Bevegelsesmengde og kollisjoner

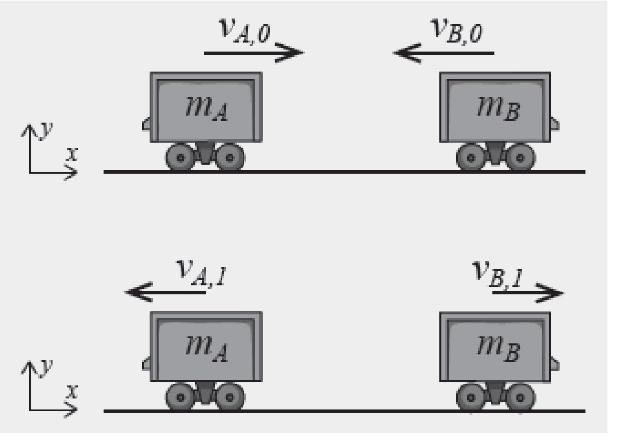
Flerpartikkelsystemer

16.03.2015

Midtveiseksamen: 26.03.   kl.10 – 13

- 6 oppgaver av samme type som ukesoppgaver
  (ikke stor prosjektoppgave som i obligene)
- en oppgave krever et lite stykk Matlab eller Python kode
  (ikke et fullstendig program, bare den vesentlige delen)
- Tillate hjelpemidler (uten at det er behov…):
  - Øgrim og Lian: *Størrelser og enheter i fysikk og teknikk* eller
  - Angell, Lian, Øgrim: *Fysiske størrelser og enheter: Navn og symboler*
  - Rottmann: *Matematisk formelsamling*
  - Elektronisk kalkulator av godkjent type.
- Formelark i vedlegg
- Husk å forklare hva du gjør.

Kollisjoner



bevaring av bevegelsesmengde:

$$\vec{p}_{A,0} + \vec{p}_{B,0} = \vec{p}_{A,1} + \vec{p}_{B,1}$$

elastisk kollisjon $\Rightarrow$ bevaring av energi

$$\frac{1}{2}m_A v_{A,0}^2 + \frac{1}{2}m_B v_{B,0}^2 = \frac{1}{2}m_A v_{A,1}^2 + \frac{1}{2}m_B v_{B,1}^2$$

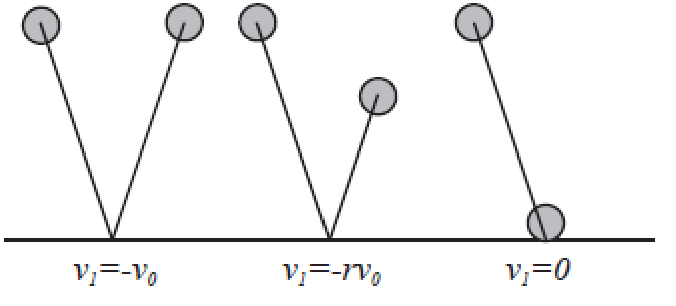
$$v_{A,1} = \frac{(m_A - m_B)v_{A,0} + 2m_B v_{B,0}}{m_A + m_B} \qquad v_{B,1} = \frac{(m_B - m_A)v_{B,0} + 2m_A v_{A,0}}{m_A + m_B}$$

fullstendig uelastisk kollisjon: $\vec{v}_{A,1} = \vec{v}_{B,1}$

$$v_{A,1} = v_{B,1} = \frac{m_A v_{A,0} + m_B v_{B,0}}{m_A + m_B}$$

uelastisk kollisjon:

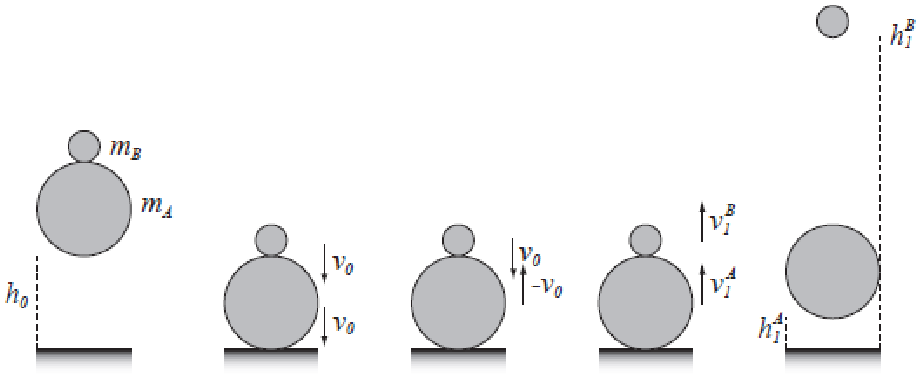
restitusjonskoeffisient: $r = -\dfrac{v_{B,1} - v_{A,1}}{v_{B,0} - v_{A,0}}$



Eksempel

Hva er maksimal høyde h_1 for ball B ?

