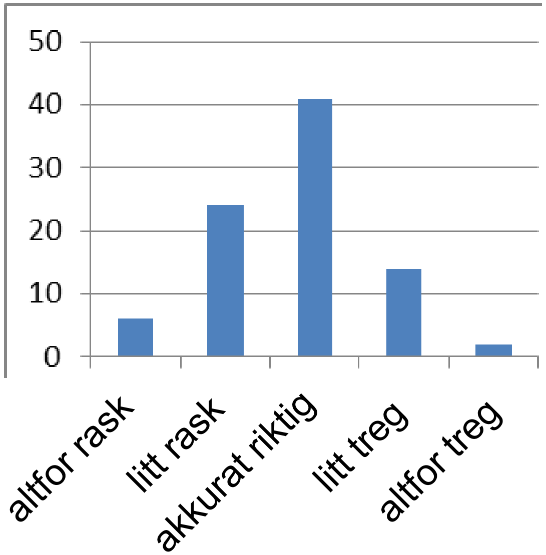
Stivt legemers dynamikk

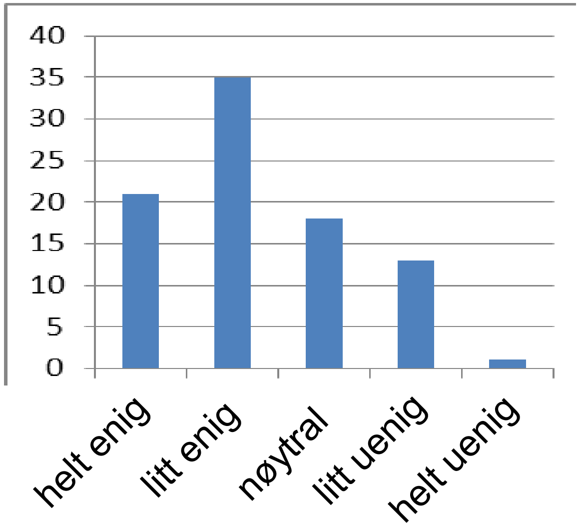
15.04.2015

Forelesning

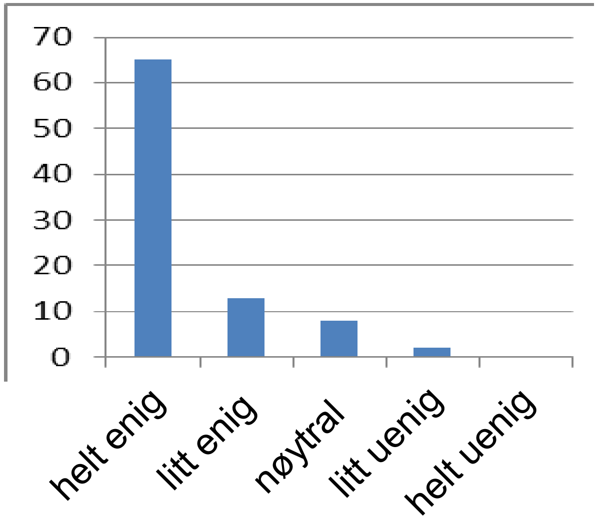
Tempoet i forelesningene er:



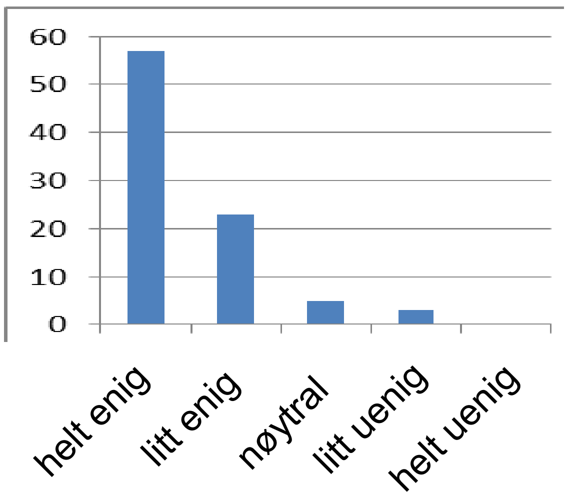
Presentasjonene er klare og bra strukturert.



