Flerpartikkelsystemer

Rotasjonsbevegelser

18.03.2015

Program videre

Fredag 20.3.: ingen data-verksted

Neste uke: ingen undervisning

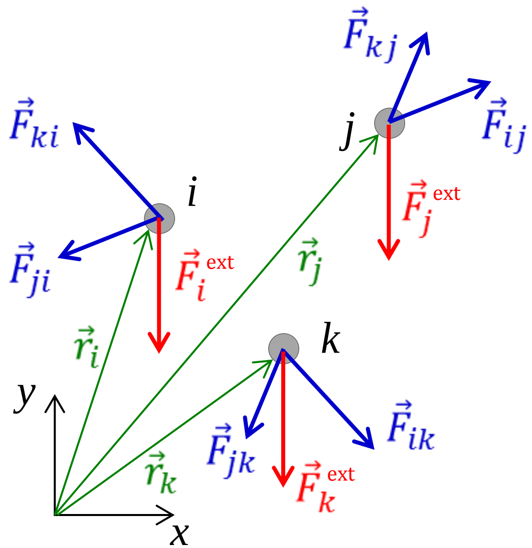
- ingen forelesning
- ingen gruppetime
- ingen data-verksted

Torsdag 26.3: Midtveiseksamen

Neste forelesning: Mandag 13.4.

12	Ons	18	3	Massesenter og rotasjon	gr.2 #8		
12	Tor	19	3		gr.8 #8		
12	Fre	20	3				
13	Man	23	3	ingen forelesning	eksamensuke		
13	Tir	24	3		ingen		
13	Ons	25	3	ingen forelesning	gruppeundervisning		
13	Tor	26	3	Midtveiseksamen			
13	Fre	27	3				
14	Man	30	3	ingen forelesning	ingen		
14	Tir	31	3		gruppeundervisning		
14	Ons	1	4	ingen forelesning			
14	Tor	2	4	Skjærtorsdag			
14	Fre	3	4	Langfredag			
15	Man	6	4	2. Påskedag			
15	Tir	7	4		ingen		
15	Ons	8	4	ingen forelesning	gruppeundervisning		
15	Tor	9	4				
15	Fre	10	4				
16	Man	13	4	Spinn og rotasjon	gr.5,6,7 #9	uke 16	
16	Tir	14	4		gr.1,3,4 #9		
16	Ons	15	4	Spinn og rotasjon	gr.2 #9		
16	Tor	16	4		gr.8 #9		
16	Fre	17	4		DL		
17	Man	20	4	Spinn og rotasjon	gr.5,6,7 #10	uke 17	oblig 7

Flerpartikkelsystemer



nettokraft på partikkel i : $\vec{F}_i^{\text{net}} = \vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji} = \frac{d}{dt}\vec{p}_i$ (N2L)

hele systemet: $\sum_i \vec{F}_i^{\text{net}} = \sum_i \vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji} = \sum_i \vec{F}_i^{\text{ext}}$

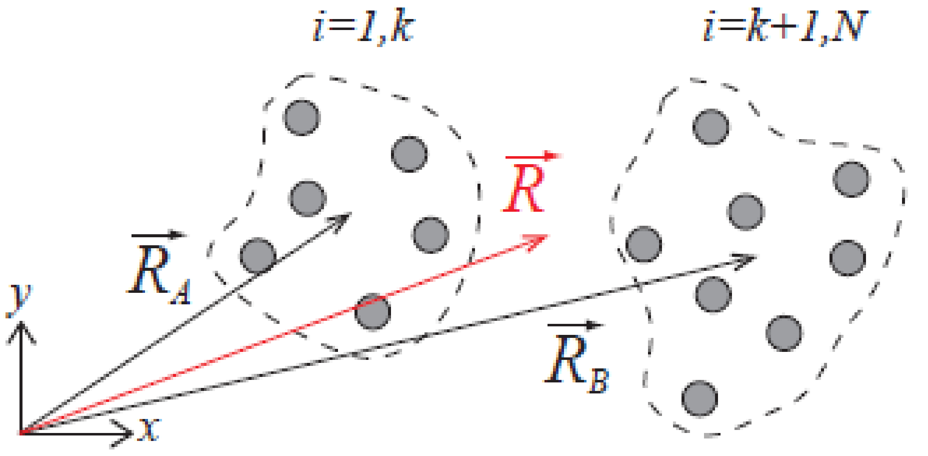
$$\sum_i \vec{F}_i^{\text{ext}} = \sum_i \frac{d}{dt}\vec{p}_i = \frac{d}{dt}\sum_i \vec{p}_i = \frac{d}{dt}\vec{P}$$

