mu_d mg\cos\alpha)\,dx' = -\mu_d mg\cos(\alpha)L$$

$$\frac{1}{2}mv_1 = mgL\sin\alpha - \mu_d mgL\cos\alpha$$

$$v_1 = \sqrt{2gL(\sin\alpha - \mu_d\cos\alpha)}$$

Hvor er energien ΔE ?

Termisk energi

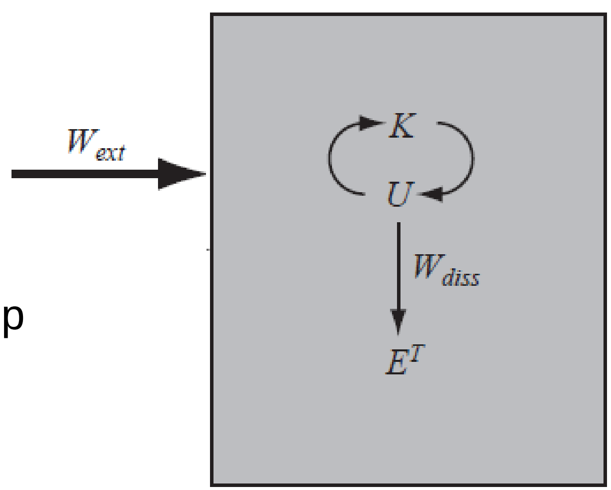


friksjon ⇒ atomære vibrasjoner
kinetisk og potensiell energi på mikroskopisk nivå

mikroskopiske bevegelser ⇒ varme

friksjon varmer klossen og planet
⇒ temperatur i systemet ”kloss + skråplan” øker

energien i hele systemet er bevart: $E_{\text{tot}} = K_0 + U_0 + E_0^T = K_1 + U_1 + E_1^T$



lukket system:

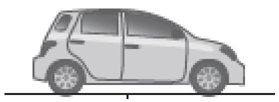
- konservative krefter
  kinetisk ⇔ potensiell energi
- ikke – konservative krefter
  (dissipative krefter)
  mekanisk ⇒ termisk energi

arbeid fra ytre kraft:
- jeg trekker klossen opp
- jeg løfter klossen opp

$\Delta E_{\text{tot}} = W_{\text{ext}}$

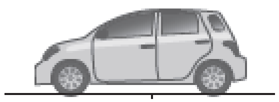
Eksempel: bilkrasj

A



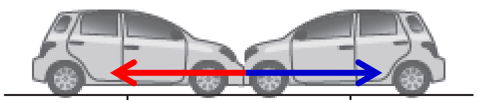
$\longrightarrow$
v_A

B



$\longleftarrow$
v_B

A B



$F_{\text{fra B på A}}$ $F_{\text{fra A på B}}$

$\longrightarrow$
$v'_A = v'_B$

N2L for bil A: $\vec{F}_{\text{fra B på A}} = m_A \vec{a}_A$

vanskelig å modellere kraften

N2L for bil B: $\vec{F}_{\text{fra A på B}} = m_B \vec{a}_B$

N3L: $\vec{F}_{\text{fra A på B}} = -\vec{F}_{\text{fra B på A}}$

$$m_A \vec{a}_A + m_B \vec{a}_B = 0$$

for en tid t_0 før og en tid t_1 etter kollisjonen

$$\int_{t_0}^{t_1} (m_A \vec{a}_A + m_B \vec{a}_B)\, dt = 0$$

$$m_A \int_{t_0}^{t_1} \vec{a}_A \, dt + m_B \int_{t_0}^{t_1} \vec{a}_B \, dt = 0$$

$$m_A \big(\vec{v}_A(t_1) - \vec{v}_A(t_0)\big) + m_B \big(\vec{v}_B(t_1) - \vec{v}_B(t_0)\big) = 0$$

$$m_A \vec{v}_A(t_0) + m_B \vec{v}_B(t_0) = m_A \vec{v}_A(t_1) + m_B \vec{v}_B(t_1) = (m_A + m_B)\vec{v}\,'$$

$m_A \vec{v}_A(t) + m_B \vec{v}_B(t)$ bevart

$$\vec{v}\,' = \frac{m_A \vec{v}_A(t_0) + m_B \vec{v}_B(t_0)}{m_A + m_B}$$

Bevegelsesmengde

størrelsen $\vec{p} = m\vec{v}$ kalles bevegelsesmengde

Newtons andre lov: $\sum_i \vec{F}_i^{\text{ext}} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$

hvis m er konstant

vi vil se senere:

