Bevegelsesmengde og kollisjoner

11.03.2015

Konservative krefter

konservativ kraft

$$\Updownarrow$$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U$$

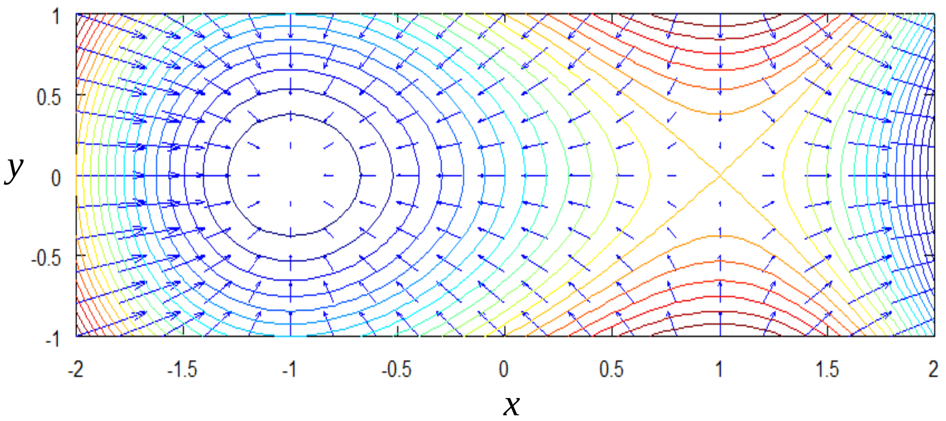
$$\Updownarrow$$

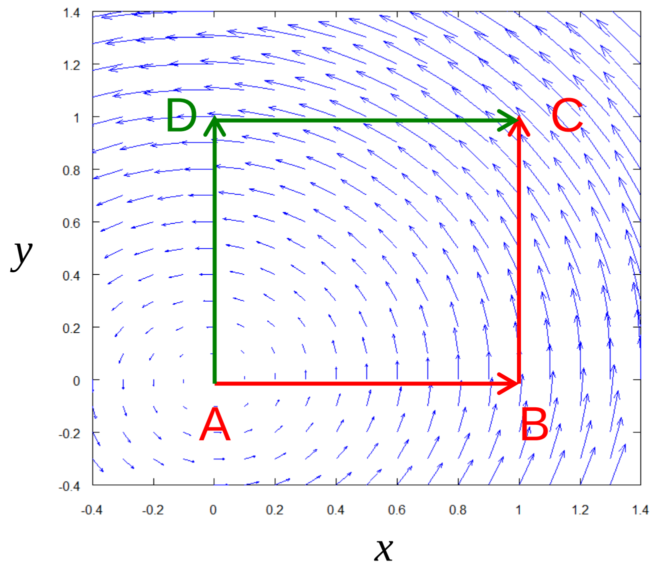
arbeid uavhengig av veien

$$\Updownarrow$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$$

potensiell energi: $U(\vec{r}) = U(x, y, z)$





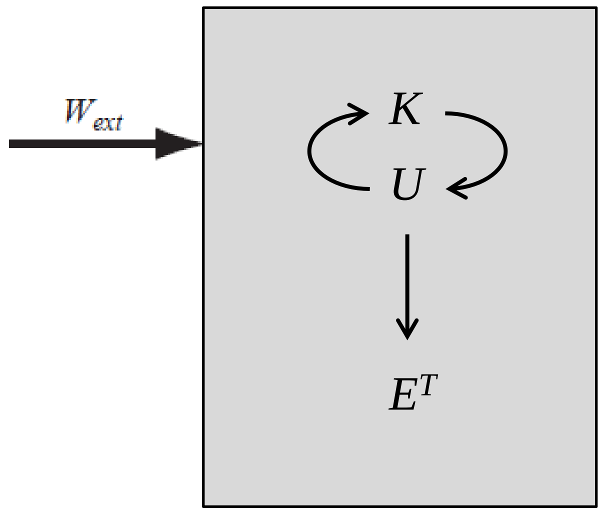
ikke-konservativ kraft

Energibevaring

energi i systemet er bevart: $E_{\text{tot}} = K + U + E^T$

arbeid fra ytre kraft:

$$\Delta E_{\text{tot}} = W_{ext}$$



lukket system:

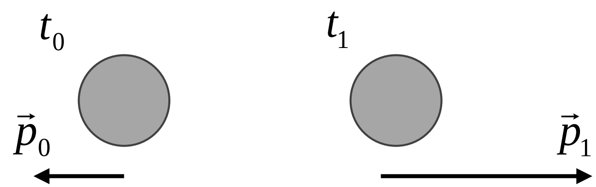
- ➢ konservative krefter
  kinetisk $\Leftrightarrow$ potensiell energi
- ➢ ikke – konservative krefter
  (dissipative krefter)
  mekanisk $\Rightarrow$ termisk energi

Bevegelsesmengde

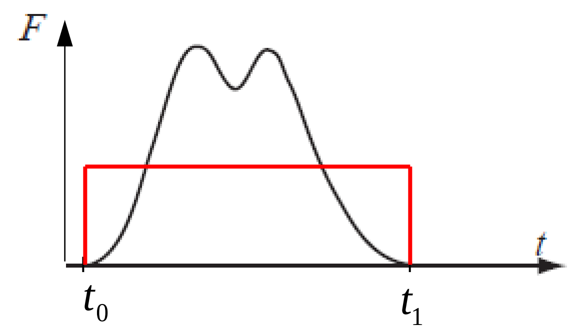
bevegelsesmengde $\vec{p} = m\vec{v}$

Newtons andre lov: $\sum_i \vec{F}_i^{\text{ext}} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$

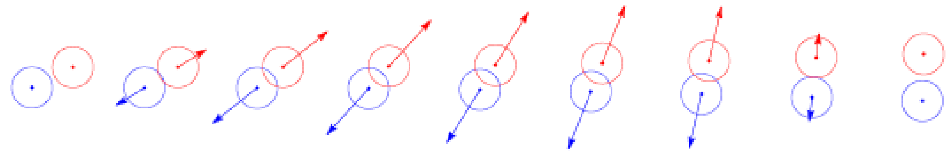
impuls: $\vec{J} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}\,dt = \int_{t_0}^{t_1} \dfrac{d\vec{p}}{dt}dt = \vec{p}_1 - \vec{p}_0$



$$\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \frac{\vec{J}}{\Delta t} = \frac{1}{t_1 - t_0}\int_{t_0}^{t_1} \vec{F}\,dt = \vec{F}_{\text{avg}}$$



bevaring av bevegelsesmengde



$$\sum \vec{F}^{\text{ext}} = 0 \qquad \frac{d}{dt}(\vec{p}_A + \vec{p}_B) = 0 \qquad \vec{p}_A + \vec{p}_B = \text{konst.}$$

- vektorligning, gjelder for alle komponenter separat: $\sum F_x^{\text{ext}} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_x = \text{konst.}$
- gjelder for vilkårlig mange partikler
- gjelder for alle typer krefter mellom partikler
  (ikke bare konservative)

kollisjon: en prosess mellom to eller flere legemer
- hvor indre krefter er mye større enn ytre krefter fra omgivelsen
- som varer en kort tid i forhold til tidsskala av bevegelsen

$$\Delta \vec{P} = \vec{J}_{\text{ext}} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_{\text{ext}}\, dt \approx \vec{F}_{\text{ext}}(t_1 - t_0)$$

$$\Delta t \to 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{J}_{\text{ext}} \to 0$$

bevegelsesmengden er (nesten) bevart
i en kollisjon som er (nesten) momentant

http://pingo.upb.de/ access number: 8178

Alle Nordmenn hopper samtidig opp på et avtalt signal.
Omtrent ett sekund senere lander de på bakken igjen.
Etter at menneskene har landet, er jordens bevegelsesmengde:

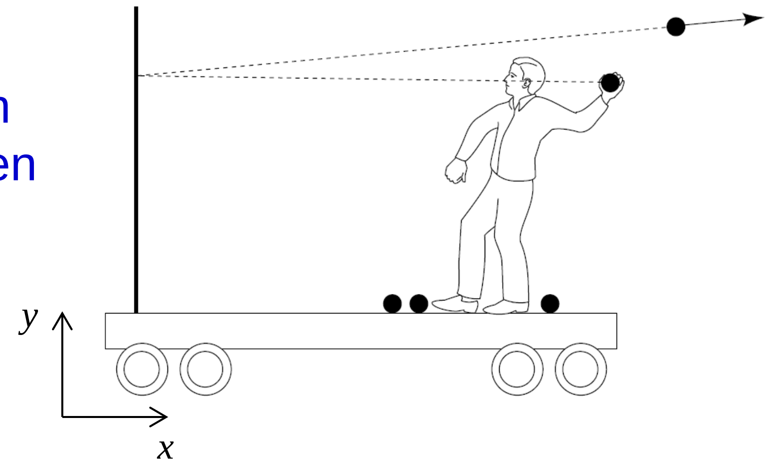
1. Større enn den var før?
2. Den samme som før?
3. Mindre enn den var før?

system: jordkloden og 5 million Nordmenn
ingen ytre krefter
bevegelsesmengde bevart for hele systemet
bevegelsesmengde av Nordmenn før hopp = etter hopp
jordens bevegelsesmenge før hopp = etter hopp

http://pingo.upb.de/ access number: 8178

Du står på en vogn som er i ro på et friksjonsfritt spor. Du kaster en ball i en vegg som er festet i vognen. Hvis ballen spretter tilbake som vist på figuren blir da vognen satt i bevegelse?

1. Ja, den beveger seg mot høyre.
2. Ja, den beveger seg mot venstre.
3. Nei, den forblir i ro.



system A: mann + vogn
system B: ball

Hva skjer hvis han fanger ballen igjen?

$\sum \vec{F}_x^{\text{ext}} = 0$ bevegelsesmengde i x retning er bevart:

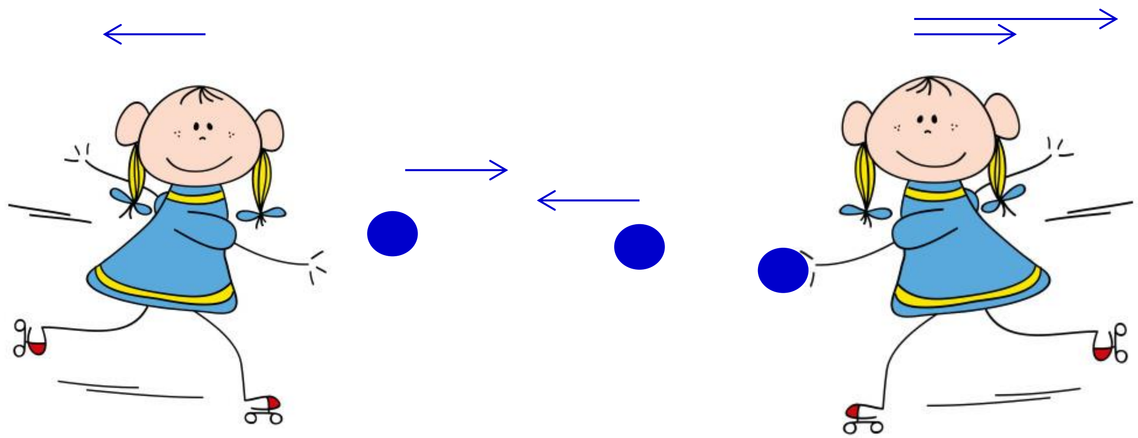
bevegelsesmengde i x retning før kast: $p_A + p_B = 0$

etter kast: $p_B > 0 \quad \Rightarrow \quad p_A < 0$

vogn beveger seg mot venstre

To jenter på rulleskøyte kaster en ball frem og tilbake. Du kan neglisjere friksjon og luftmotstand. Etter at ballen gikk et par ganger frem og tilbake:

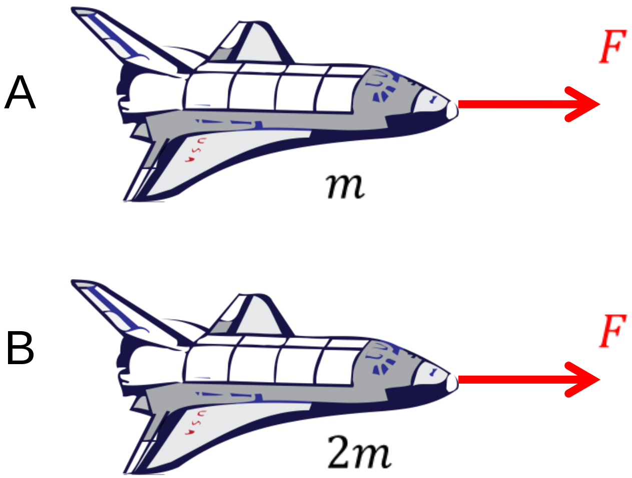
1. står jentene på samme plass.
2. står jentene lenger fra hverandre.
3. står jentene nærmere.
4. beveger jentene seg fra hverandre.
5. beveger jentene seg mot hverandre.