(vi antar at alle kollisjoner er elastisk)



Fase 1: begge baller faller

energibevaring: $mgh_0 = \frac{1}{2} m v_0^2$ $\quad v_0 = \sqrt{2gh_0}$

Fase 2: ball A kolliderer med gulvet

bevaring av energi og bevegelsesmengde: hastigheten snur $-v_0 \rightarrow +v_0$

Fase 3: ball A kolliderer med ball B

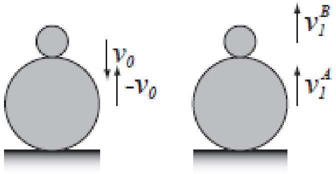
momentant støt $\Rightarrow$ små impuls fra gravitasjon
$\Rightarrow$ bevaring av bevegelsesmengde

$$m_A v_0 - m_B v_0 = m_A v_A + m_B v_B$$

elastisk støt: bevaring av energi

$$\frac{1}{2} m_A v_0^2 + \frac{1}{2} m_B v_0^2 = \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2$$

bevaring av energi $$\frac{1}{2}m_A v_0^2 + \frac{1}{2}m_B v_0^2 = \frac{1}{2}m_A v_A^2 + \frac{1}{2}m_B v_B^2$$



$$m_A(v_0^2 - v_A^2) = m_B(v_B^2 - v_0^2)$$

$$m_A(v_0 - v_A)(v_0 + v_A) = m_B(v_B - v_0)(v_B + v_0)$$

bevaring av bevegelsesmengde: $$m_A v_0 - m_B v_0 = m_A v_A + m_B v_B$$

÷

$$m_A(v_0 - v_A) = m_B(v_0 + v_B)$$

$$v_0 + v_A = v_B - v_0$$

$$v_A = v_B - 2v_0$$

vi setter inn: $$m_A(v_0 - (v_B - 2v_0)) = m_B(v_0 + v_B)$$

$$(3m_A - m_B)v_0 = (m_A + m_B)v_B$$

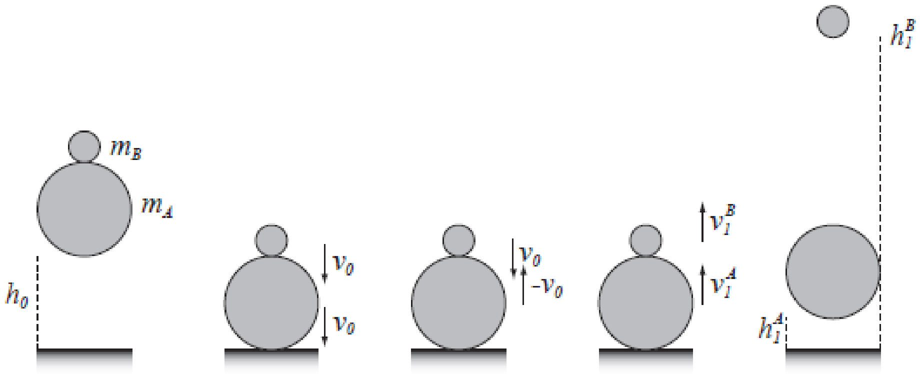
$$v_B = \frac{3m_A - m_B}{m_A + m_B}v_0$$

hvis $m_A >> m_B$ $$v_B \approx \frac{3m_A}{m_A}v_0 = 3v_0$$

Eksempel

Hva er maksimal høyde h_1 for ball B ?

(vi antar at alle kollisjoner er elastisk)



Fase 1: begge baller faller

energibevaring: $mgh_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$ $\qquad v_0 = \sqrt{2gh_0}$

Fase 2: ball A kolliderer med gulvet

bevaring av energi og bevegelsesmengde: hastigheten snur $-v_0 \rightarrow +v_0$

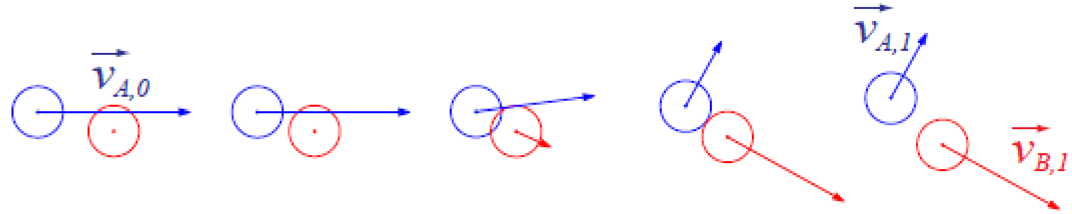
Fase 3: ball A kolliderer med ball B $\qquad v_B \approx \frac{3m_A}{m_A} v_0 = 3v_0$