- massen forandrer seg med hastighet
- også partikler uten masse (f.eks. fotoner) har bevegelsesmengde

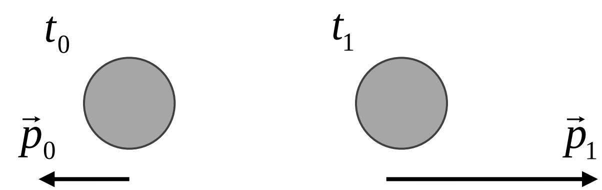
$\sum_i F_i^{\text{ext}} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ er derfor den mest generelle formuleringen av Newtons andre lov

nettokraften som virker på et legeme forandrer bevegelsesmengden

Kollisjoner

ballen påvirkes av en (komplisert) kraft $F(t)$

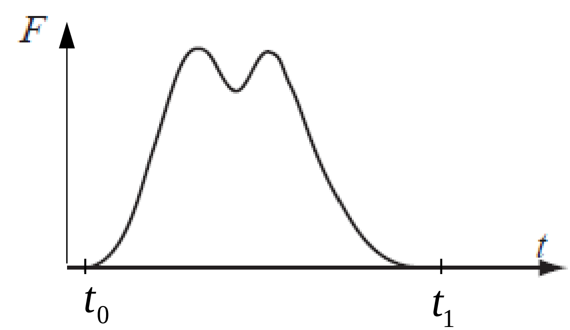
i tidsrommet t_0 til t_1 er:



$$\vec{p}_1 - \vec{p}_0 = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d\vec{p}}{dt} dt = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F} \, dt = \vec{J}$$

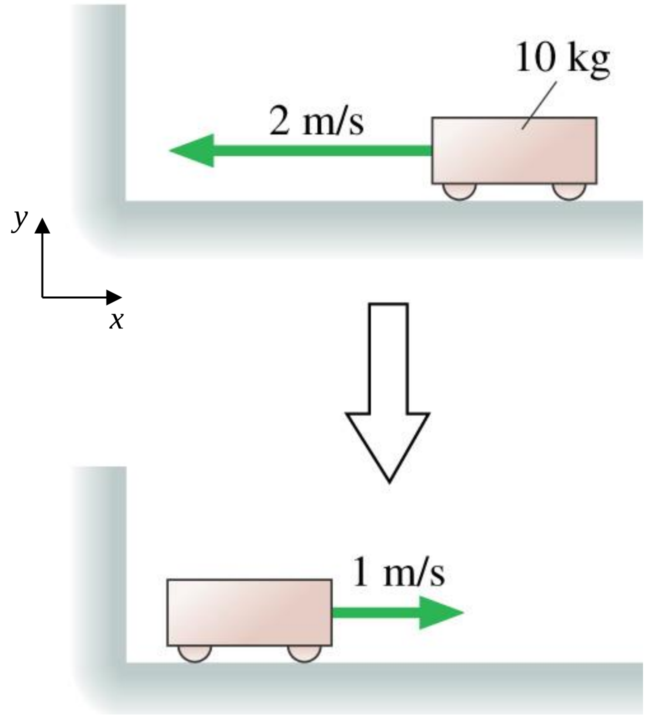
$\vec{F}$ netto kraft

$\vec{J}$ impuls



http://pingo.upb.de/ access number: 8178

Hva er endringen i bevegelsesmengden til vognen?



1. -30 kg m/s
2. -20 kg m/s
3. -10 kg m/s
4. 10 kg m/s
5. 30 kg m/s

$$\vec{p}_0 = m\vec{v}_0 = 10\,\text{kg}\cdot(-2\,\text{m/s})\,\hat{i} = -20\,\text{kg m/s}\,\hat{i}$$

$$\vec{p}_1 = m\vec{v}_1 = 10\,\text{kg}\cdot 1\,\text{m/s}\ \hat{i} = 10\,\text{kg m/s}\,\hat{i}$$

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_1 - \vec{p}_0 = \vec{J} = 30\,\text{kg m/s}\ \hat{i}$$

http://pingo.upb.de/ access number: 8178

To identiske biler kjører med samme hastighet. Den første krasjer i en betong vegg, den andre i tønner fylt med sand. I hvilket tilfelle er impulsen fra nettokraften på bilen størst?