http://pingo.upb.de/ access number: 8178

To identiske romskip starter samtidig og akselerer med samme konstant kraft F. Skip A har masse m, skip B er fullastet og har masse $2m$. Etter en tid t er bevegelsesmengden til skip B i forhold til skip A:

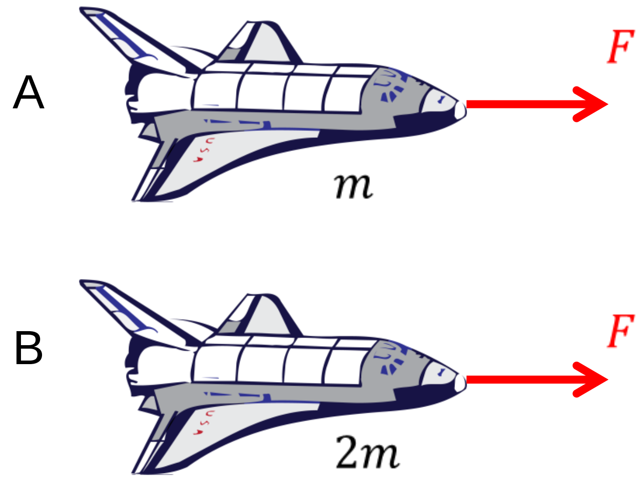
1. $p_B = \frac{1}{4} p_A$
2. $p_B = \frac{1}{2} p_A$
3. $p_B = p_A$
4. $p_B = 2 p_A$
5. $p_B = 4 p_A$



$$\Delta p = J = \int_{t_0}^{t_1} F dt = F \Delta t$$

To identiske romskip starter samtidig og akselerer med samme konstant kraft F. Skip A har masse m, skip B er fullastet og har masse $2m$. Etter en tid t er den kinetiske energien til skip B i forhold til skip A:

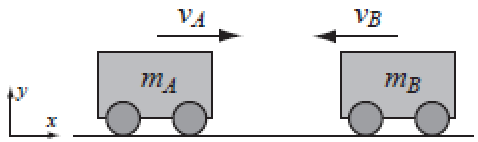
1. $K_B = \frac{1}{4} K_A$
2. $K_B = \frac{1}{2} K_A$
3. $K_B = K_A$
4. $K_B = 2K_A$
5. $K_B = 4K_A$



$$p_A = mv \qquad K_A = \frac{1}{2} m v^2$$

$$p_B = 2m \frac{1}{2} v = p_A \qquad K_B = \frac{1}{2}(2m)\left(\frac{1}{2} v\right)^2 = \frac{1}{2} K_A$$

Kollisjon i én dimensjon



bevaring av bevegelsesmengde $$m_A v_{A,0} + m_B v_{B,0} = m_A v_{A,1} + m_B v_{B,1}$$

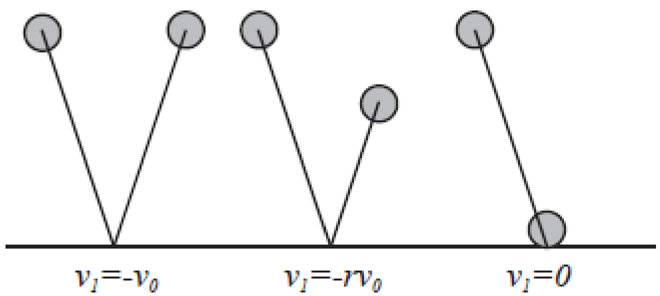
1 ligning, 2 ukjente: vi trenger mer informasjon

hvis det virker bare elastiske krefter i kollisjonen:

energibevaring: $$\frac{1}{2} m_A v_{A,0}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{B,0}^2 = \frac{1}{2} m_A v_{A,1}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{B,1}^2$$