(N2L for flerpartikkelsystem)

massesenter: $\vec{R} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{r}_i$

hastighet: $\vec{V} = \frac{d}{dt}\vec{R} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{v}_i = \frac{1}{M}\sum_i \vec{p}_i = \frac{1}{M}\vec{P}$ $\quad \vec{P} = M\vec{V}$

$\sum_i \vec{F}_i^{\text{ext}} = \frac{d}{dt}\vec{P} = \frac{d}{dt}M\vec{V} = M\vec{A}$ $\quad \vec{A}$: akselerasjon til massesenteret



2 systemer: A og B

vi kjenner massesenteret for hver gruppe:

$$\vec{R}_A = \frac{\sum_{i=1}^{k} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{k} m_i} \qquad \vec{R}_B = \frac{\sum_{i=k+1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=k+1}^{N} m_i}$$

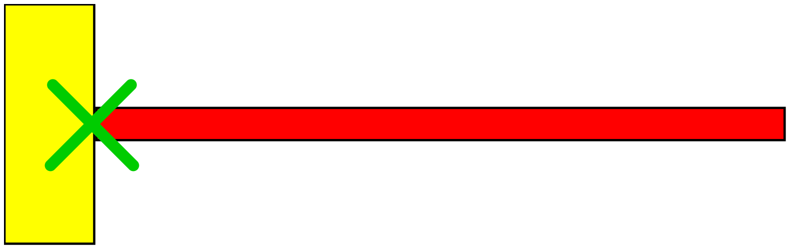
$$\vec{R} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$$

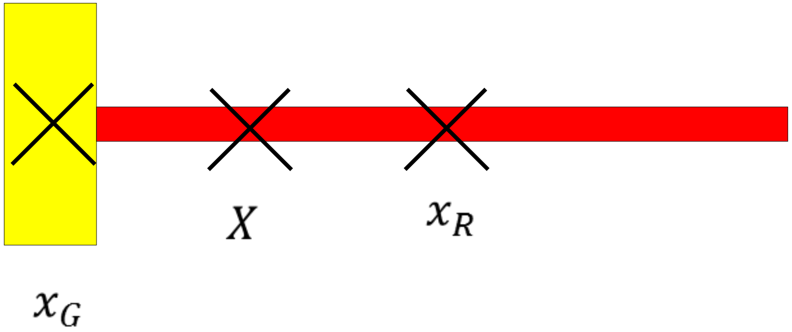
$$M\vec{R} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i = \sum_{i=1}^{k} m_i \vec{r}_i + \sum_{i=k+1}^{N} m_i \vec{r}_i = M_A \vec{R}_A + M_B \vec{R}_B$$

massesenter for hele systemet: $\vec{R} = \dfrac{M_A \vec{R}_A + M_B \vec{R}_B}{M_A + M_B}$

Et gult og et rødt legeme er festet sammen. Hvert legeme har uniform tetthet. Massesenteret til det sammenkoblede legemet er markert med en grønn X. Hvilket legeme har størst masse?

A. Det gule
B. Det røde
C. De har samme masse
D. Ikke nok info til å avgjøre





$$X = \frac{m_G x_G + m_R x_R}{m_G + m_R}$$

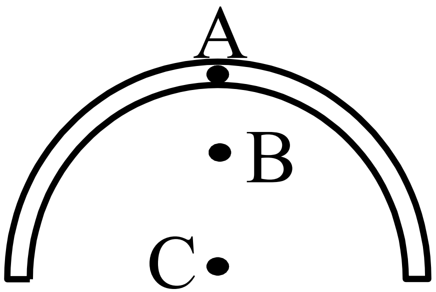
$$m_G = m_R \Longrightarrow X = \frac{1}{2}(x_G + x_R)$$