Fase 4: begge baller spretter opp:

energibevaring for ball B $\qquad m_B g h_B = \frac{1}{2} m_B v_B^2$

$$h_B = \frac{1}{2g} v_B^2 = \frac{1}{2g} 9v_0^2 = \frac{9}{2g} 2gh_0 = 9h_0$$

Ikke-sentralt støt



vi kan velge et koordinatsystem slik at $\vec{v}_{B,0} = 0$

bevegelsen etter kollisjonen er todimensjonal i et plan dannet av $\vec{v}_{A,1}, \vec{v}_{B,1}$

hvis det virker ingen ytre krefter er bevegelsesmengde bevart: $m_A \vec{v}_{A,0} = m_A \vec{v}_{A,1} + m_B \vec{v}_{B,1}$

vi kan se separat på x og y retning:

$$m_A v_{A,0,x} = m_A v_{A,1,x} + m_B v_{B,1,x}$$

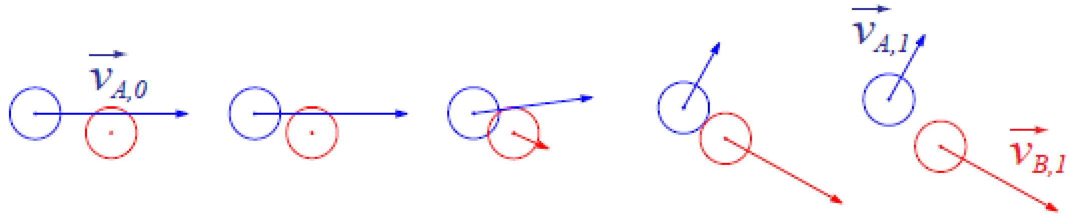
$$m_A v_{A,0,y} = m_A v_{A,1,y} + m_B v_{B,1,y}$$

hvis kollisjonen er elastisk er energi bevart: $\frac{1}{2} m_A v_{A,0}^2 = \frac{1}{2} m_A v_{B,0}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{B,1}^2$

3 ligninger, men 4 ukjente: $v_{A,1,x}, v_{A,1,y}, v_{B,1,x}, v_{B,1,y}$

vi trenger mer informasjon om kreftene for a bestemme hastighetene etter kollisjonen.

vi kan modellere kollisjonen:



2 kuler med radius *R*

avstand mellom sentrene: $\Delta r = |\vec{r}_B(t) - \vec{r}_A(t)|$

avstand mellom overflatene: $|\Delta r - 2R|$

realistisk modell for kontaktkraft mellom kulene: (med dempning)

$$\vec{F} = \begin{cases} -k|\Delta r - 2R|^{\frac{3}{2}} \dfrac{\Delta \vec{r}}{\Delta r} + \eta \Delta v & \Delta r < 2R \\ 0 & \Delta r \geq 2R \end{cases}$$