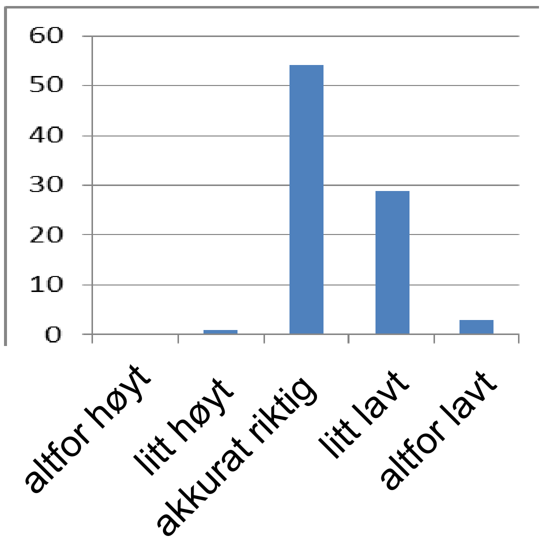
Det er bra å vise utregninger på smart-board / tavle



Diskusjonsspørsmålene i forelesningen hjelper meg å forstå.

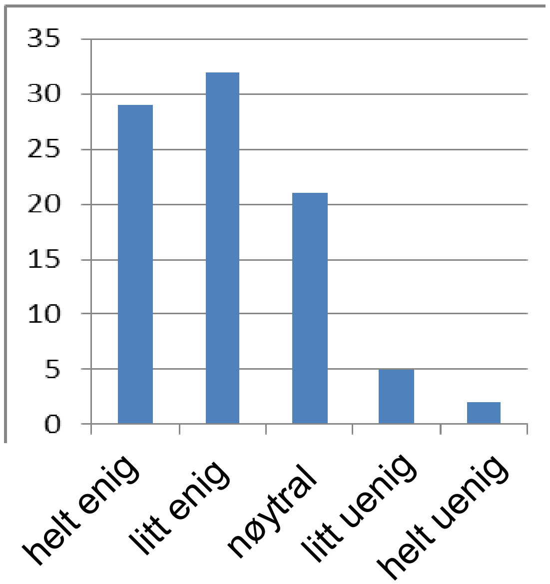


Antallet av eksempler som ble diskutert i forelesningen er:

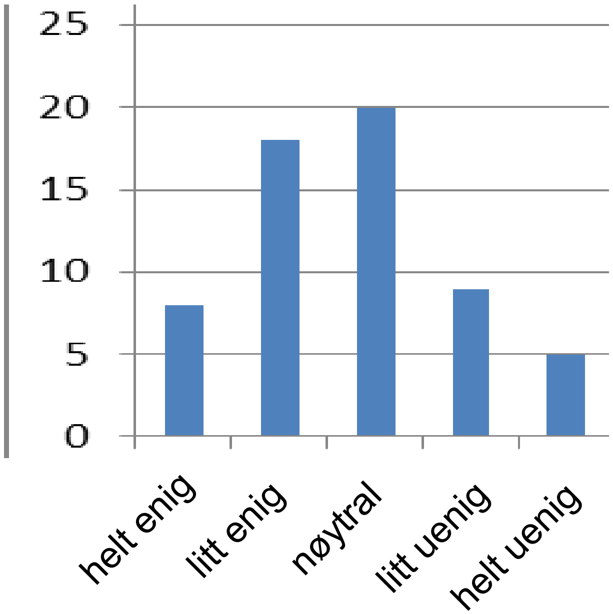


Gruppetimer

Ukesoppgavene er godt tilpasset forelesningene og hjelpe forståelsen.



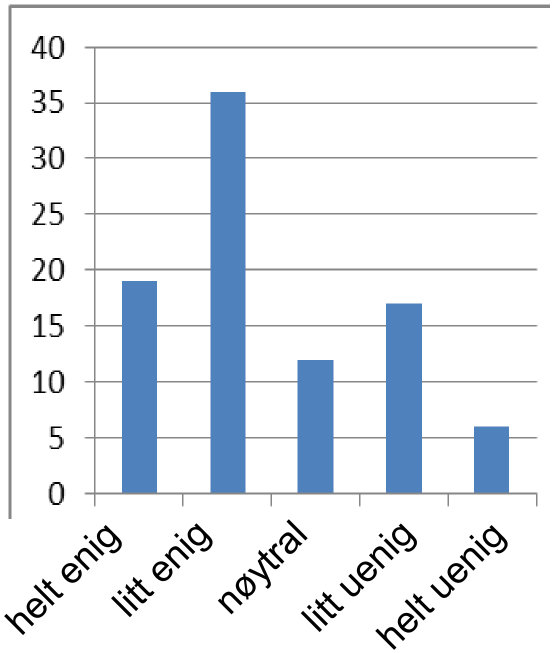
Gruppetimer er en balansert blanding av oppgaveregning, gruppearbeid, diskusjoner.



