Rotasjonsbevegelser

13.04.2015

Midtveiseksamen:

- resultater leges ut neste uke
- løsningsforslag på semestersiden
- konteeksamen bare for studenter med begrunnet fravær
- ikke nødvendig å stå på midtveiseksamen for å gå opp til slutteksamen
- midtveiseksamen teller 30% til sluttkarakter

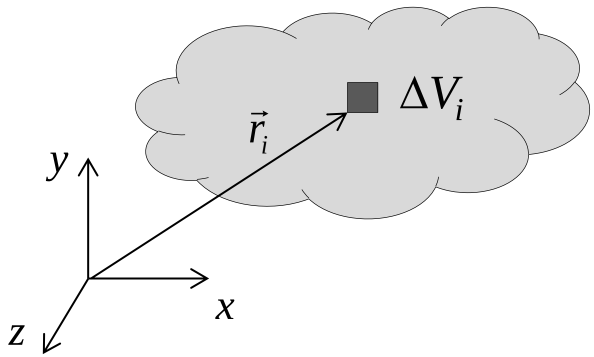
Gruppetimer:

- gruppe 5, 6 og 7 (Man. 14 – 16) slås sammen i dag på Ø443
- gruppe 3 og 4 (Tir. 14 – 16) slås sammen i morgen på Ø443

Massesenter

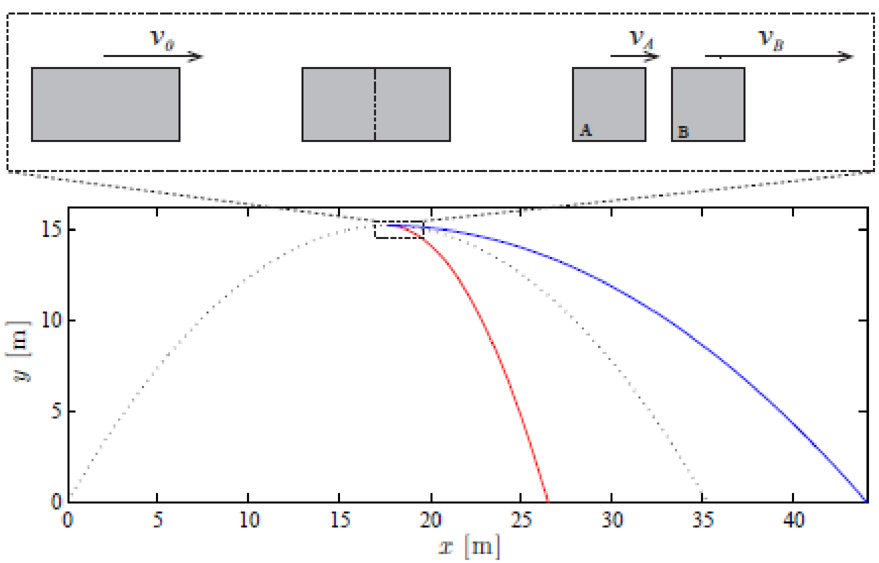
$$\vec{R} = \frac{\sum_i \vec{r}_i \Delta m_i}{\sum_i \Delta m_i} = \frac{1}{M}\int_M \vec{r}\, dm = \int_V \vec{r}\rho(\vec{r})dV$$

$\rho(\vec{r})$: tetthet



$$\vec{V} = \frac{d}{dt}\vec{R} \qquad \vec{A} = \frac{d}{dt}\vec{V} = \frac{d^2}{dt^2}\vec{R}$$

Newtons 2. lov: $$\sum_i \vec{F}_i^{\text{ext}} = \frac{d}{dt}\vec{P} = \frac{d}{dt}M\vec{V} = M\vec{A}$$



ytre kraft:

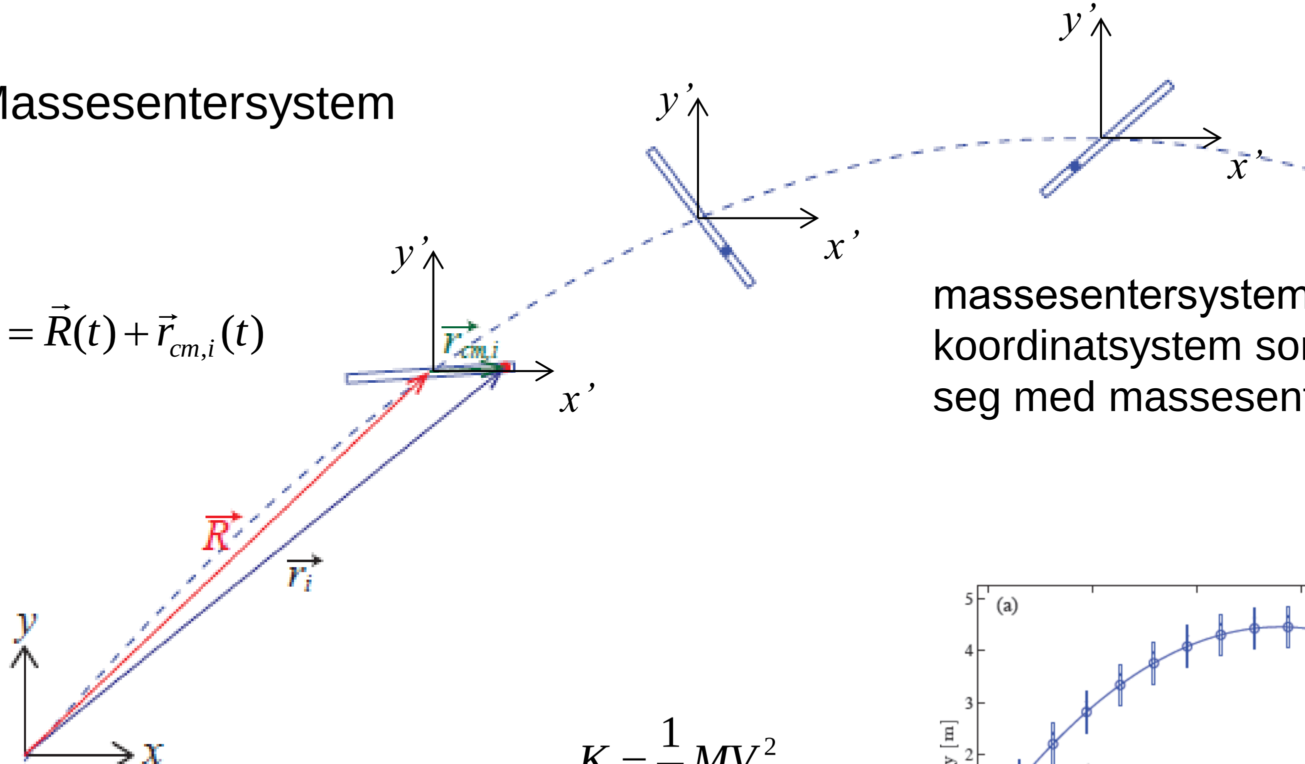
- ➢ akselerasjon til massesenteret

indre krefter:

- ➢ ingen påvirkning på massesenteret

Massesentersystem

$$\vec{r}_i(t) = \vec{R}(t) + \vec{r}_{cm,i}(t)$$

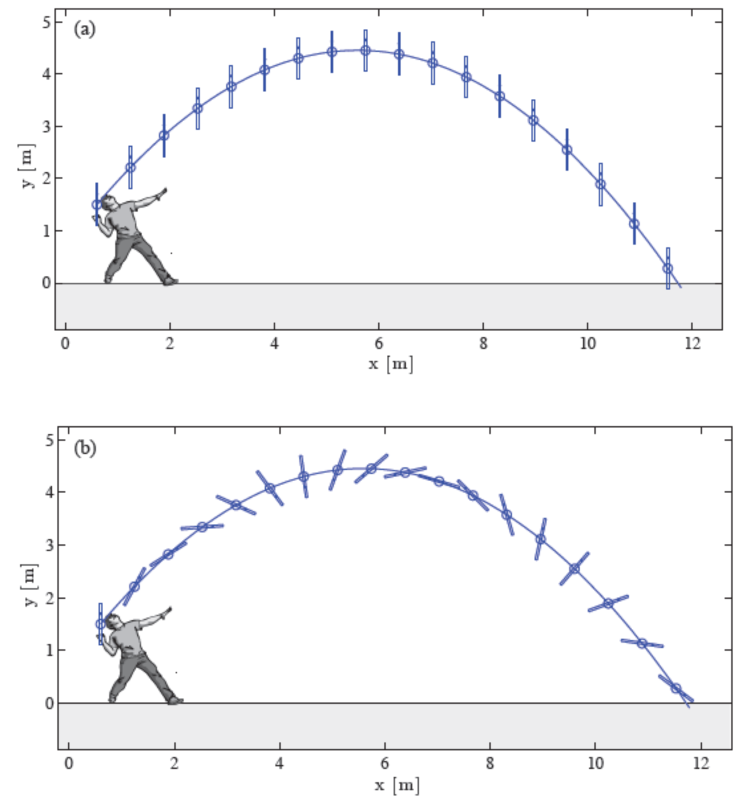


massesentersystem S':
koordinatsystem som beveger seg med massesenteret

$$\vec{R}' = 0$$

$$\vec{P}' = 0$$

$$K = \frac{1}{2}MV^2$$

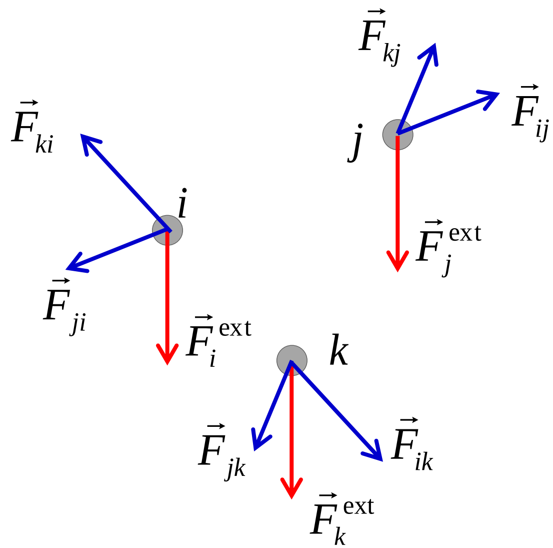


$$K = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i v_{cm,i}^2$$

kinetisk energi

- bevegelsen til massesenteret (parabelbane)
- i bevegelsen relativ til massesenteret (rotasjon)

Potensiell energi i flerpartikkelsystem



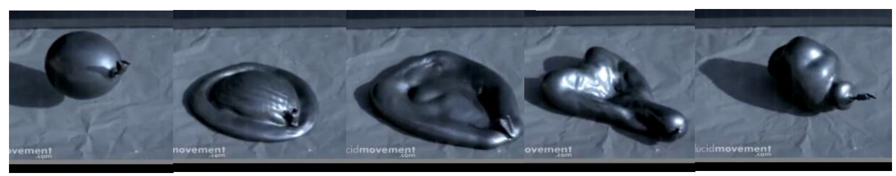
$$\vec{F}_i^{\,\text{net}} = \vec{F}_i^{\,\text{ext}} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}$$

konservativ ytre kraft: $\vec{F}_i^{\,\text{ext}} = -\vec{\nabla} U_i(\vec{r}_i)$

konservativ indre kraft: $\vec{F}_{ji} = -\vec{\nabla} U_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j)$