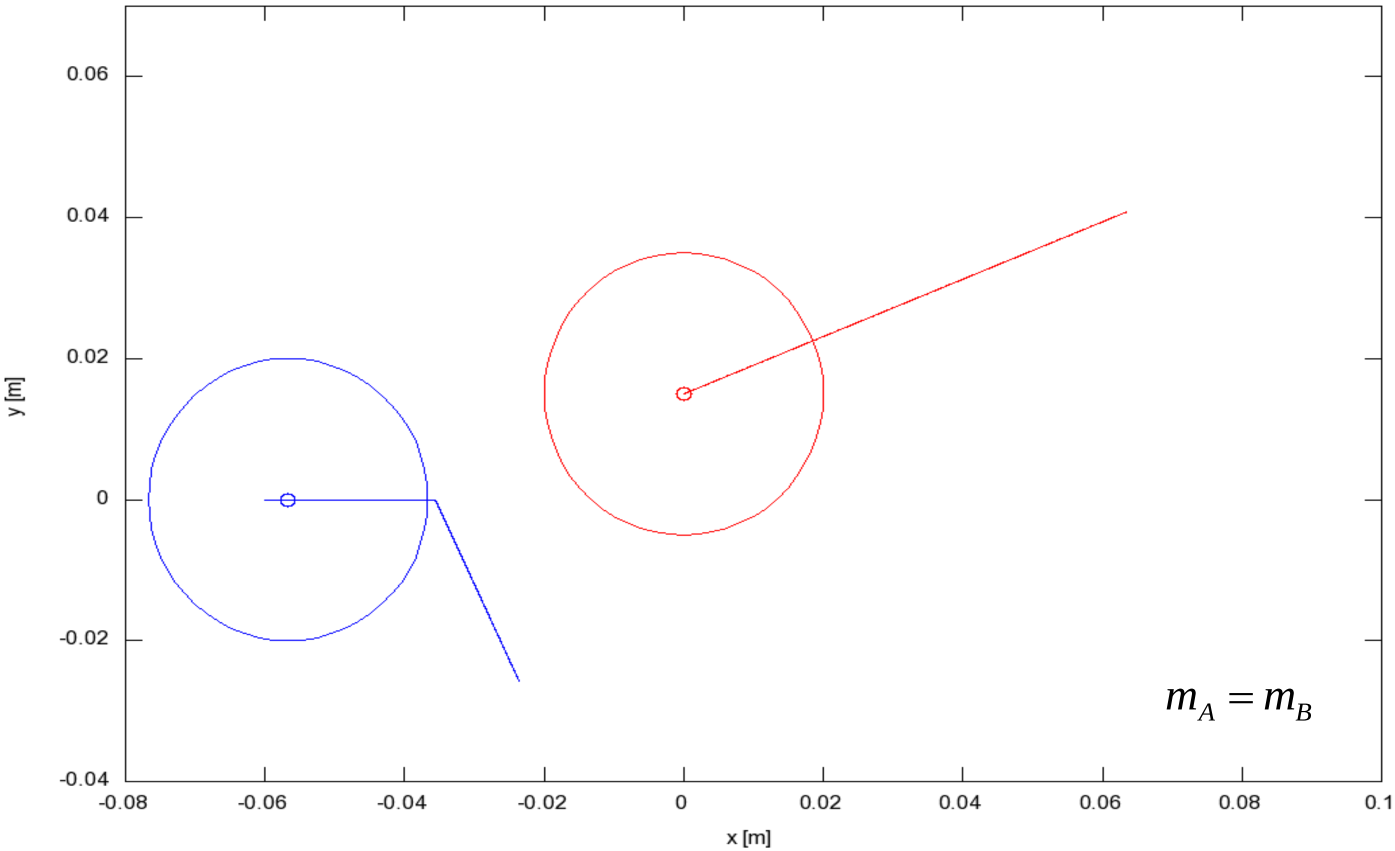
N3L: $\vec{F}_{\text{fra A på B}} = -\vec{F}_{\text{fra B på A}}$

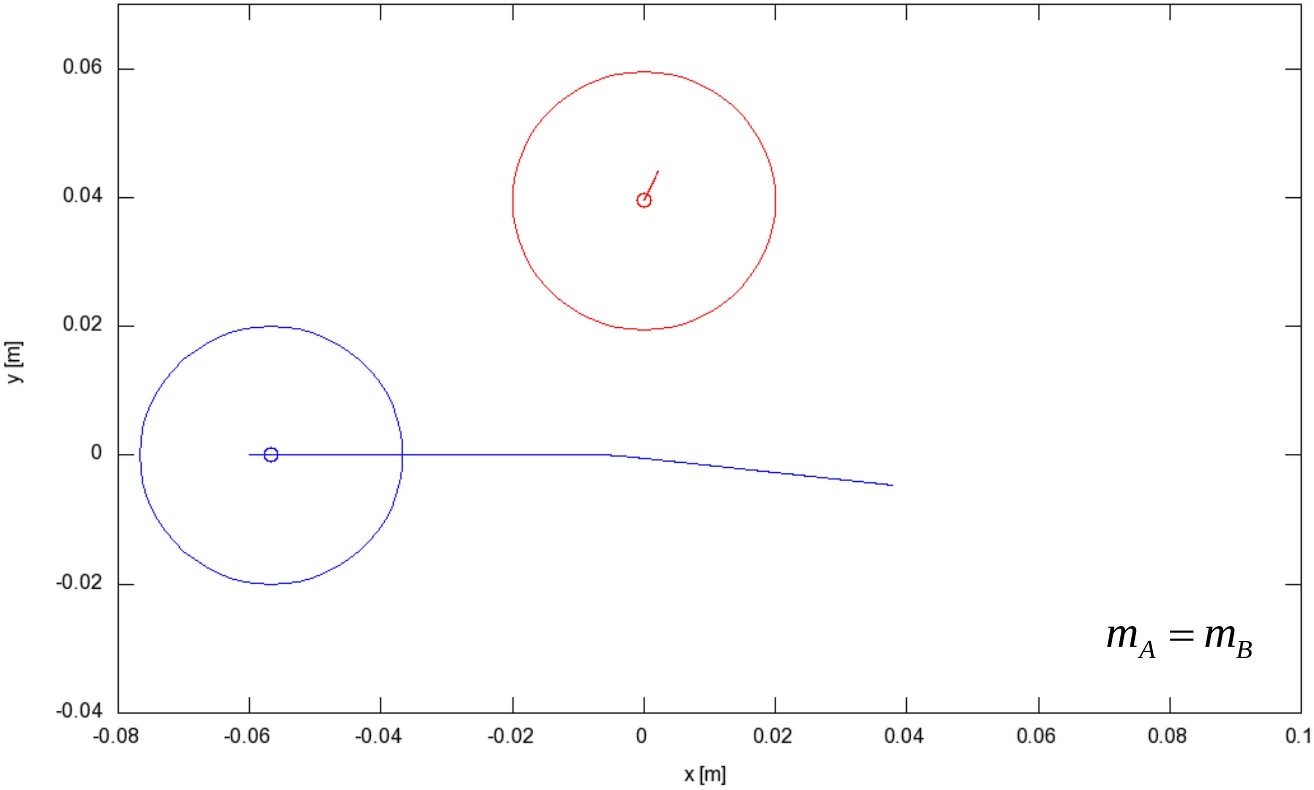
N2L: $\vec{F}_{\text{fra A på B}} = m_B \vec{a}_B$