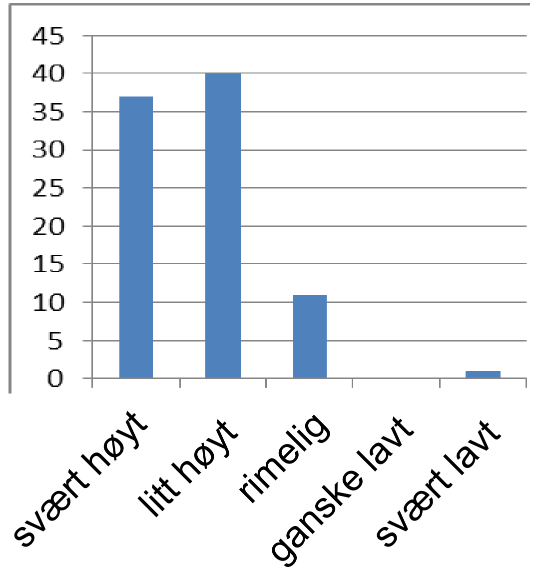
Jeg deltar ikke: 26 (30%)

Obliger

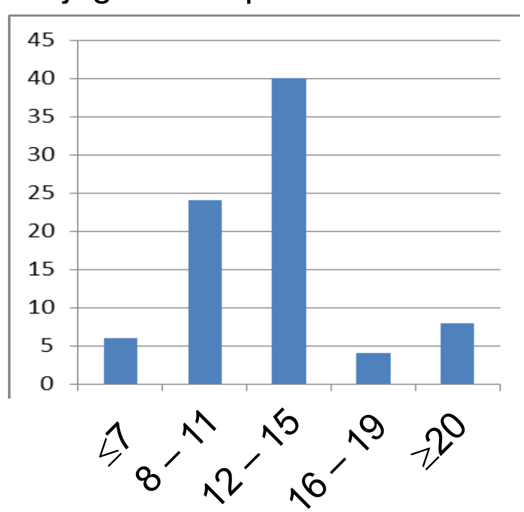
Oppgavene er godt tilpasset forelesningene og hjelpe forståelsen.



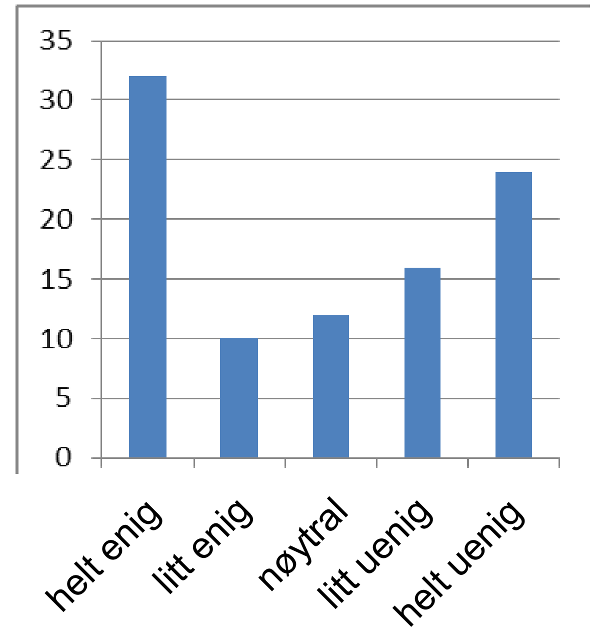
Arbeidsmengden relatert til obligene er:



Gjennomsnittlig bruker jeg x timer på FYS-MEK

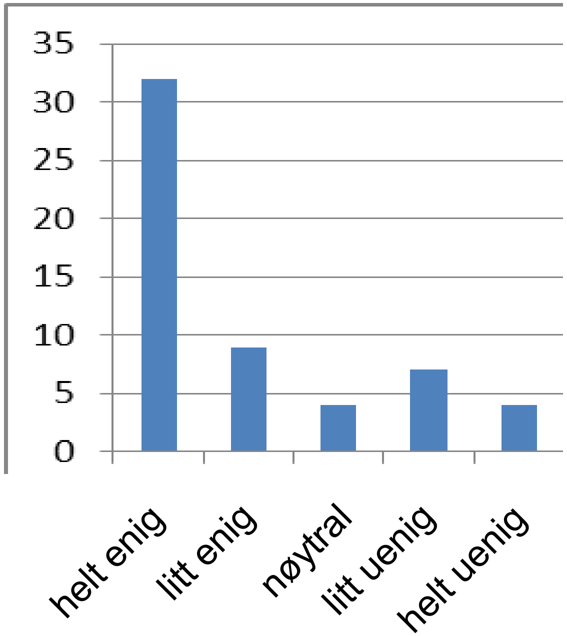


Innlevering kun elektronisk vil være like greit som innlevering på papir.



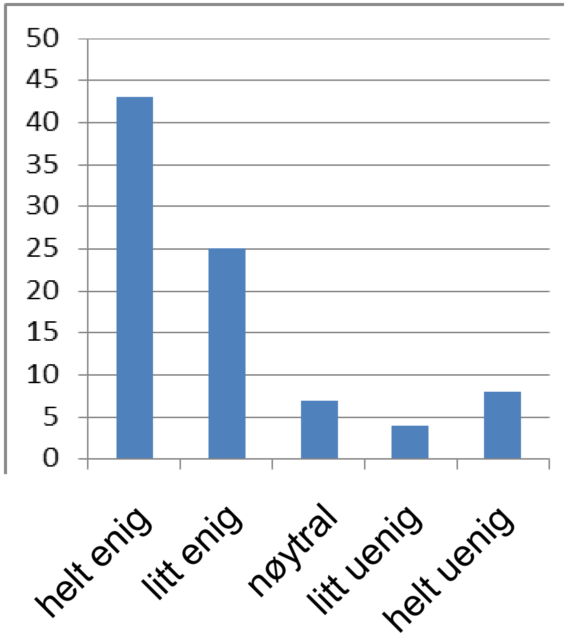
Datalab

Datalabben er et bra tilbud og jeg får hjelpen jeg trenger.



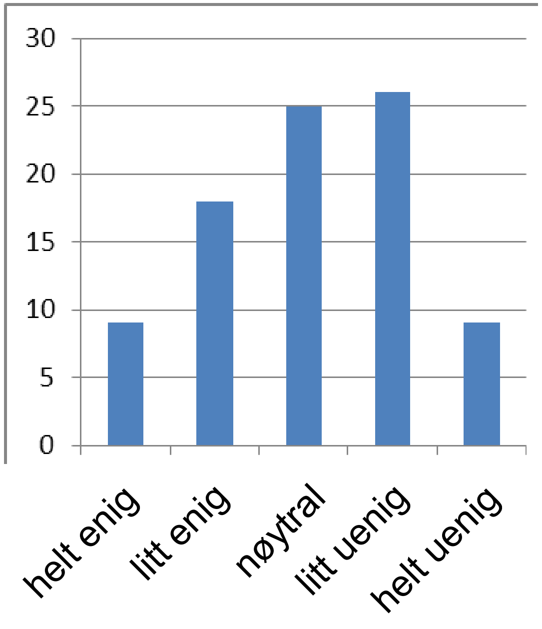
Jeg deltar ikke: 33 (37%)

Jeg har nyttige forkunnskaper i numeriske metoder / programmering fra tidligere kurs



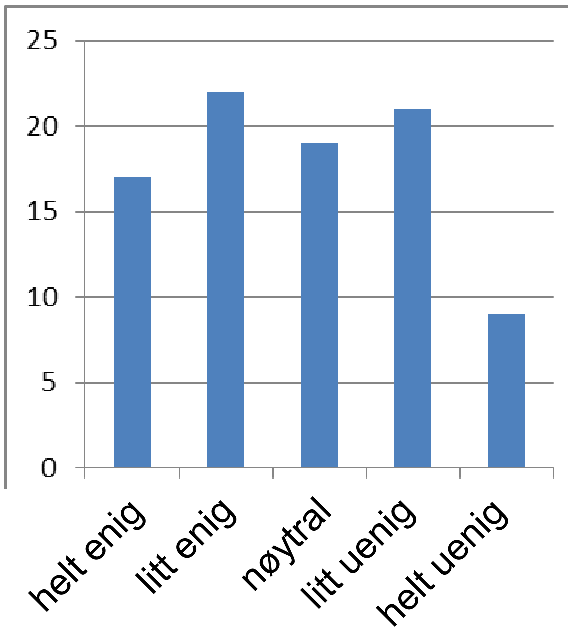
Lærebok

Jeg er fornøyd med læreboken.