1. Tilfelle 1 (betong vegg)
2. Tilfelle 2 (sand tønner)
3. Impulsen er den samme i begge tilfeller.
4. Trenger mer informasjon om kreftene for å avgjøre.

$$\vec{p}_1 - \vec{p}_0 = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d\vec{p}}{dt} dt = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F} dt = \vec{J}$$

$$\vec{p}_0 = m\vec{v}$$

$$\vec{p}_1 = \vec{0}$$

i begge tilfeller

Ball spretter i gulvet

del 1: ballen faller

vi kan finne v ved energibetraktninger

del 2: ballen deformeres i kontakt med gulvet

$\Rightarrow$ komplisert kraft fra gulvet på ballen

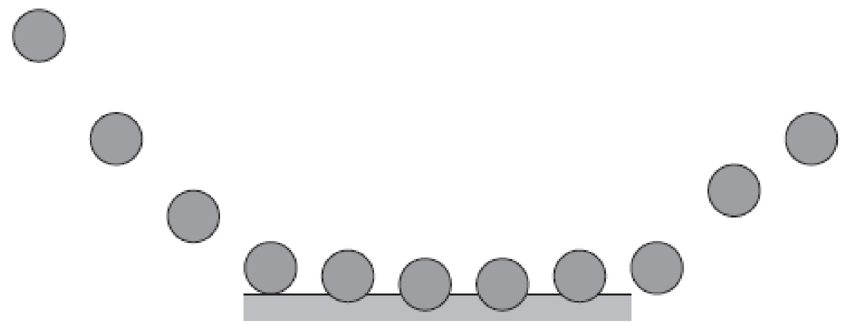
$\Rightarrow$ endring av bevegelsesmengde

kraften behøver ikke være konservative

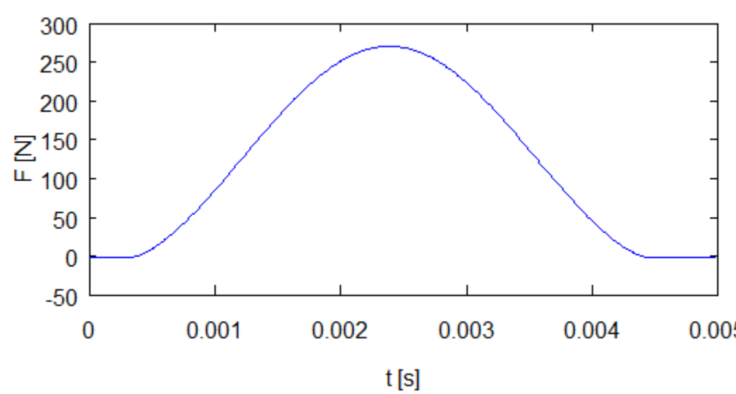
$\Rightarrow$ energi er ikke bevart

$\Rightarrow$ ballen spretter ikke like høyt opp igjen

del 3: ballen går opp til sin nye maksimale høyde



$$\vec{J} = \Delta\vec{p} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}\,dt$$



impuls: integralet under kurven

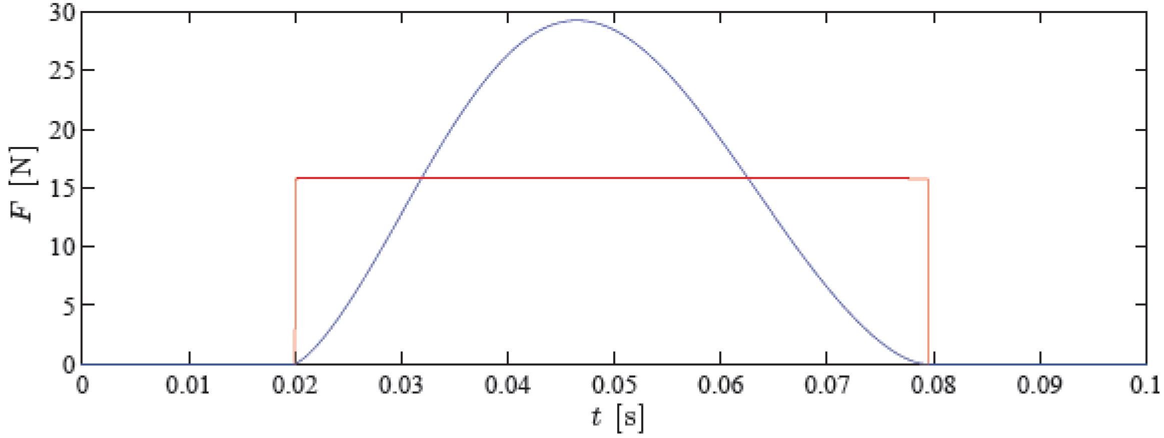
kontaktkraft >> gravitasjon

styrke og varighet av kraften

Ball spretter i gulvet

vanskelig å modellere kraften gjennom en kollisjon
ofte kjenner vi ikke *F*(*t*)
vi kan måle bevegelsesmengde før og etter kollisjonen
impuls gir informasjon om den gjennomsnittlige kraften