$$m_G > m_R \Longrightarrow X < \frac{1}{2}(x_G + x_R)$$

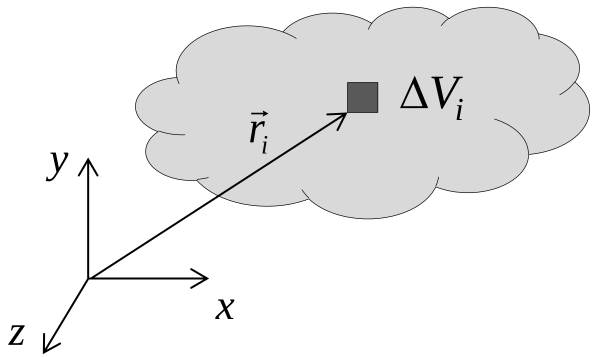
http://pingo.upb.de/ access number: 8178

Hvor ligger massesenteret til en homogen halv-ring?

1. punkt A
2. punkt B
3. punkt C
4. ingen av disse



Massesenter til et utstrakt legeme



vi deler legemet i små volumelementer ΔV_i

med masse $\Delta m_i = \rho(\vec{r}_i)\Delta V_i$

$$\vec{R} = \frac{1}{M}\sum_i \vec{r}_i \Delta m_i$$

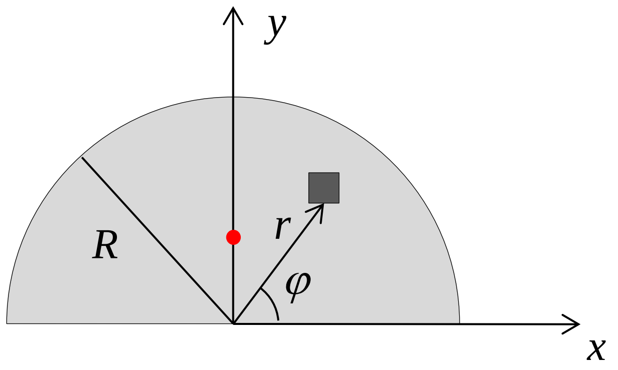
for infinitesimale volumelementer: $\vec{R} = \frac{1}{M}\int_M \vec{r}\,dm = \frac{1}{M}\int_V \vec{r}\rho(\vec{r})dV$

for hver komponent: $MX = \iiint_V x\rho(x,y,z)dxdydz$

$$MY = \iiint_V y\rho(x,y,z)dxdydz$$

$$MZ = \iiint_V z\rho(x,y,z)dxdydz$$

Eksempel: homogen halvsylinder med radius *R* og tykkelse *d*



sylinderkoordinater: $x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

z

volumelement: $dV = r\,dr\,d\varphi\,dz$

$$M = \int_V \rho\, dV = \int_0^R\int_0^\pi\int_0^d \rho\, r\,dr\,d\varphi\,dz = \rho\int_0^R r\,dr\int_0^\pi d\varphi\int_0^d dz = \rho\frac{1}{2}R^2\pi d$$