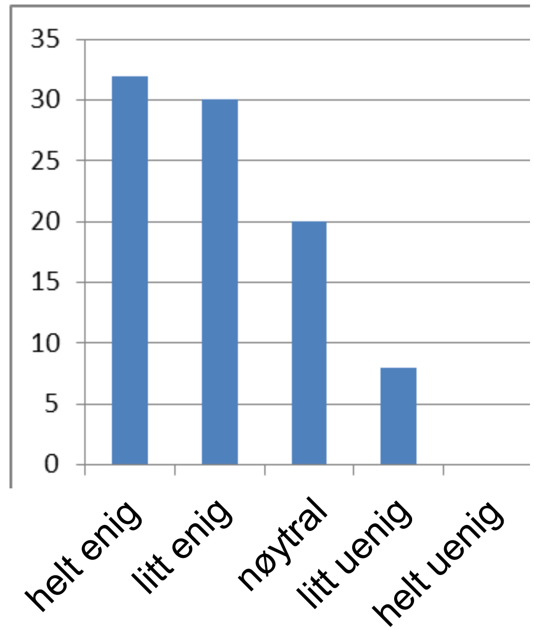
Eksamen

Midtveiseksamen gjenspeilte forelesningene, ukesoppgavene og obligene

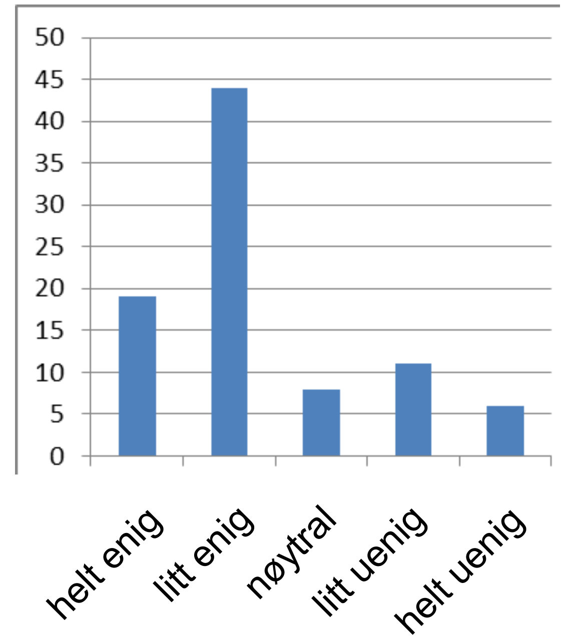


Generelt

Det er en balansert blanding av analytiske og numeriske metoder.



Jeg er generelt fornøyd med kurset.



Jeg liker å undervise fys-mek kurset

ja nei

Rotasjon av et stivt legeme:

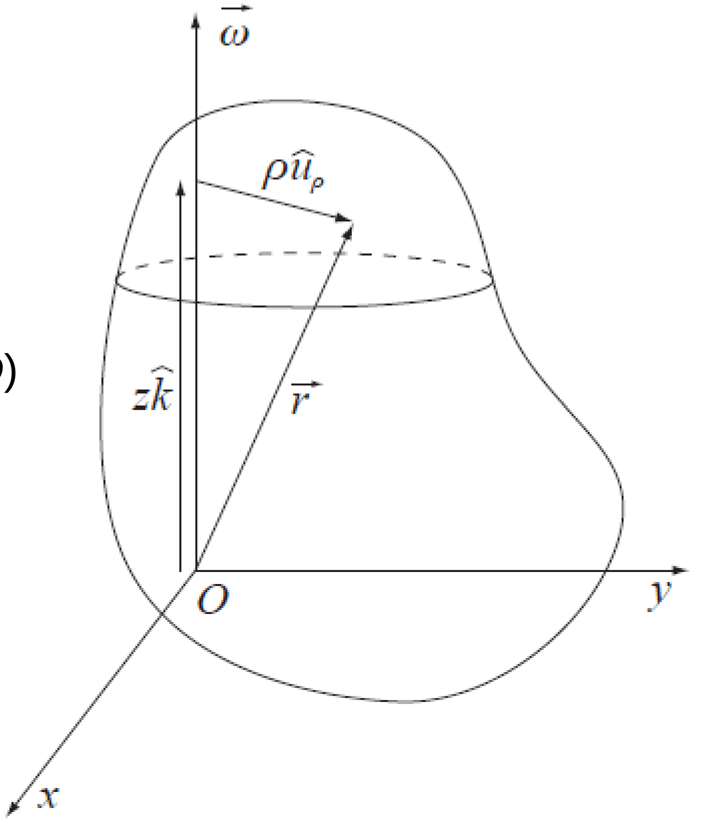
definisjon: $I_z = \sum_i m_i \rho_i^2$ treghetsmoment for legemet om aksen z (som går gjennom punktet O)