$$\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}\vec{J} = \frac{1}{t_1 - t_0}\int_{t_0}^{t_1}\vec{F}\,dt = \vec{F}_{\text{avg}}$$



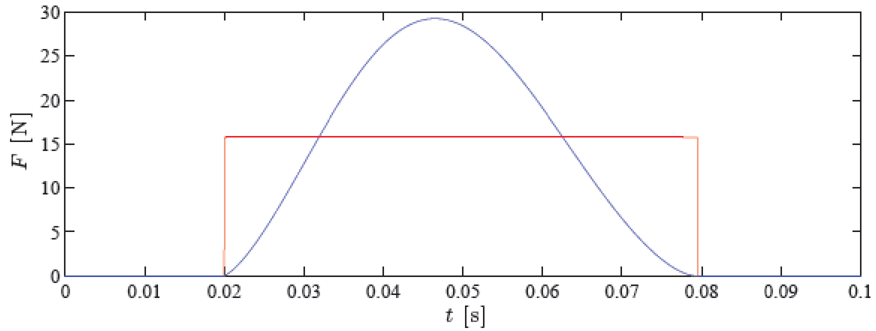
http://pingo.upb.de/ access number: 8178

To identiske biler kjører med samme hastighet. Den første krasjer i en betong vegg, den andre i tønner fylt med sand. I hvilket tilfelle er gjennomsnittskraften på bilen størst?

1. Tilfelle 1 (betong vegg)
2. Tilfelle 2 (sand tønner)
3. Kraften er den samme i begge tilfeller.
4. Ikke nok informasjon til å avgjøre.

sand tønner: krasj tar mer tid

$$\vec{p}_1 - \vec{p}_0 = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d\vec{p}}{dt} dt = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}\, dt = \vec{J}$$