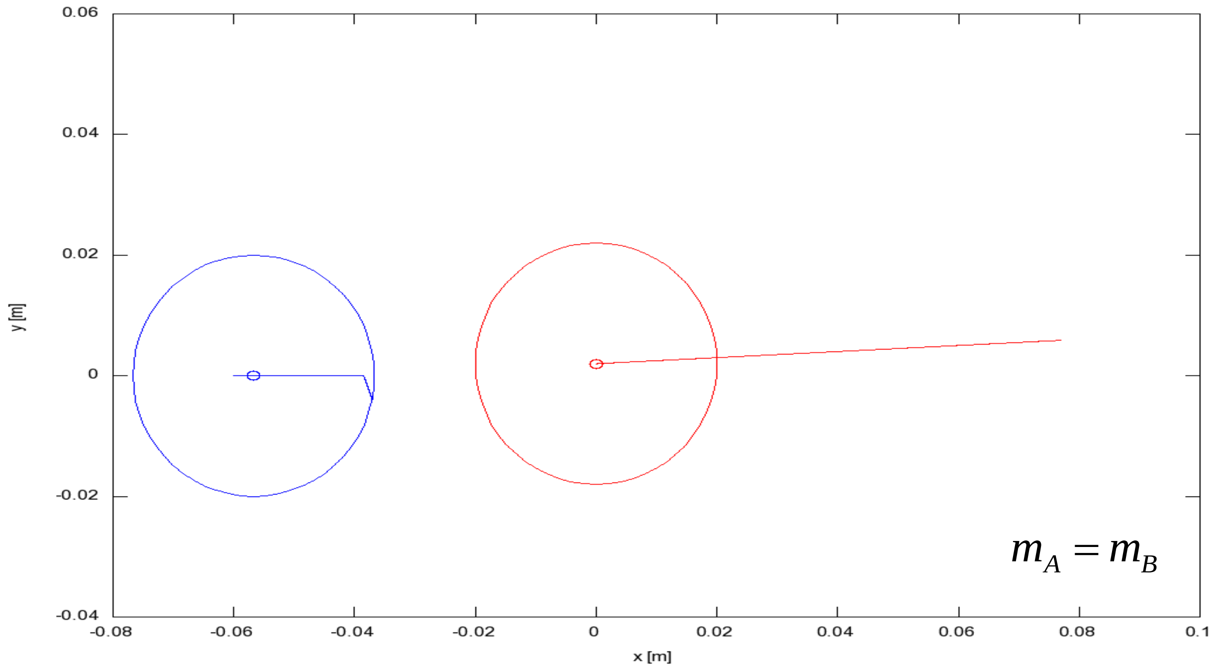
$\vec{F}_{\text{fra B på A}} = m_A \vec{a}_A$