kontinuerlig legeme med massetetthet $\rho_m(\vec{r})$

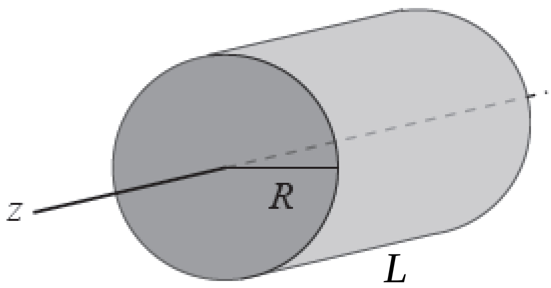
$$I_z = \int_M \rho^2 dm = \int_V \rho^2 \rho_m(\vec{r}) dV$$

kinetisk energi: $K = \frac{1}{2} I_z \omega^2$

jo større treghetsmomentet,
jo mer energi behøves
for å få legemet å rotere



homogen sylinder



sylinderkoordinater: $x = \rho \cos \varphi$

$y = \rho \sin \varphi$

z

$$\rho^2 = x^2 + y^2$$

$$dV = \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz$$

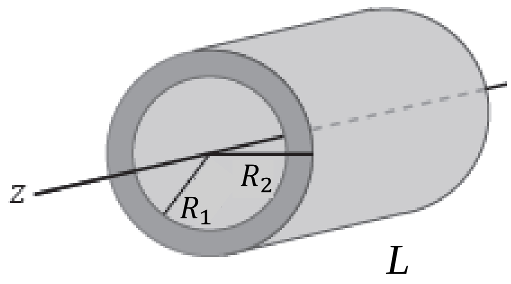
Volum: $V = \pi R^2 L$

Masse: $M = \rho_m V$

Treghetsmoment: $I_z = \int_V \rho_m \rho^2 dV = \rho_m \int_0^R \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^L dz = \rho_M \frac{1}{4} R^4 2\pi L$

$$= \frac{1}{2} \rho_M \pi R^2 L R^2 = \frac{1}{2} \rho_M V R^2 = \frac{1}{2} M R^2$$

homogen sylinderskall



Volum: $V = \pi(R_2^2 - R_1^2)L$

Masse: $M = \rho_m \pi(R_2^2 - R_1^2)L$

Treghetsmoment: $I_z = \int_V \rho_m \rho^2 dV = \rho_m \int_{R_1}^{R_2} \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^L dz = \rho_m \frac{1}{4}(R_2^4 - R_1^4) 2\pi L$

$$= \frac{1}{2}\rho_m \pi L(R_2^2 - R_1^2)(R_2^2 + R_1^2) = \frac{1}{2}M(R_2^2 + R_1^2)$$

tynn sylinderskall: $R_1 \approx R_2 \quad \Rightarrow \quad I_z = MR^2$

full sylinder: $I_z = \frac{1}{2}MR^2$

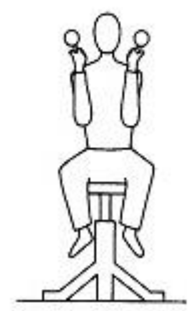
Stol

friksjon i rotasjonsaksen er neglisjerbar

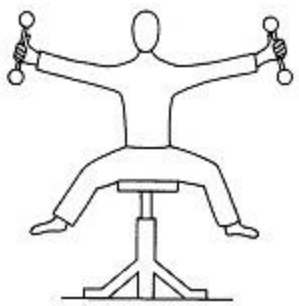
luftmotstand er neglisjerbar

energi er bevart: $K_0 = K_1$

$$\frac{1}{2} I_0 \omega_0^2 = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2$$