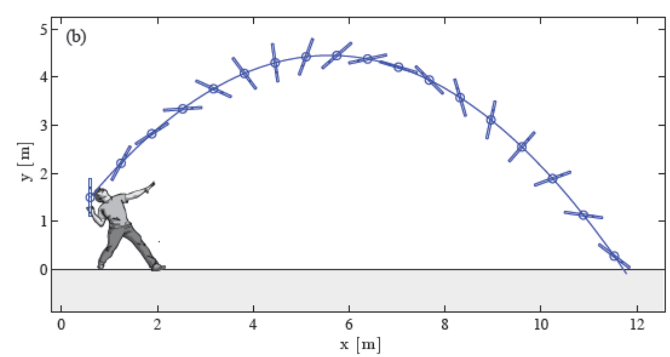
$$U_{tot} = \sum_i U_i(\vec{r}_i) + \sum_{i<j} U_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = U_{\text{ext}} + U_{\text{int}}$$

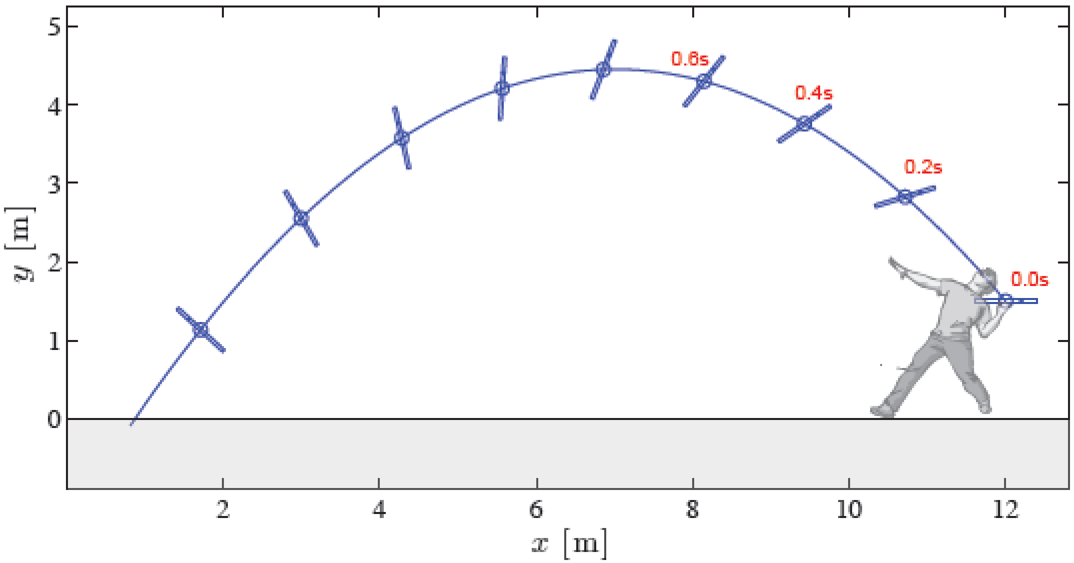
$$E_{\text{tot}} = K_{\text{cm}} + K_{\Delta\text{cm}} + U_{\text{ext}} + U_{\text{int}}$$



spesialfall: stivt legeme

- partikler beveger seg ikke relativ til hverandre
- partikler kan bevege seg relativ til massesenteret
- bevegelsen beskrives ved translasjoner og rotasjoner
- ingen vibrasjoner eller deformasjoner



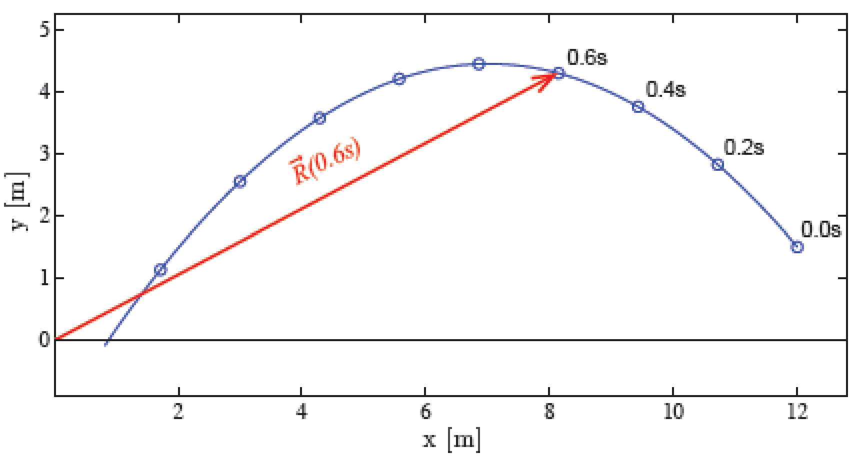


vi separere bevegelsen:

- bevegelsen til massesenteret
- bevegelsen relativ til massesenteret

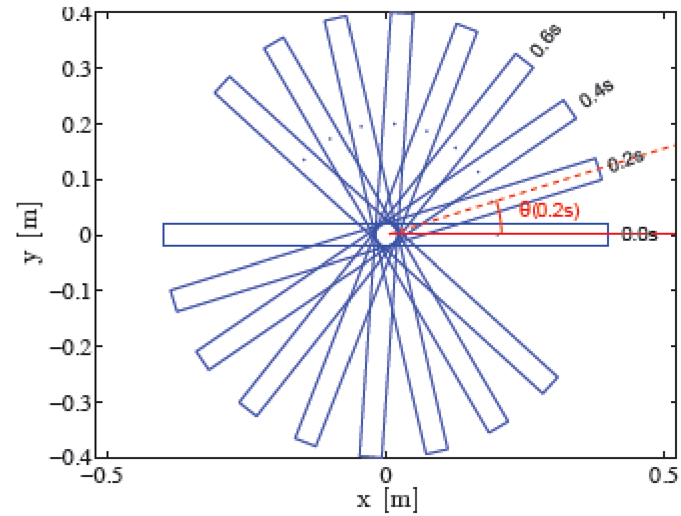
$$\vec{r}_i(t) = \vec{R}(t) + \vec{r}_{cm,i}(t)$$