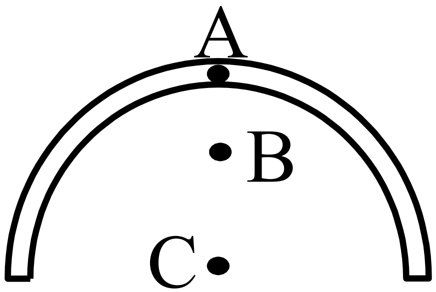
$X = 0$ på grunn av symmetri

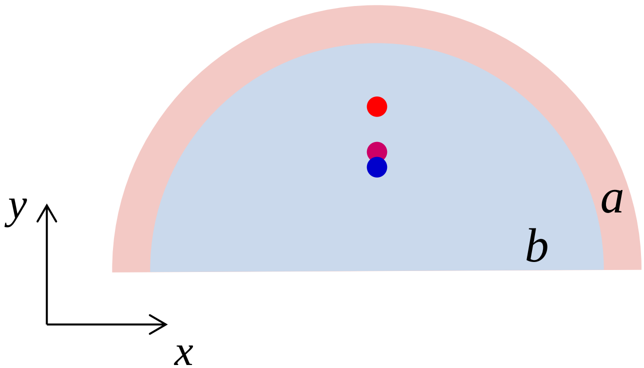
$$MY = \iiint_V y\rho\, dV = \int_0^R\int_0^\pi\int_0^d r\sin\varphi\,\rho\, r\,dr\,d\varphi\,dz = \rho\int_0^R r^2 dr\int_0^\pi \sin\varphi\, d\varphi\int_0^d dz = \rho\frac{1}{3}R^3 2d$$

$$Y = \frac{MY}{M} = \frac{\frac{2}{3}\rho R^3 d}{\frac{1}{2}\rho\pi R^2 d} = \frac{4R}{3\pi} \approx 0.42R$$

$Z = \frac{1}{2}d$ på grunn av symmetri

Hvor ligger massesenteret til en homogen halv-ring?





ring: a
liten halv-sylinder: b
stor halv-sylinder: ab

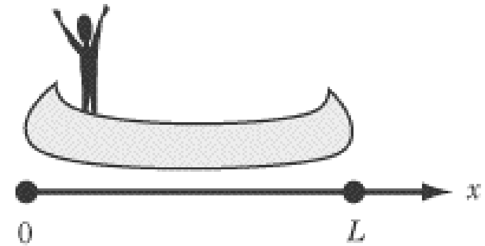
$$Y_{ab} = \frac{M_a Y_a + M_b Y_b}{M_{ab}}$$

$$Y_a = \frac{M_{ab} Y_{ab} - M_b Y_b}{M_a} = \frac{M_{ab} Y_{ab} - M_b Y_b}{M_{ab} - M_b}$$

http://pingo.upb.de/ access number: 8178

Du sitter på stranden og ser på en person i en båt. Personen beveger seg fra den venstre enden av båten til den høyre. Du analyserer bevegelsen fra stranden og du finner at massesenteret til systemet som består av båt og person

A. beveger seg til høyre
B. forblir på samme sted
C. beveger seg til venstre



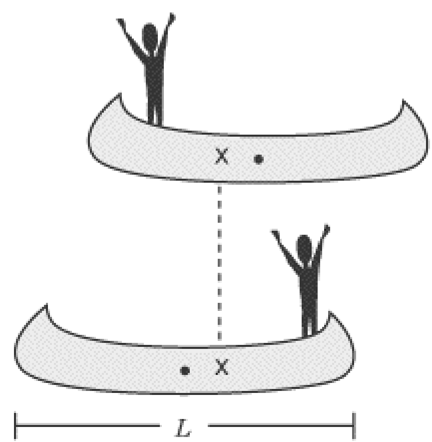
(Vi antar at det er ingen friksjon mellom båt og vann.)

ingen ytre nettokraft påvirker systemet

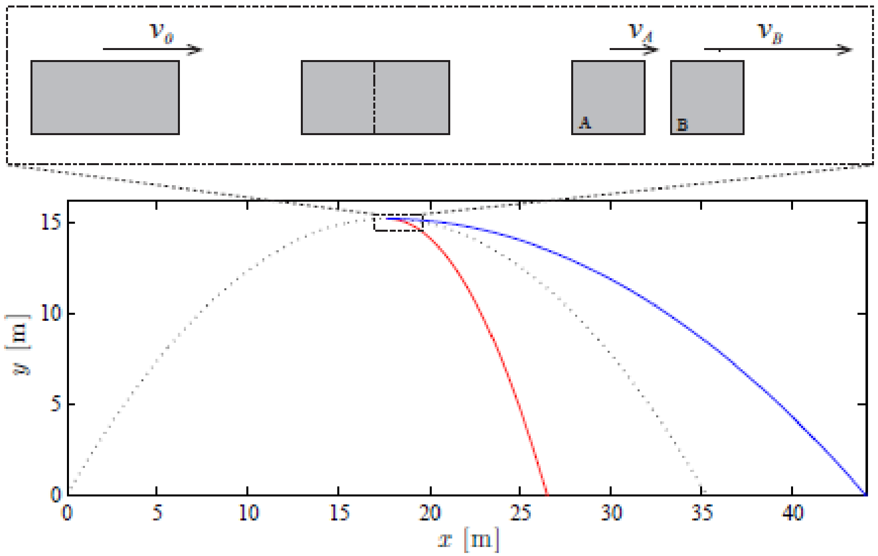
$$\sum_i \vec{F}_i^{\text{ext}} = \frac{d}{dt}\vec{P} = \frac{d}{dt}M\vec{V} = M\vec{A} = \vec{0}$$