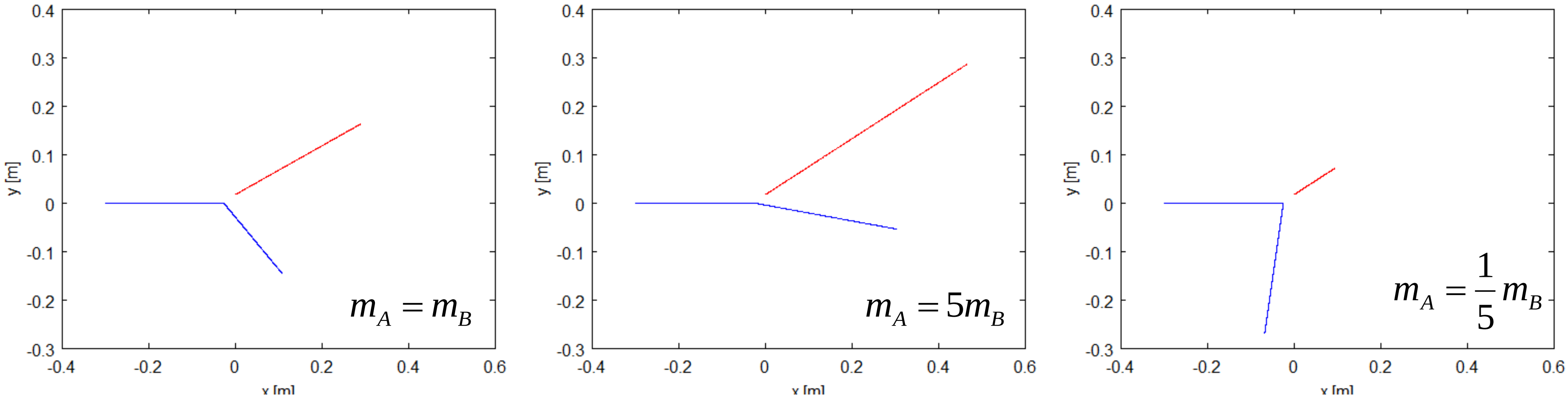
numerisk løsning:
Euler-Cromer
for begge kuler

```
% Integration loop
for i = 1:n-1
    Deltar = rB(i,:)-rA(i,:);
    Deltarnorm = norm(Deltar);
    Deltav = vB(i,:)-vA(i,:);
    if (Deltarnorm>=D)
        Fnet = [0 0];
    else
        Fnet = -k*abs(Deltarnorm-D)^1.5...
            *Deltar/Deltarnorm + eta*Deltav;
    end
    F(i,:) = Fnet;
    aA = Fnet/mA;
    aB = -Fnet/mB;
    vA(i+1,:) = vA(i,:) + aA*dt;
    rA(i+1,:) = rA(i,:) + vA(i+1,:)*dt;
    vB(i+1,:) = vB(i,:) + aB*dt;
    rB(i+1,:) = rB(i,:) + vB(i+1,:)*dt;
    t(i+1) = t(i) + dt;
end
```


0.06
0.04
0.02
0
-0.02
-0.04
y [m]
-0.08
-0.06
-0.04
-0.02
0
0.02
0.04
0.06
0.08
0.1
x [m]
$m_A = m_B$


0.06
0.04
0.02
0
-0.02
-0.04
y [m]
-0.08
-0.06
-0.04
-0.02
0
0.02
0.04
0.06
0.08
0.1
x [m]
$m_A = m_B$

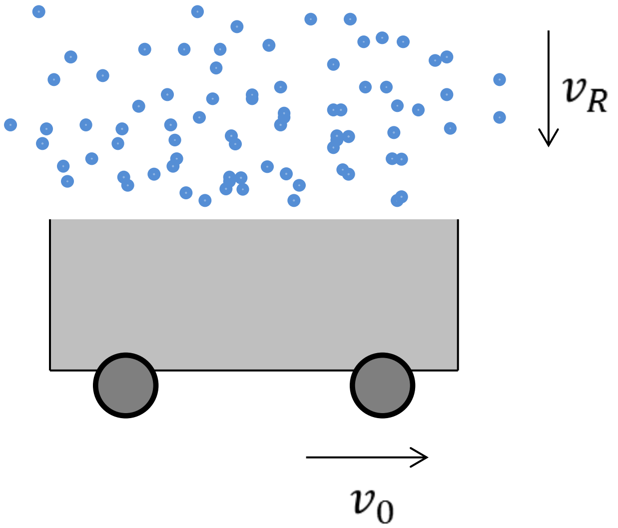

0.06
0.04
0.02
0
-0.02
-0.04
y [m]
-0.08
-0.06
-0.04
-0.02
0
0.02
0.04
0.06
0.08
0.1
x [m]
$m_A = m_B$



samme posisjoner ved t_0
samme hastigheter ved t_0 $(v_{B,0} = 0)$
forskjellige masser

Regn faller ned i en åpen vogn som triller på et rett, friksjonsfritt spor. Hastigheten til vognen vil

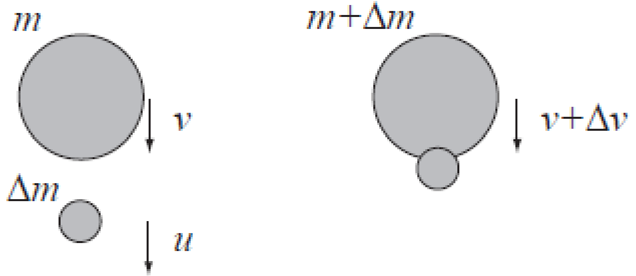
A. øke
B. være uforandret
C. minke
D. vet ikke



ingen kraft i horisontal retning
$\Rightarrow$ bevegelsesmengde er bevart: $p_x = mv_0$

massen øker med regn som samles i vogn
$\Rightarrow$ hastigheten minker

En regndråpe faller og adsorberer vanndamp



før: $\vec{p}(t) = m\vec{v} + \Delta m\vec{u}$

etter: $\vec{p}(t+\Delta t) = (m+\Delta m)(\vec{v}+\Delta\vec{v})$

$$= m\vec{v} + \Delta m\vec{v} + m\Delta\vec{v} + \cancel{\Delta m\Delta\vec{v}} \approx m\vec{v} + \Delta m\vec{v} + m\Delta\vec{v}$$