bevegelsen til massesenteret



bevegelsen bestemmes av ytre krefter som virker på staven

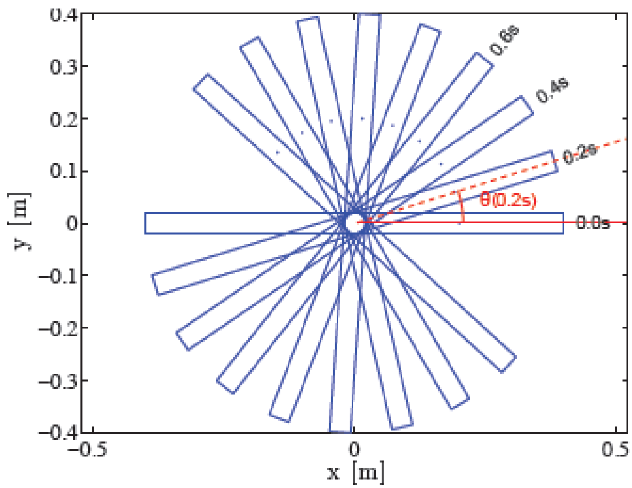
bevegelsen relativ til massesenteret



jevn rotasjon om massesenteret til staven

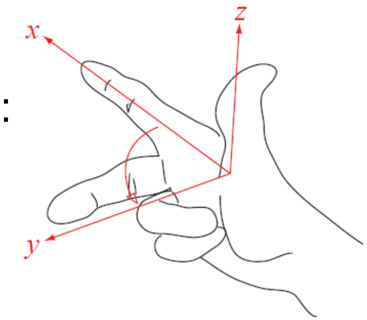
Rotasjonsbevegelse

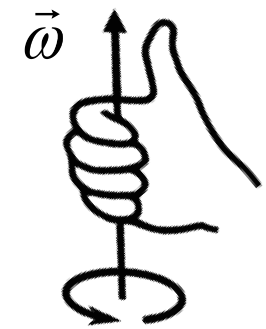
bevegelsesdiagram



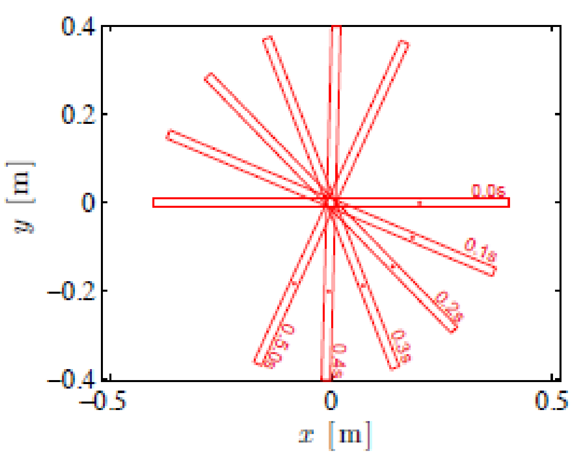
vi karakteriserer rotasjonsbevegelser:

- rotasjonsakse
- rotasjonsvinkel





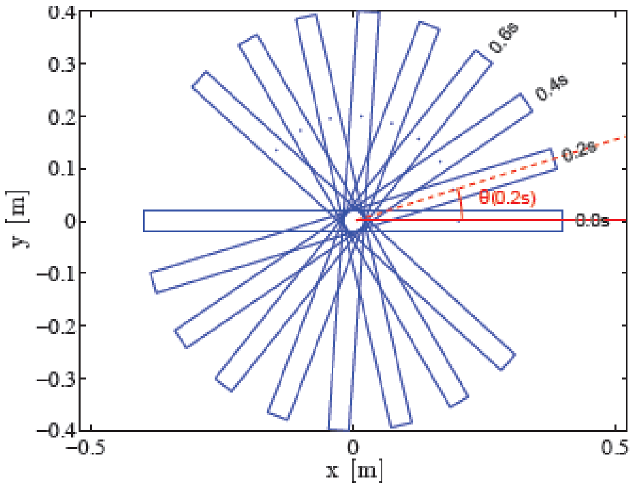
z akse som rotasjonsakse (ut av tavlen)
$\Rightarrow$ rotasjon i positiv retning



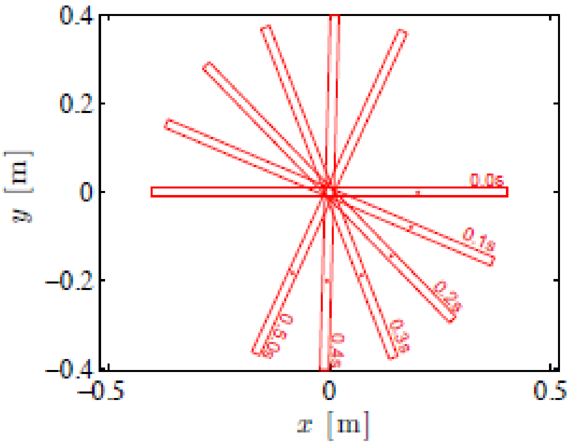
negativ z akse som rotasjonsakse (inn i tavlen)
$\Rightarrow$ rotasjon i negativ retning

vi ser også: rotasjon går raskere:
vinkelen forandrer seg mer i samme tid

Vinkelhastighet



konstant vinkelhastighet: $\omega = 1.5 \text{ rad/s}$



konstant vinkelhastighet: $\omega = -4 \text{ rad/s}$

gjennomsnittlig vinkelhastighet:

$$\overline{\omega} = \frac{\theta(t+\Delta t) - \theta(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

momentan vinkelhastighet:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$$

ω trenger ikke være konstant:

(momentan) vinkelakselerasjon:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta}$$

http://pingo.upb.de/ access number: 8178

Hvor mange grader tilsvarer 1 radian?