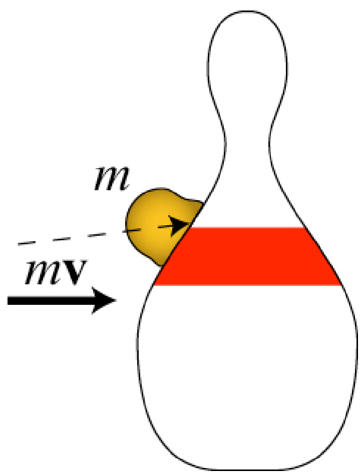


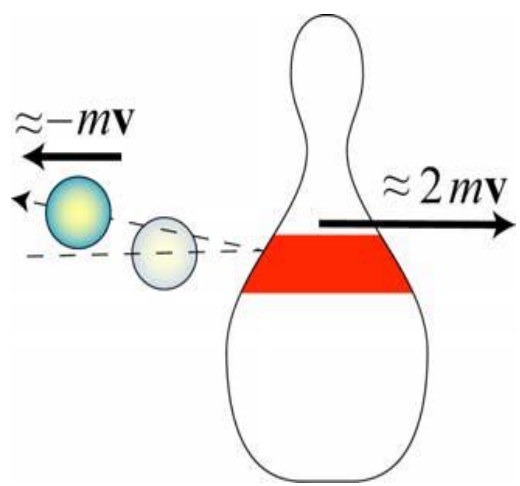
impuls er den samme

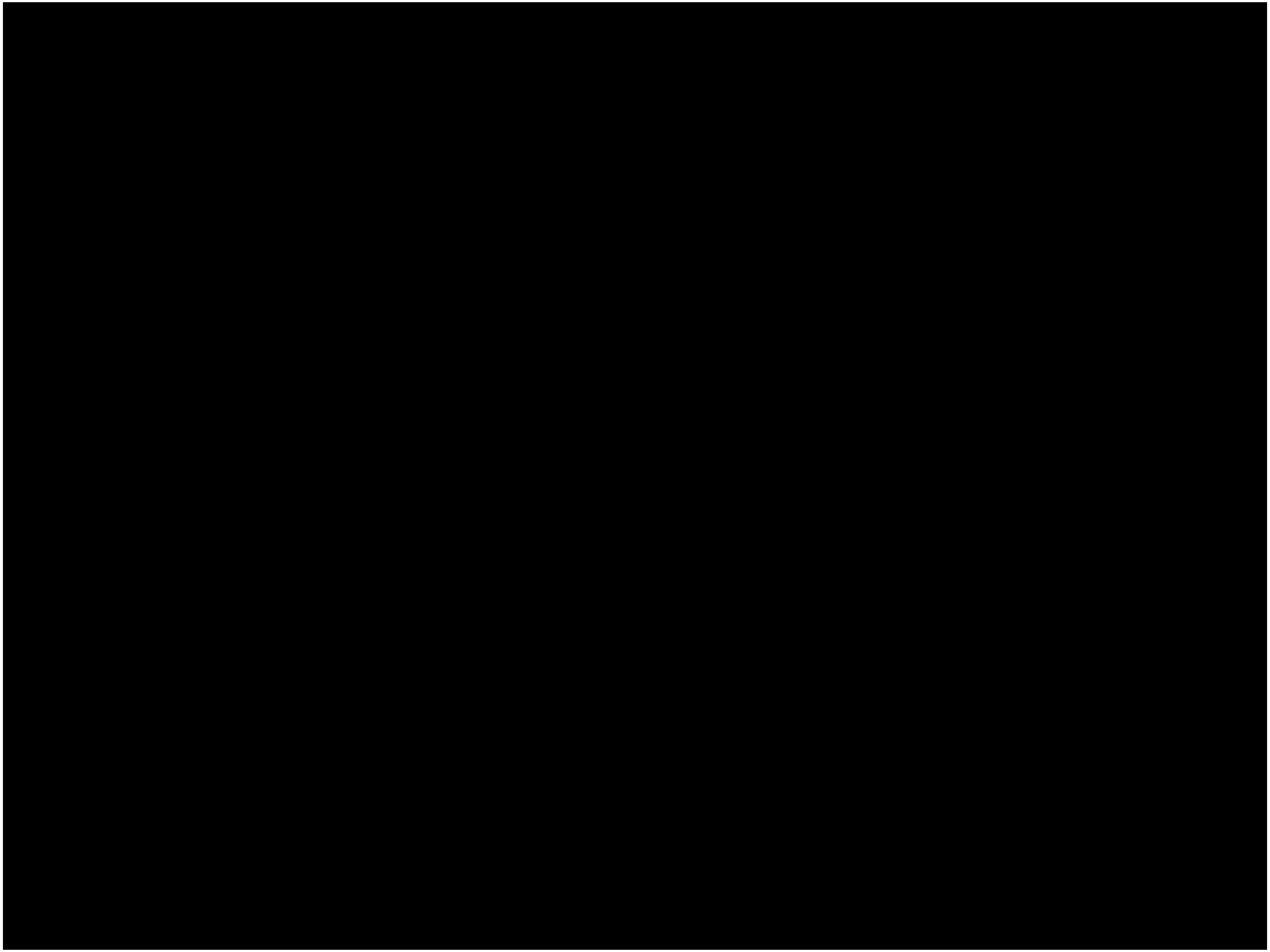
$\Rightarrow$ gjennomsnittskraft er mindre

Du prøver å velte en bowlingpinne med en ball. Du har to baller av samme størrelse og masse, én laget av gummi og den andre laget av plastilin. Gummiballen spretter tilbake mens plastilin fester seg til pinnen. Hvilken ball burde du bruke?

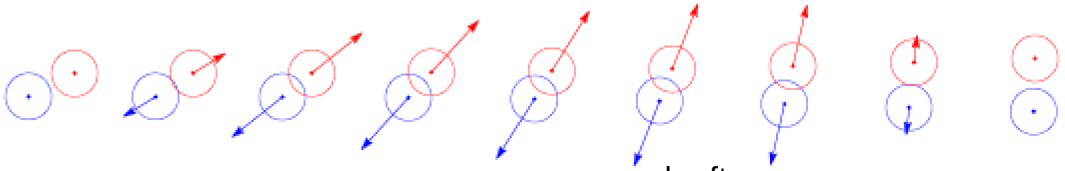
1. Gummiballen
2. Plastilinballen.
3. Det gjør ingen forskjell.
4. Ikke nok informasjon til å avgjøre.