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}(t+\Delta t) - \vec{p}(t) = m\Delta\vec{v} + (\vec{v}-\vec{u})\Delta m$$

Newtons andre lov: $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{p}}{dt} \approx \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} + (\vec{v}-\vec{u})\frac{\Delta m}{\Delta t}$

for et kort tidsintervall og en kontinuerlig adsorpsjon:

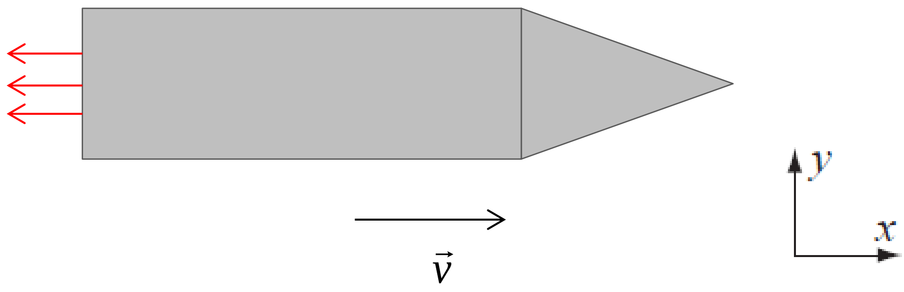
$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} + (\vec{v}-\vec{u})\frac{dm}{dt}$$ rakettligning

relativhastighet $\vec{v}_{\text{rel}} = \vec{u} - \vec{v}$ $\qquad \sum \vec{F}_{\text{ext}} + \vec{v}_{\text{rel}}\frac{dm}{dt} = m\vec{a}$

Rakett i verdensrom

ingen ytre krefter

gass strømmer ut med hastighet $\vec{v}_{\text{rel}}$ relativ til raketten



$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} + \vec{v}_{\text{rel}} \frac{dm}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

i x retning: $-v_{\text{rel}} \dfrac{dm}{dt} = m\dfrac{dv}{dt}$

$$\frac{dv}{dt} = -v_{\text{rel}} \frac{1}{m}\frac{dm}{dt}$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{dv}{dt} dt = -v_{\text{rel}} \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{m}\frac{dm}{dt} dt$$

$$\int_{v(t_0)}^{v(t_1)} dv = -v_{\text{rel}} \int_{m(t_0)}^{m(t_1)} \frac{dm}{m}$$

$$v(t_1) - v(t_0) = -v_{\text{rel}} \left(\ln m(t_1) - \ln m(t_0)\right)$$

$$v(t_1) = v(t_0) - v_{\text{rel}} \ln\left(\frac{m(t_1)}{m(t_0)}\right)$$

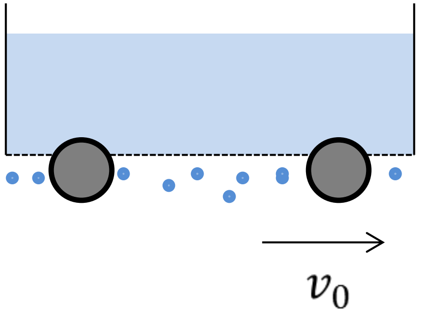
$$v(t_1) = v(t_0) + v_{\text{rel}} \ln\left(\frac{m(t_0)}{m(t_1)}\right)$$

masse blir mindre og hastighet øker

http://pingo.upb.de/ access number: 8178

En tankvogn triller på et rett, friksjonsfritt spor. Undersiden av vogn er utett slik at væsken renner ut. Hastigheten til vognen vil

A. øke
B. være uforandret
C. minke
D. vet ikke

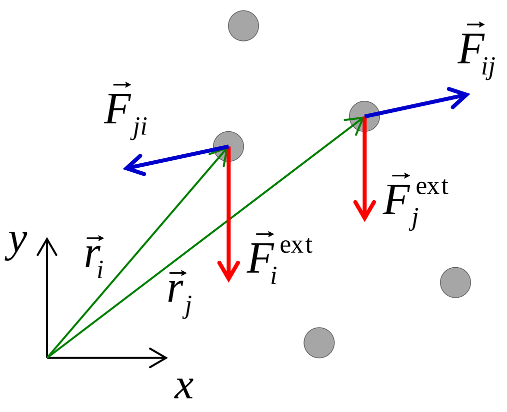


$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} + (\vec{v} - \vec{u})\frac{dm}{dt}$$

ingen kraft i horisontal retning
$\Rightarrow$ bevegelsesmengde er bevart: $p_x = mv_0$

væsken som renner ut har samme horisontalhastighet som vogn
$\Rightarrow$ hastigheten til vogn forandrer seg ikke