A. 1 rad = 2π grader
B. 1 rad = 180°
C. 1 rad = 10°
D. 1 rad = 57.3°
E. Radian er ikke et vinkelmål

grad	0°	30°	45°	57,2958...°	60°	90°	180°	360°
radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	1	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

	translasjon	rotasjon
posisjon	$x(t)$	$\theta(t)$
hastighet	$v(t)=\frac{dx}{dt}$	$\omega(t)=\frac{d\theta}{dt}$
akselerasjon	$a(t)=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}$	$\alpha(t)=\frac{d\omega}{dt}=\frac{d^2\theta}{dt^2}$

vi kan integrere bevegningsligninger på samme mote:

$$\frac{d\theta}{dt}=\omega(t)$$

$$\int_0^t \frac{d\theta}{dt}dt=\int_0^t \omega(t)dt$$

$$\theta(t)-\theta_0=\int_0^t \omega(t)dt$$

for konstant vinkelhastighet: $\theta(t)=\theta_0+\omega t$

$$\frac{d\omega}{dt} = \alpha(t)$$

$$\int_0^t \frac{d\omega}{dt}\,dt = \int_0^t \alpha(t)dt$$

$$\omega(t) - \omega_0 = \int_0^t \alpha(t)dt$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_0^t \omega(t)dt \; = \theta_0 + \int_0^t \left(\omega_0 + \int_0^t \alpha\, dt \right) dt = \theta_0 + \omega_0 t + \int_0^t \left(\int_0^t \alpha\, dt \right) dt$$

for konstant vinkelakselerasjon: $\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha\, t^2$

for en gitt vinkelakselerasjon $\alpha(t)$
og initialbetingelser θ_0 og ω_0
kan vi beregner vinkel og vinkelhastighet.

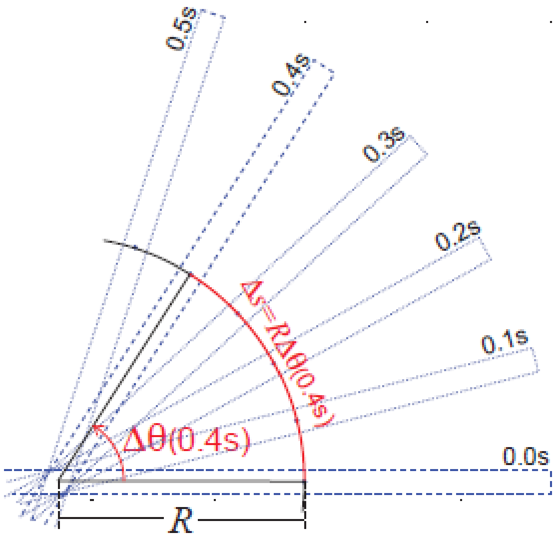
analytisk ved integrasjon eller numerisk:

$$\omega(t_{i+1}) \approx \omega(t_i) + \alpha(t_i)\left(t_{i+1} - t_i\right)$$

$$\theta(t_{i+1}) \approx \theta(t_i) + \omega(t_{i+1})\left(t_{i+1} - t_i\right)$$

(Euler-Cromer)

Vinkelhastighet – lineær hastighet



es stav roterer med vinkelhastighet ω:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \approx \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

en punkt i avstand R fra rotasjonsakse beveger seg en buelengde Δs i tidsintervall Δt

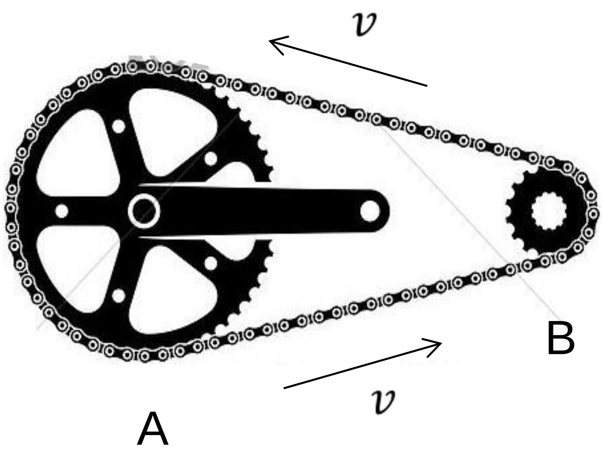
$$\Delta s = R\Delta\theta$$

$$v \approx \frac{\Delta s}{\Delta t} = R\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$v = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} = R\omega$$

http://pingo.upb.de/ access number: 8178

Du sykler slik at tannhjulet som er festet til pedalen får en vinkelakselerasjon α_A. Vinkelakselerasjon til bakhjulet α_B er:



1. $\alpha_B < \alpha_A$
2. $\alpha_B = \alpha_A$
3. $\alpha_B > \alpha_A$

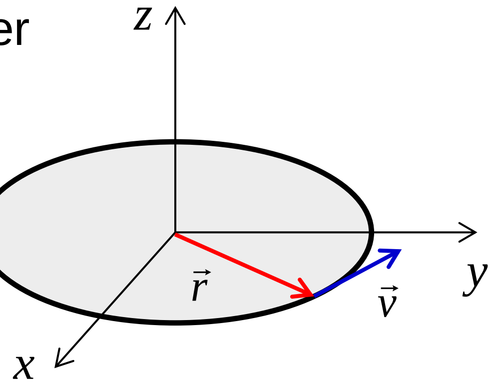
hastighet til kjeden: $v = r_A \omega_A = r_B \omega_B$