Kollisjon mellom to partikler



system: to partikler ⇔ omgivelse

N2L for partikkel A $\quad \sum \vec{F}_A = \sum \vec{F}_A^{\text{ext}} + \vec{F}_{\text{B på A}} = \frac{d}{dt}\vec{p}_A$

N2L for partikkel B $\quad \sum \vec{F}_B = \sum \vec{F}_B^{\text{ext}} + \vec{F}_{\text{A på B}} = \frac{d}{dt}\vec{p}_B$

N3L $\quad \vec{F}_{\text{B på A}} = -\vec{F}_{\text{A på B}}$

$$\sum(\vec{F}_A + \vec{F}_B) = \sum \vec{F}_A^{\text{ext}} + \vec{F}_{\text{B på A}} + \sum \vec{F}_B^{\text{ext}} + \vec{F}_{\text{A på B}}$$

$$= \sum \vec{F}_A^{\text{ext}} + \sum \vec{F}_B^{\text{ext}} = \sum \vec{F}^{\text{ext}} = \frac{d}{dt}\vec{p}_A + \frac{d}{dt}\vec{p}_B = \frac{d}{dt}(\vec{p}_A + \vec{p}_B)$$

summe av ytre krefter på partiklene = endring i bevegelsesmengde per tid for hele systemet

spesialfall: $\quad \sum \vec{F}^{\text{ext}} = 0 \qquad \frac{d}{dt}(\vec{p}_A + \vec{p}_B) = 0$

$$\vec{p}_A + \vec{p}_B = \text{konst.}$$

bevaringslov for bevegelsesmengde

$$\sum \vec{F}^{\,\text{ext}} = 0 \qquad \frac{d}{dt}(\vec{p}_A + \vec{p}_B) = 0 \qquad \vec{p}_A + \vec{p}_B = \text{konst.}$$

ingen ytre krefter på et system $\Leftrightarrow$ bevegelsesmengde for systemet er bevart

- vektorligning, gjelder for alle komponenter separat: $\sum \vec{F}_x^{\,\text{ext}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{p}_x = \text{konst.}$
- gjelder for vilkårlig mange partikler
- gjelder for alle typer krefter mellom partikler
  (ikke bare konservative)

http://www.our-space.org/materials/states-of-matter/momentum-in-space

http://pingo.upb.de/ access number: 8178

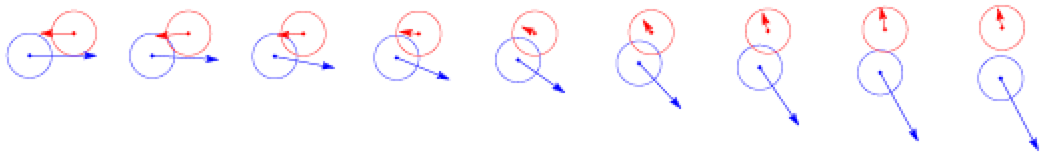
En stor ball med masse $M = 2\,m$ og hastighet v_0 kolliderer med en liten ball med masse m som er i ro. Er det mulig at den store ballen stanser fullstendig og den liten fortsetter med hastighet $v = 2\,v_0$?

1. Ja, det er mulig.
2. Nei, det bryter bevaring av bevegelsesmengden.
3. Nei, det bryter bevaring av energi.

$$P_0 = (2m)v_0 + 0$$
$$P_1 = 0 + m(2v_0)$$

$$K_0 = \frac{1}{2}(2m)v_0^2 + 0 = mv_0^2$$
$$K_1 = 0 + \frac{1}{2}m(2v_0)^2 = 2mv_0^2$$

kollisjon med ytre kraft
f.eks. gravitasjon



bevegelsesmengde

$$\vec{P} = \vec{p}_A + \vec{p}_B$$

$$\Delta\vec{P} = \vec{J}_{\text{ext}} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_{\text{ext}}\, dt = \int_{t_0}^{t_1} (-m_A g - m_B g)\, \hat{j}\, dt = -(m_A + m_B) g\, \hat{j}\, (t_1 - t_0)$$

impuls fra ytre kraft er avhengig av varigheten av kollisjonen

$$\Delta t \to 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{J}_{\text{ext}} \to 0$$

bevegelsesmengden er (nesten) bevart i en kollisjon som er momentant

kollisjon: en prosess mellom to eller flere legemer
- hvor indre krefter er mye større enn ytre krefter fra omgivelsen
- som varer en kort tid i forhold til tidsskala av bevegelsen