massesenteret forblir på samme sted

båten beveger seg til venstre
mens personen går til høyre



Eksempel: Et legeme skytes i en parabelbane med utgangshastighet v_0 i x-retningen. I den maksimale høyden h utløses en ladning, som deler legemet i to deler.



bevegelsesmengde **i x-retning**
før eksplosjonen: $p_0 = mv_0$

etter eksplosjonen: $p_1 = m_A v_A + m_B v_B$

ingen ytre krefter i horisontal retning
$\Rightarrow$ horisontal bevegelsesmengde er bevart

$$mv_0 = m_A v_A + m_B v_B$$

Massesenter: $\vec{R} = \dfrac{m_A \vec{r}_A + m_B \vec{r}_B}{m_A + m_B}$

x komponent: $X = \dfrac{m_A x_A + m_B x_B}{m_A + m_B}$

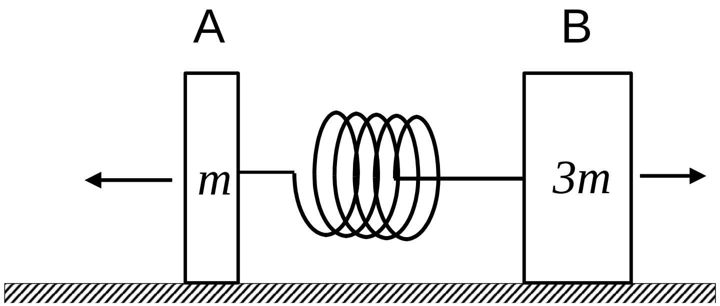
$$V_x = \frac{m_A v_A + m_B v_B}{m_A + m_B}$$

Massesenteret: samme parabelbane som legemet vil ta uten eksplosjon

http://pingo.upb.de/ access number: 8178

Legeme A med masse m og legeme B med masse $3m$ står på en horisontal friksjonsfritt overflate. En masseløs fjær dytter legemene fra hverandre. Forholdet mellom energiene er:

1. $K_A = \frac{1}{3} K_B$
2. $K_A = K_B$
3. $K_A = 3K_B$
4. $K_A = 9K_B$



ingen ytre krefter påvirker systemet
$\Rightarrow$ bevegelsesmengde er bevart:

$$mv_A + 3mv_B = 0$$

$$v_A = -3v_B$$

$$K_A = \frac{1}{2} m v_A^2 = \frac{1}{2} m 9 v_B^2 = 3 \frac{1}{2} 3m v_B^2 = 3K_B$$