$$\omega_B = \frac{r_A}{r_B} \omega_A$$

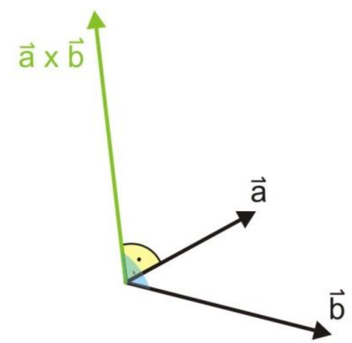
$$\alpha_B = \frac{d\omega_B}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{r_A}{r_B}\omega_A\right) = \frac{r_A}{r_B}\frac{d\omega_A}{dt} = \frac{r_A}{r_B}\alpha_A$$

$$r_A > r_B \quad \Rightarrow \quad \alpha_B > \alpha_A$$

Rotasjoner i tre dimensjoner



vi velger et koordinatsystem:
- z akse er rotasjonsakse
- rotasjon i x-y planet



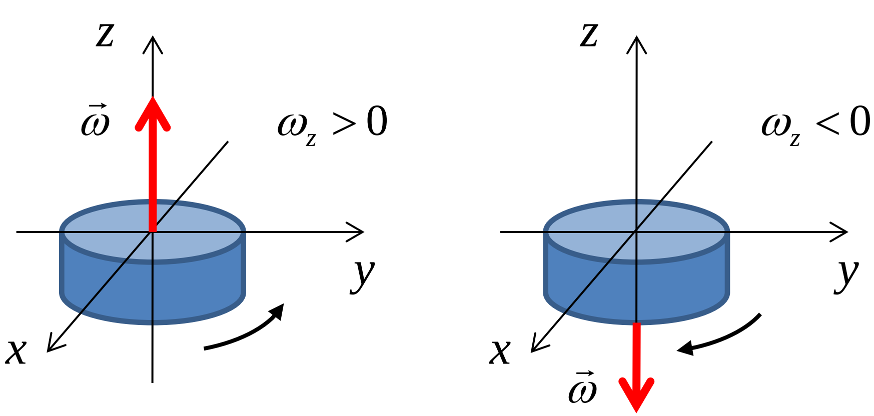
en punkt i avstand r fra rotasjonsaksen
beveger seg på en sirkelbane med fart $v = \omega r$

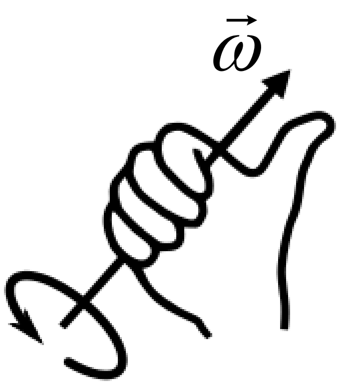
hastighet har tangensial retning: $\vec{v} \perp \vec{r}, \quad = \vec{v} \perp \hat{k}$

$$\vec{v} = \omega \hat{k} \times \vec{r}$$

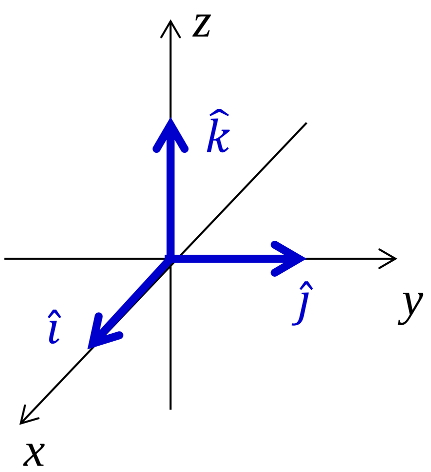
vi kan definere vinkelhastighet som en vektor: $\vec{\omega} = \omega \hat{k}$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$



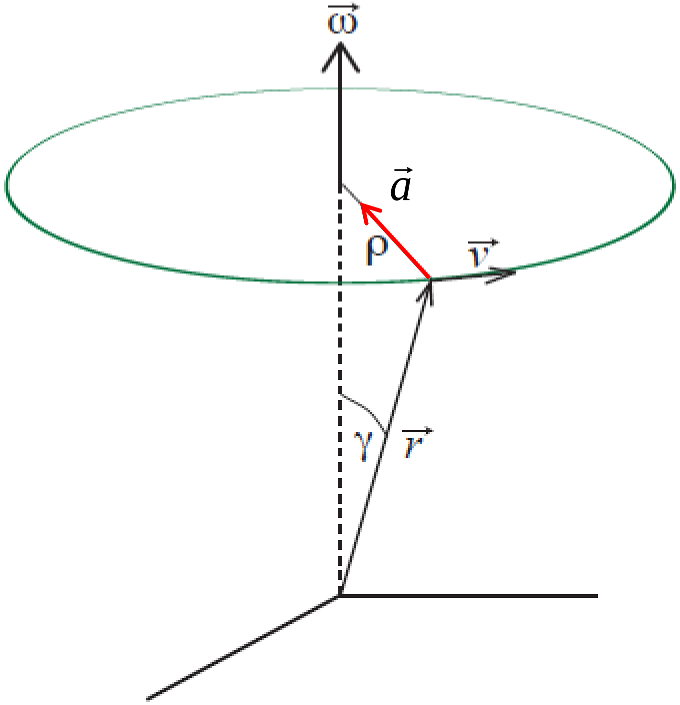


Vi har et høyrehendt koordinatsystem
med enhetsvektorer $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, og $\hat{k}$.
Vektor (kryss) produktet $\hat{k} \times \hat{\jmath}$ er lik:



1. $\hat{\imath}$
2. $-\hat{\imath}$
3. $\hat{\jmath}$
4. $-\hat{\jmath}$
5. $\hat{k}$
6. $-\hat{k}$
7. $\vec{0}$
8. $\vec{1}$

$$\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = \hat{k} \qquad \hat{\jmath} \times \hat{\imath} = -\hat{k}$$
$$\hat{\jmath} \times \hat{k} = \hat{\imath} \qquad \hat{k} \times \hat{\jmath} = -\hat{\imath}$$
$$\hat{k} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath} \qquad \hat{\imath} \times \hat{k} = -\hat{\jmath}$$



punkt $\vec{r}(t)$ beveger seg på en sirkelbane med radius ρ
rotasjonsaksen $\vec{\omega}$ peker i z-retning

$$\vec{v} \perp \vec{\omega}, \quad \vec{v} \perp \vec{r}$$

$$v = \omega\rho = \omega r \sin\gamma$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

akselerasjon:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}$$

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

for sirkelbevegelse med
konstant vinkelhastighet: $\vec{\alpha} = 0$

$$\vec{a} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

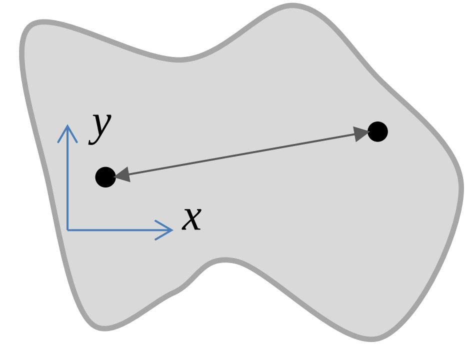
$$|\vec{a}| = |\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})| = \omega^2 r \sin\gamma = \omega^2 \rho = \frac{v^2}{\rho}$$

sentripetalakselerasjon

Stivt legeme

relative posisjonen til to punkter endrer seg ikke

kan ikke deformeres.



Rotasjon av et stivt legeme:

beskrevet av aksen $\vec{\omega}$ og punkt O.

aller punkter i legemet roterer med samme $\vec{\omega}$

Hastigheten til et punkt $\vec{r}$ er: $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

$\vec{r} = \rho \hat{u}_\rho + z\hat{k}$ hvor $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$

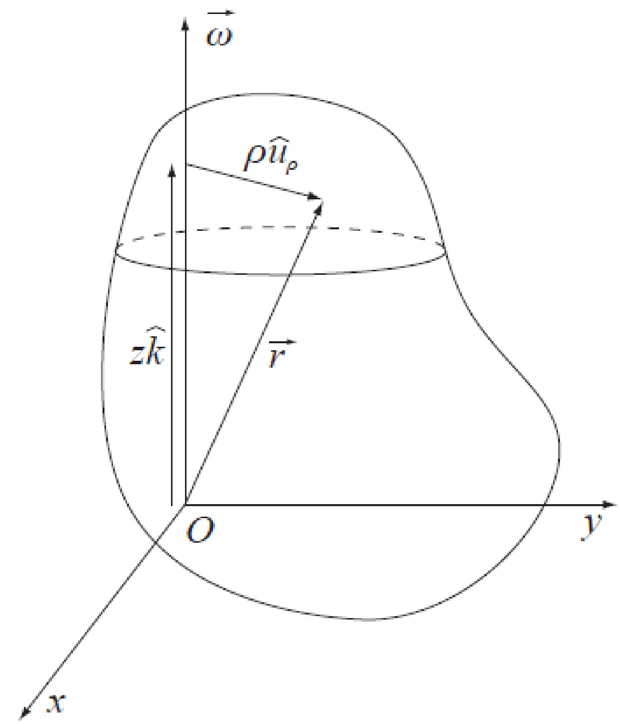
$\hat{u}_\rho$ radial enhetsvektor

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \omega \hat{k} \times (\rho \hat{u}_\rho + z\hat{k})$$

$$= \omega \rho \hat{k} \times \hat{u}_\rho + \omega z \hat{k} \times \hat{k}$$

$$= \vec{\omega} \times \vec{\rho} = \omega \rho \hat{u}_\varphi$$

$\hat{u}_\varphi$ tangensial enhetsvektor



$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}$$

$$= \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

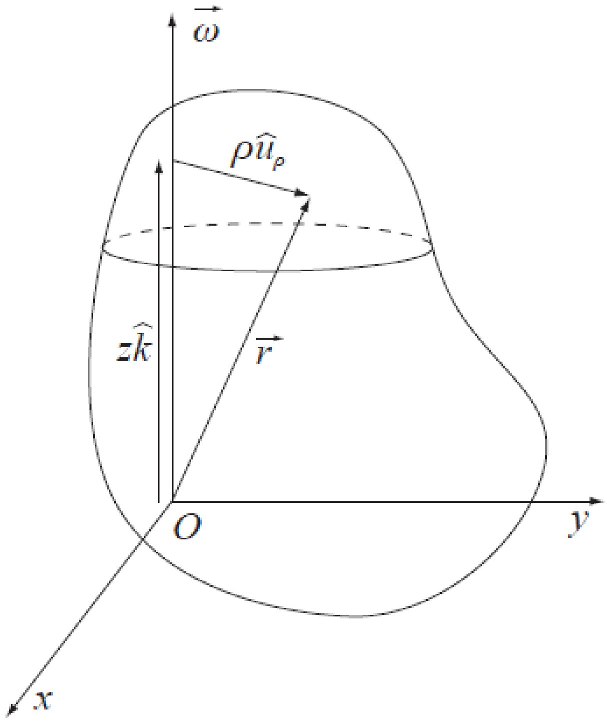
tangensial + sentripetalakselerasjon

Rotasjon av et stivt legeme:

hastighet til et punkt : $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i = \vec{\omega} \times \vec{\rho}_i$

$$v_i^2 = |\vec{v}_i|^2 = |\vec{\omega} \times \vec{r}_i|^2 = \omega^2 r_i^2 (\sin\theta)^2 = \omega^2 \rho_i^2 = |\vec{\omega} \times \vec{\rho}_i|^2$$

kinetisk energi til et punkt: $K_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_i \omega^2 \rho_i^2$



kinetisk energi til hele legemet:

$$K = \sum_i K_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i \omega^2 \rho_i^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_i m_i \rho_i^2$$

definisjon: $$I_z = \sum_i m_i \rho_i^2$$ **treghetsmoment** for legemet om aksen z