2 ligninger, 2 ukjente: vi kan finne $v_{A,1}, v_{B,1}$

hva hvis det er også ikke-konservative krefter ?



restitusjonskoeffisient: $v_1 = -r v_0$

elastisk kollisjon: $r = 1: \quad v_1 = -v_0$

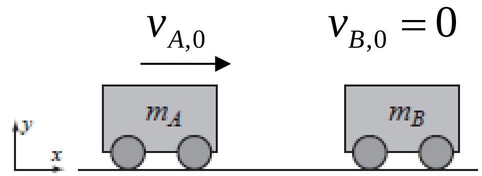
energi er bevart

uelastisk kollisjon: $0 < r < 1: \quad v_1 = -r v_0$

energi er ikke bevart

fullstendig uelastisk kollisjon: $r = 0: \quad v_1 = 0$

spesialfall: elastisk støt hvor $v_{B,0} = 0$



bevaring av bevegelsesmengde

$$m_A v_{A,0} = m_A v_{A,1} + m_B v_{B,1}$$

$$m_A (v_{A,0} - v_{A,1}) = m_B v_{B,1}$$

bevaring av energi

$$m_A v_{A,0}^2 = m_A v_{A,1}^2 + m_B v_{B,1}^2$$

$$m_A (v_{A,0}^2 - v_{A,1}^2) = m_B v_{B,1}^2$$

$$m_A (v_{A,0} - v_{A,1})(v_{A,0} + v_{A,1}) = m_B v_{B,1}^2$$

$$v_{A,0} + v_{A,1} = v_{B,1}$$

$$m_A (v_{A,0} - v_{A,1}) = m_B (v_{A,0} + v_{A,1})$$

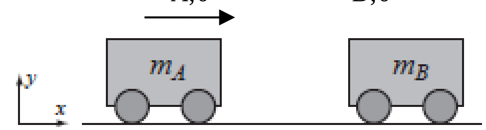
$$(m_A - m_B) v_{A,0} = (m_A + m_B) v_{A,1}$$

$$v_{A,1} = \frac{(m_A - m_B)}{(m_A + m_B)} v_{A,0}$$

$$v_{B,1} = v_{A,0} + v_{A,1} = v_{A,0} + \frac{(m_A - m_B)}{(m_A + m_B)} v_{A,0} = \frac{2 m_A}{(m_A + m_B)} v_{A,0}$$

$$v_{A,1} = \frac{(m_A - m_B)}{(m_A + m_B)} v_{A,0}$$

$v_{A,0}$ $\quad v_{B,0} = 0$



$$v_{B,1} = \frac{2m_A}{(m_A + m_B)} v_{A,0}$$

hvis: $m_A = m_B$ $\qquad v_{A,1} = 0 \qquad v_{B,1} = v_{A,0}$

hvis: $m_A << m_B$ $\qquad v_{A,1} = \frac{(m_A - m_B)}{(m_A + m_B)} v_{A,0} \approx \frac{-m_B}{m_B} v_{A,0} = -v_{A,0} \qquad v_{B,1} \approx 0$

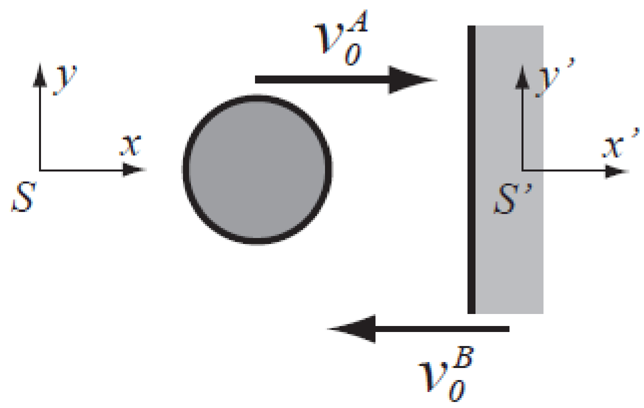
hvis: $m_A >> m_B$ $\qquad v_{A,1} = \frac{(m_A - m_B)}{(m_A + m_B)} v_{A,0} \approx \frac{m_A}{m_A} v_{A,0} = v_{A,0}$

$$v_{B,1} = \frac{2m_A}{(m_A + m_B)} v_{A,0} \approx \frac{2m_A}{m_A} v_{A,0} = 2v_{A,0}$$

vi kan bruke resultatet også hvis $v_{B,0} \neq 0$

$\Rightarrow$ transformasjon av referansesystem

Eksempel: en ball treffer en (tung) racket



vi velger et koordinatsystem S'
som beveger seg med racketen:

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}'$$

$$\vec{v} = \vec{u} + \vec{v}'$$

$$\vec{v}'_{B,0} = 0$$

$$\vec{v}'_{A,0} = \vec{v}_{A,0} - \vec{u} = \vec{v}_{A,0} - \vec{v}_{B,0}$$

siden $m_A << m_B$

$$\vec{v}'_{A,1} = -\vec{v}'_{A,0}$$

$$\vec{v}'_{B,1} = 0$$

transformasjon tilbake: $\vec{v}_{A,1} = \vec{u} + \vec{v}'_{A,1} = \vec{v}_{B,0} - \vec{v}'_{A,0} = \vec{v}_{B,0} - (\vec{v}_{A,0} - \vec{v}_{B,0}) = 2\vec{v}_{B,0} - \vec{v}_{A,0}$

$$\vec{v}_{B,1} = \vec{u} + \vec{v}'_{B,1} = \vec{v}_{B,0} + 0 = \vec{v}_{B,0}$$

fullstendig uelastisk støt

partikler henger sammen etter kollisjonen: $v_{A,1} = v_{B,1} = v_1$

vi antar at partikkel B er i ro (uten tap av generell gyldighet): $v_{B,0} = 0$

bevaring av bevegelsesmengde: $m_A v_{A,0} = m_A v_{A,1} + m_B v_{B,1} = (m_A + m_B) v_1$

$$v_1 = \frac{m_A}{m_A + m_B} v_{A,0}$$

kinetisk energi: $K_0 = \frac{1}{2} m_A v_{A,0}^2$

$$K_1 = \frac{1}{2}(m_A + m_B) v_1^2 = \frac{1}{2}(m_A + m_B) \frac{m_A^2}{(m_A + m_B)^2} v_{A,0}^2$$

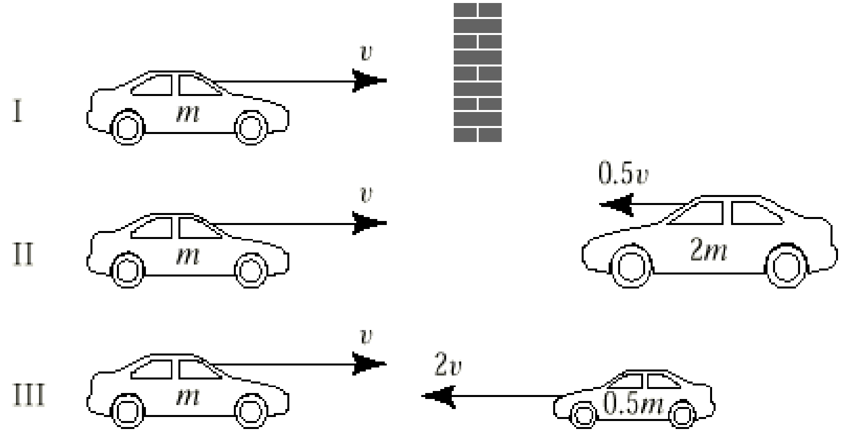
$$= \frac{m_A}{m_A + m_B} \frac{1}{2} m_A v_{A,0}^2 = \frac{m_A}{m_A + m_B} K_0$$

$m_A >> m_B$ $\quad K_1 \approx \frac{m_A}{m_A} K_0 = K_0$ $\quad$ ingen energitap

$m_A << m_B$ $\quad K_1 \approx 0$ $\quad$ energi fullstendig tapt $\quad$ hvor er energien?

Vi antar at alle kollisjoner er fullstendig uelastisk.
Hvilke(n) kollisjon(er) stanser bilen som kjører fra venstre til høyre?