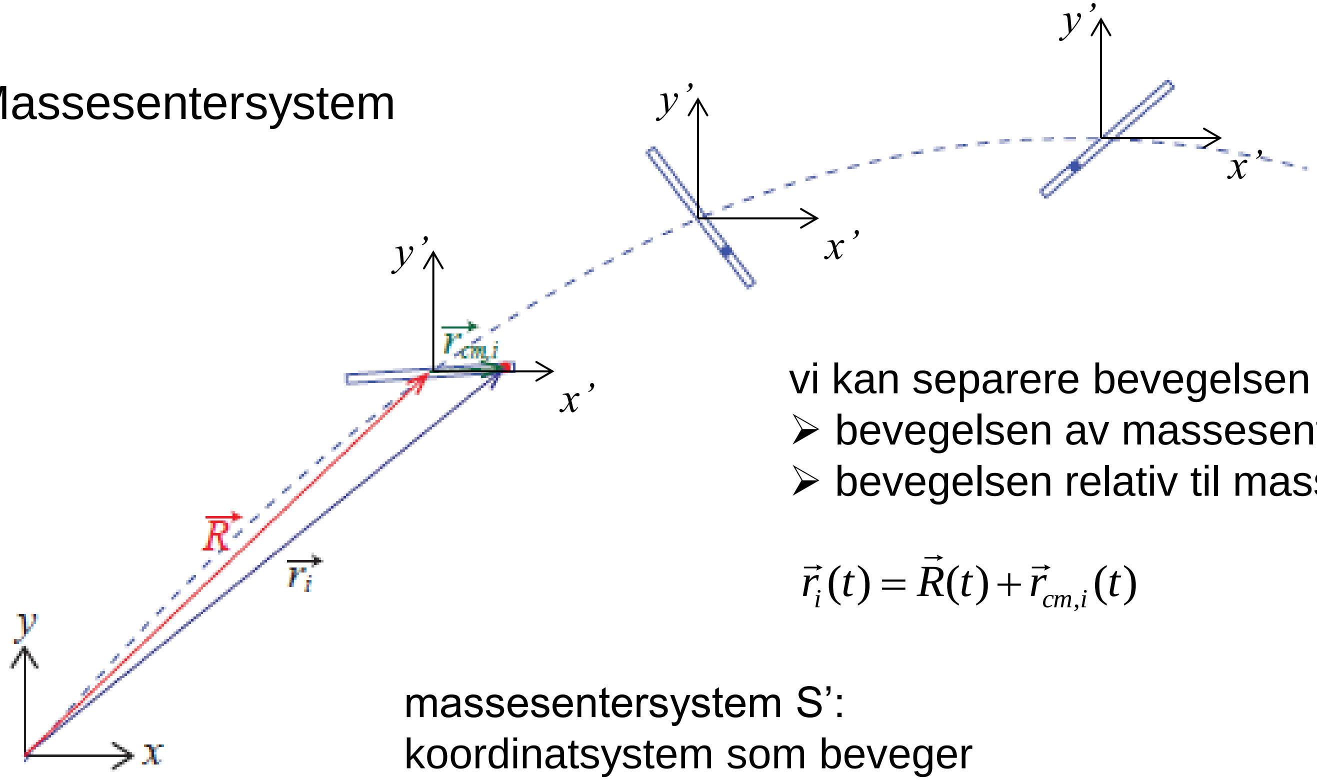
indre krefter: $\vec{F}_{A\to B} = -\vec{F}_{B\to A}$ (N3L)

$$\vec{a}_B = \frac{\vec{F}_{A\to B}}{3m} \qquad \vec{a}_A = \frac{\vec{F}_{B\to A}}{m} = -3\vec{a}_B$$

ingen ytre krefter: $\sum_i \vec{F}_i^{\text{ext}} = M\vec{A} = \vec{0}$

$\Rightarrow$ massesenteret forblir på samme sted

Massesentersystem



vi kan separere bevegelsen i

- bevegelsen av massesenteret
- bevegelsen relativ til massesenteret

$$\vec{r}_i(t) = \vec{R}(t) + \vec{r}_{cm,i}(t)$$

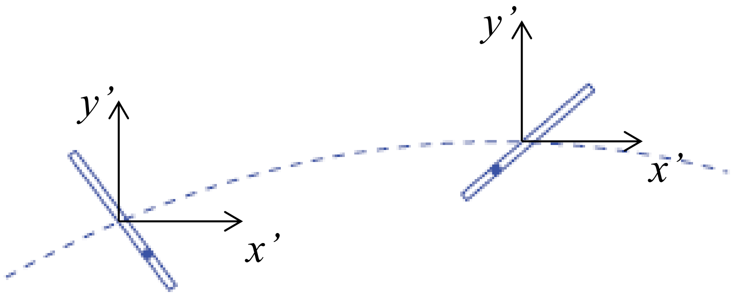
massesentersystem S':
koordinatsystem som beveger
seg med massesenteret

$$\vec{P}_{cm} = \sum_i m_i \vec{v}_{cm,i} = \sum_i m_i \frac{d}{dt}\vec{r}_{cm,i} = \frac{d}{dt}\sum_i m_i \vec{r}_{cm,i} = \frac{d}{dt} M\vec{R}_{cm}$$

$$\vec{R}_{cm} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{P}_{cm} = 0$$

den totale bevegelsesmengden i massesentersystemet
er null uavhengig av ytre krefter