Flerpartikkelsystemer



system: N partikler

posisjon: $\vec{r}_i(t)$ hastighet: $\vec{v}_i(t) = \frac{d\vec{r}_i}{dt}$

bevegelsesmengde: $\vec{p}_i(t) = m_i \vec{v}_i(t)$

ytre kraft på partikler: $\vec{F}_i^{\text{ext}}$

indre kraft fra partikkel j på partikkel i : $\vec{F}_{ji}$

nettokraft på partikkel i : $\vec{F}_i^{\text{net}} = \vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji} = \frac{d}{dt}\vec{p}_i$ (N2L)

bevegelse for hele systemet: $\sum_i \vec{F}_i^{\text{net}} = \sum_i \vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji} = \sum_i \frac{d}{dt}\vec{p}_i$

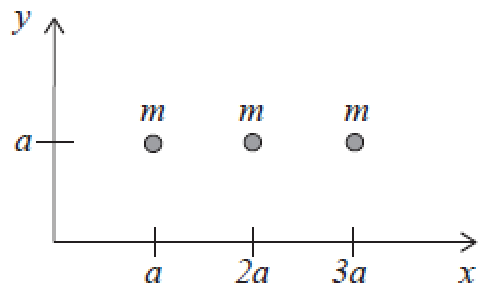
$\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$ (N3L)

$\sum_i \vec{F}_i^{\text{ext}} = \frac{d}{dt}\sum_i \vec{p}_i = \frac{d}{dt}\vec{P}$ (N2L for et flerpartikkelsystem)

bevegelsesmengde for hele systemet: $\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i$

Massesenter $\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i$

eksempel:



vi finner massesenteret separat for x og y retning:

$$X = \frac{1}{M} \sum_i m_i x_i = \frac{ma + 2ma + 3ma}{3m} = 2a$$

$$Y = \frac{1}{M} \sum_i m_i y_i = \frac{ma + ma + ma}{3m} = a$$

$$\vec{R} = 2a\,\hat{i} + a\,\hat{j}$$

http://pingo.upb.de/ access number: 8178

Hva er massesenteret for dette systemet?

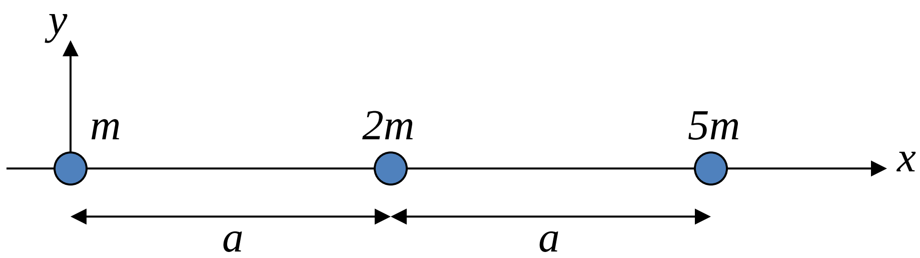
A. $x_{cm}=1a$

B. $x_{cm}=3/2a$

C. $x_{cm}=5/4a$

D. $x_{cm}=13/8a$

E. Vet ikke



$$X=\frac{1}{M}\sum_i m_i x_i=\frac{2ma+5m2a}{8m}=\frac{3}{2}a$$

Flerpartikkelsystem

N2L: $\sum_i \vec{F}_i^{\text{ext}} = \frac{d}{dt}\vec{P}$

bevegelsesmengde: $\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i$

masse: $M = \sum_i m_i$

massesenter: $\vec{R} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{r}_i$ obs: $\vec{R} \neq \sum_i \vec{r}_i$

hastighet: $\vec{V} = \frac{d}{dt}\vec{R} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{v}_i$ obs: $\vec{V} \neq \sum_i \vec{v}_i$

$$\Rightarrow \quad \vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i = M\vec{V}$$

akselerasjon: $\vec{A} = \frac{d}{dt}\vec{V} = \frac{d^2}{dt^2}\vec{R} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{a}_i$

$$\sum_i \vec{F}_i^{\text{ext}} = \frac{d}{dt}\vec{P} = \frac{d}{dt}M\vec{V} = M\vec{A}$$

N2L for flerpartikkelsystem