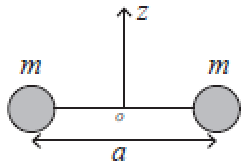
$$K = \frac{1}{2} I_z \omega^2$$

jo større treghetsmomentet,
jo mer energi behøves
for å få legemet å rotere

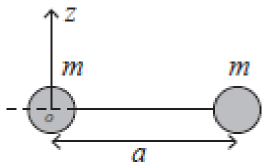
lineærbevegelse: $K = \frac{1}{2} m v^2$

Eksempel

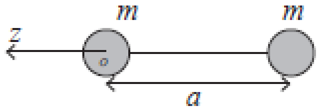
vi antar at massene er punktformig
og forbindelsen masseløs



$$I_z = \sum_{i=1}^{N} m_i \rho_i^2 = m(\frac{1}{2}a)^2 + m(\frac{1}{2}a)^2 = \frac{1}{2}ma^2$$

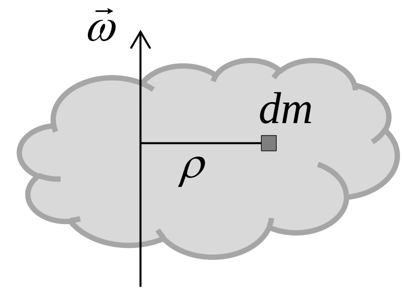


$$I_z = m0^2 + ma^2 = ma^2$$



$$I_z = m0^2 + m0^2 = 0$$

Rotasjon av et stivt legeme:



kontinuerlig legeme med massetetthet $\rho_m(\vec{r})$

som roterer med vinkelhastighet ω om aksen $\vec{\omega}=\omega\hat{k}$

et volumelement dV har masse $dm=\rho_m(\vec{r})dV$

og avstand ρ fra rotasjonsaksen

kinetisk energi til volumelementet:

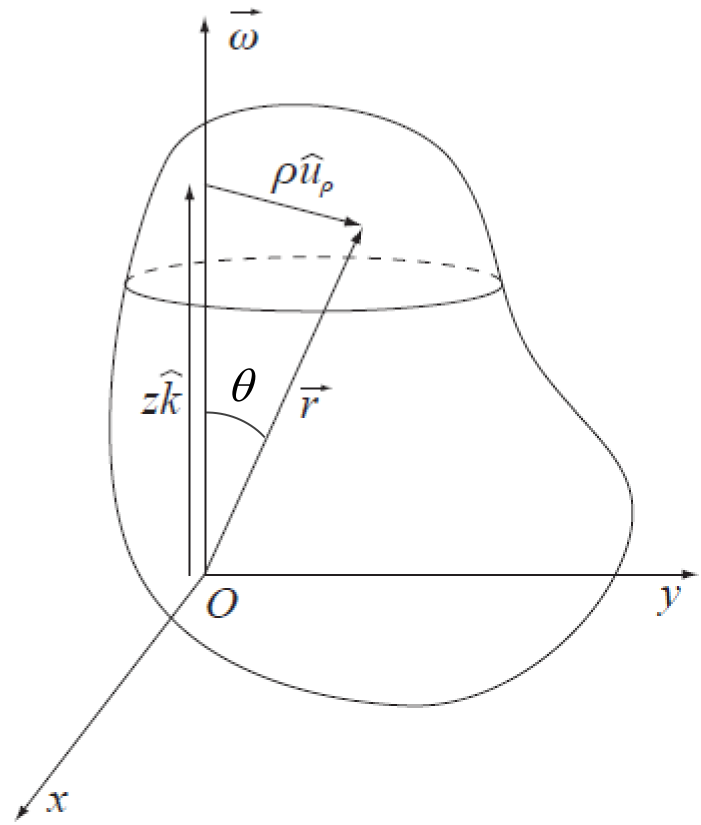
$$dK=\frac{1}{2}v^2 dm=\frac{1}{2}\omega^2\rho^2 dm=\frac{1}{2}\omega^2\rho^2\rho_m(\vec{r})dV$$

kinetisk energi til hele legemet:

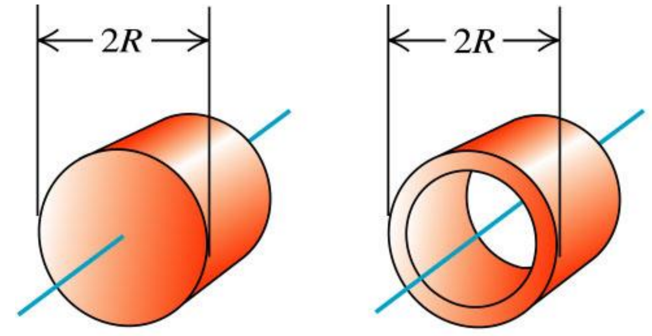
$$K=\int_V \frac{1}{2}\omega^2\rho^2\rho_m(\vec{r})dV=\frac{1}{2}\omega^2\int_V \rho^2\rho_m(\vec{r})dV$$

$$I_z=\sum_i m_i\rho_i^2 \quad\rightarrow\quad I_z=\int_M \rho^2 dm=\int_V \rho^2\rho_m(\vec{r})dV$$

$$K=\frac{1}{2}I_z\omega^2$$



Legemene er homogene og har samme masse og ytre dimensjoner. Hvilket legeme har minst treghetsmoment om den viste aksen?



1. sylinderen
2. sylinderskallet
3. treghetsmoment er det samme

den totale massen er den samme: $M = \int_M dm \approx \sum_i m_i$

men avstanden av massepunktene fra rotasjonsaksen er gjennomsnittlig større for sylinderskallet:

$$I_z = \int_M \rho^2 dm \approx \sum_i m_i \rho_i^2$$