Kinetisk energi i flerpartikkelsystem



$$\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{r}_{cm,i}$$

$$\vec{v}_i = \frac{d}{dt}\left(\vec{R} + \vec{r}_{cm,i}\right) = \frac{d\vec{R}}{dt} + \frac{d\vec{r}_{cm,i}}{dt} = \vec{V} + \vec{v}_{cm,i}$$

- hastighet til massesenteret: $\vec{V}$
- hastighet til massepunkt i relativ til massesenteret: $\vec{v}_{cm,i}$

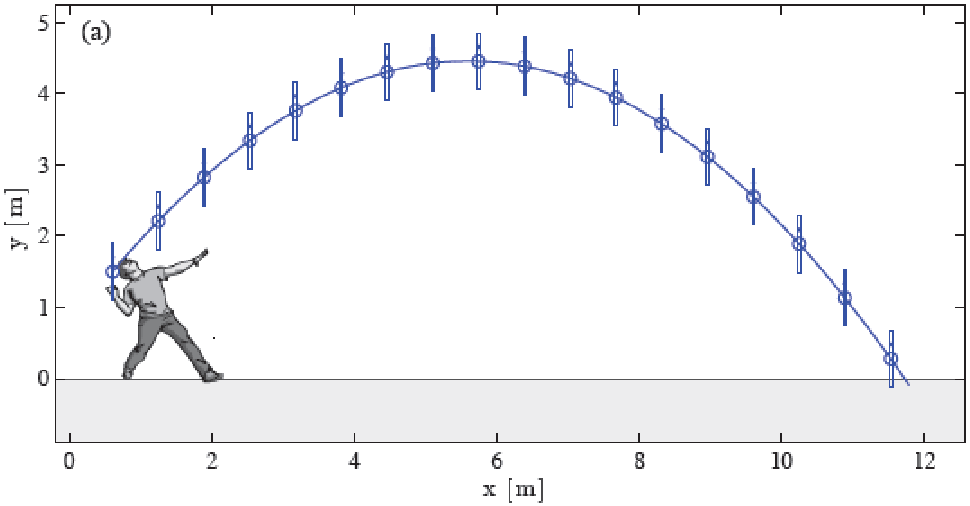
$$K = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^{\,2} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i (\vec{V} + \vec{v}_{cm,i})^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i (\vec{V}^2 + 2\vec{V}\cdot\vec{v}_{cm,i} + \vec{v}_{cm,i}^{\,2})$$

$$= \frac{1}{2} V^2 \sum_{i=1}^{N} m_i + \vec{V}\cdot\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_{cm,i} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i v_{cm,i}^2 = \frac{1}{2} M V^2 + \vec{V}\cdot\vec{P}_{cm} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i v_{cm,i}^2$$

$$= \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i v_{cm,i}^2 = K_{cm} + K_{\Delta cm}$$