A. bare I
B. bare II
C. bare III
D. II og III
E. alle tre



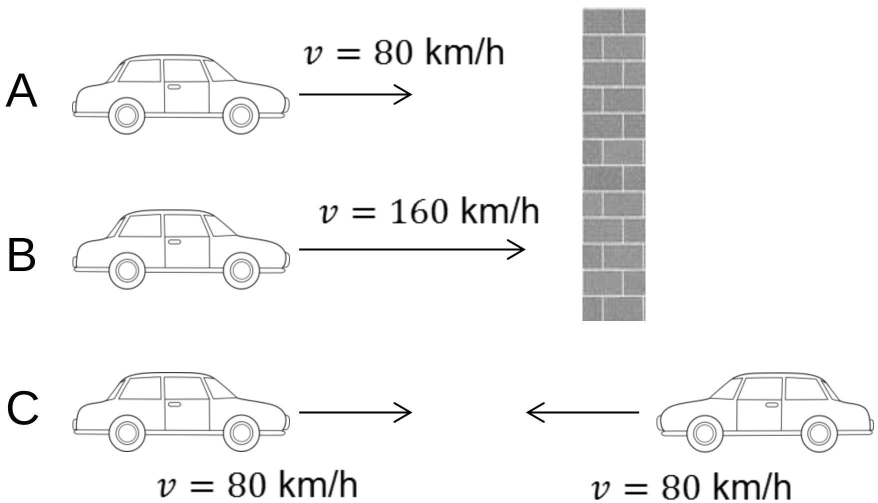
$$m_A\vec{v}_{A,0} + m_B\vec{v}_{B,0} = (m_A + m_B)\vec{v}_1$$

$$\vec{v}_1 = \frac{m_A\vec{v}_{A,0} + m_B\vec{v}_{B,0}}{m_A + m_B}$$

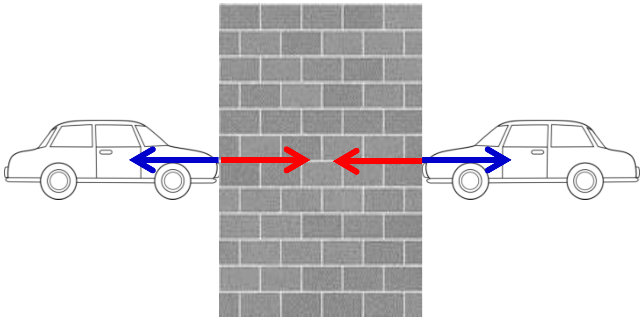
http://pingo.upb.de/ access number: 8178

3 eksperimenter med identiske biler:
A: En bil krasjer i en vegg med $v = 80$ km/h.
B: En bil krasjer i en vegg med $v = 160$ km/h.
C: To biler krasjer i hverandre med $v = 80$ km/h i hver sin retning.
Hvor stor er skaden for hver bil i eksperiment C?

A. Det samme som i A
B. Større enn i A men mindre enn i B
C. Det samme som i B
D. Større enn i B

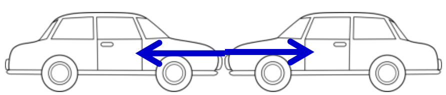


$$\vec{J} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F} dt = \vec{p}(t_1) - \vec{p}(t_0) = -m\vec{v}$$



kraft fra bil på veggen: $\vec{F}_{b \to v}$

kraft fra vegg på bilen: $\vec{F}_{v \to b} = -\vec{F}_{b \to v}$

A  B

kraft fra bil A på bil B: $\vec{F}_{A \to B}$

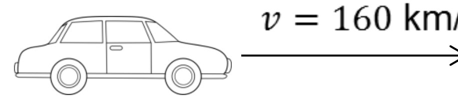
kraft fra bil B på bil A: $\vec{F}_{B \to A} = -\vec{F}_{A \to B}$

kinetisk energi $\rightarrow$ deformasjon

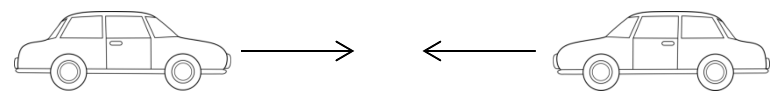
$v = 80$ km/h

$$K_0 = \frac{1}{2} m v^2$$

$v = 160$ km/h



$$K = \frac{1}{2} m (2v)^2 = 4K_0$$



$v = 80$ km/h $\qquad$ $v = 80$ km/h

$$K_{tot} = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} m v^2 = 2K_0$$

fordelt på to biler