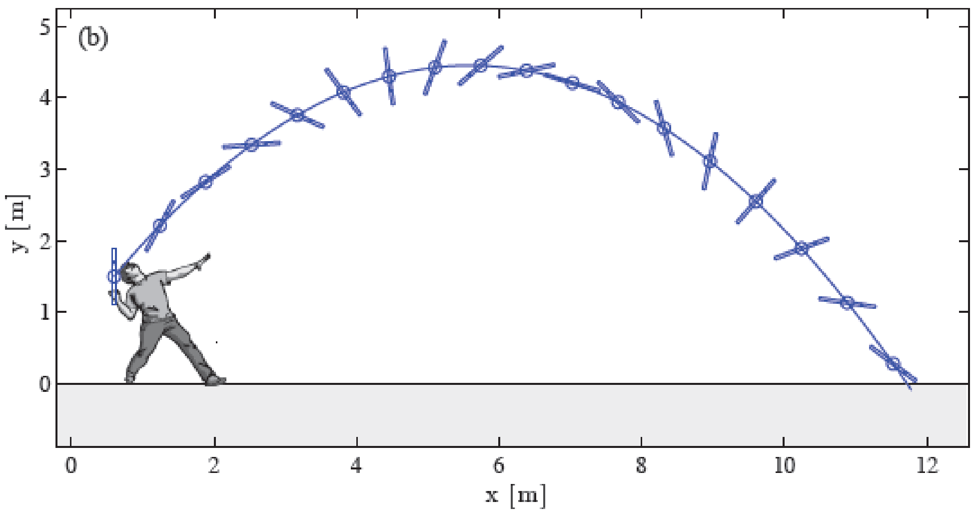
bevegelse relativ til massesenteret

bevegelse til massesenteret



ingen bevegelse relativ
til massesenteret: $v_{cm,i} = 0$

$$K = \frac{1}{2} M V^2$$



$v_{cm,i} \neq 0$

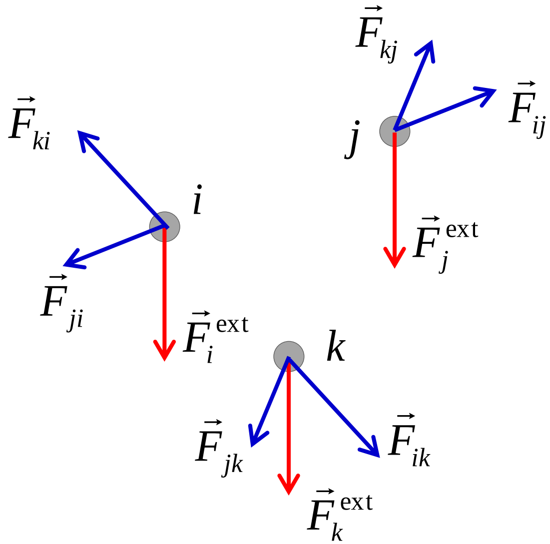
$$K = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i v_{cm,i}^2$$

kinetisk energi

- i bevegelsen til massesenteret (parabelbane)
- i bevegelsen relativ til massesenteret (rotasjon)

hvis legemet er ikke stivt:
andre frihetsgrader for relativbevegelse
f.eks. vibrasjoner

Potensiell energi i flerpartikkelsystem



hver konservativ kraft har et tilhørende potensial

konservativ ytre kraft: $\vec{F}_i^{\,\text{ext}} = -\vec{\nabla} U_i(\vec{r}_i)$

$$U_{tot} = \sum_i U_i(\vec{r}_i)$$

eksempel: gravitasjon på jorden $U_i(\vec{r}_i) = m_i g y_i$

$$U_{tot} = \sum_i m_i g y_i = MgY$$

hvis det er også indre krefter: $\vec{F}_i^{\,\text{net}} = \vec{F}_i^{\,\text{ext}} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}$

hvis krefter er konservative: $\vec{F}_i^{\,\text{ext}} = -\vec{\nabla} U_i(\vec{r}_i)$ $\quad \vec{F}_{ji} = -\vec{\nabla} U_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j)$

$$U_{tot} = \sum_i U_i(\vec{r}_i) + \sum_{i<j} U_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = U_{ext} + U_{\text{int}}$$

$$E_{tot} = K_{cm} + K_{\Delta cm} + U_{ext} + U_{\text{int}}$$

Energibevaring i flerpartikkelsystemer

konservative krefter $\Rightarrow E_{\text{tot}}$ er bevart

$$E_{tot} = K_{cm} + K_{\Delta cm} + U_{ext} + U_{\text{int}}$$

K_{cm} og U_{ext} er ofte relativt lett tilgjenglig,
men det kan være vanskelig å finne $K_{\Delta\text{cm}}$ og U_{int}

energibevaring kan gi informasjon om
indre kinetisk og potensiell energi:
hvor høyt spretter ballongen opp igjen?

spesialfall: stivt legeme

- partikler beveger seg ikke relativ til hverandre
- partikler kan bevege seg relativ til massesenteret
- bevegelsen beskrives ved translasjoner og rotasjoner
- ingen vibrasjoner eller deformasjoner