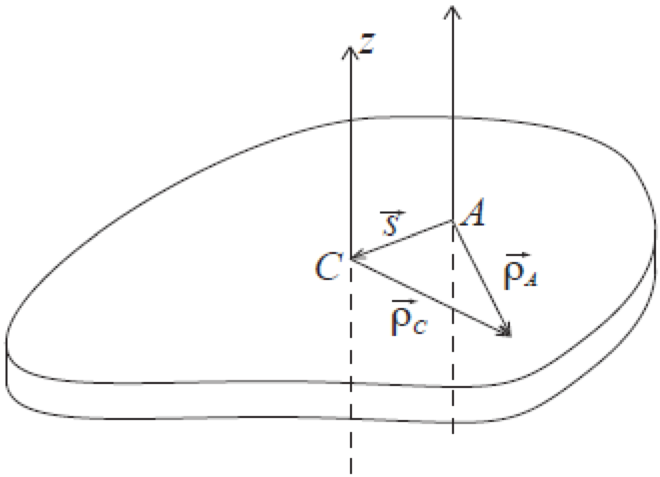


små trehetsmoment
stor vinkelhastighet



stor trehetsmoment
små vinkelhastighet

Parallellakseteoremet (Steiners sats)



massesenteret ligger i punkt C
treghetsmoment om z akse gjennom C er I_C

$$I_C = \int_M (\vec{\rho}_C)^2\, dm$$

hva er treghetsmoment om en parallell akse gjennom A ?

$$\vec{\rho}_A = \vec{\rho}_C + \vec{s}$$

$$I_A = \int_M (\vec{\rho}_A)^2\, dm = \int_M (\vec{\rho}_C + \vec{s})^2\, dm$$

$$= \int_M (\rho_C^2 + 2\vec{\rho}_C \cdot \vec{s} + s^2)\, dm$$

$$= \int_M (\rho_C^2)\, dm + 2\vec{s} \cdot \int_M \vec{\rho}_C\, dm + s^2 \int_M dm \; = I_C + Ms^2$$

Parallellakseteoremet

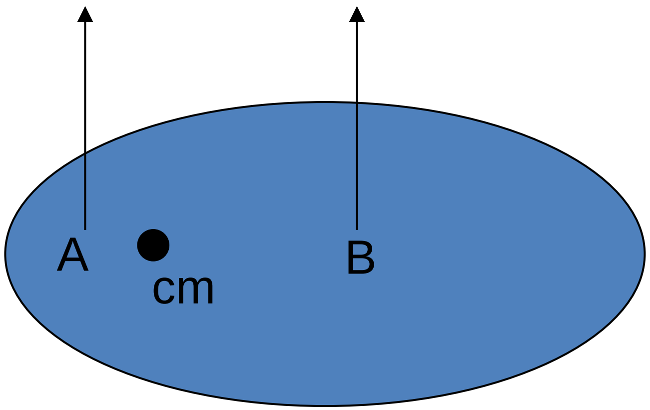
$$I_A = I_C + Ms^2$$

$$\int_M \vec{\rho}_C\, dm = \sum_i m_i \vec{\rho}_i = 0$$

siden punkt C er massesenteret

http://pingo.upb.de/ access number: 8178

Hvor stort er treghetsmomentet om A sammenliknet med treghetsmomentet om B?



1. $I_A > I_B$
2. $I_A = I_B$
3. $I_A < I_B$

bruk av parallellakseteoremet: $I_A = I_{cm} + M(d_{A,cm})^2$

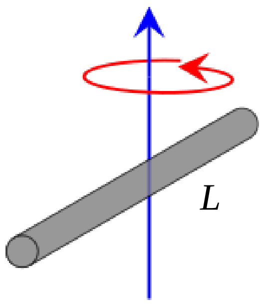
$$I_B = I_{cm} + M(d_{B,cm})^2$$

$$d_{A,cm} < d_{B,cm} \quad \Rightarrow \quad I_A < I_B$$

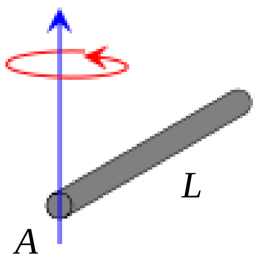
Eksempel

treghetsmomentet til en tynn lang stav
som roterer om en akse gjennom massesenteret: $I_{cm} = \frac{1}{12} ML^2$

(regn ut som øvelse)



hva er treghetsmoment hvis staven roterer
om en akse gjennom en endepunkt ?



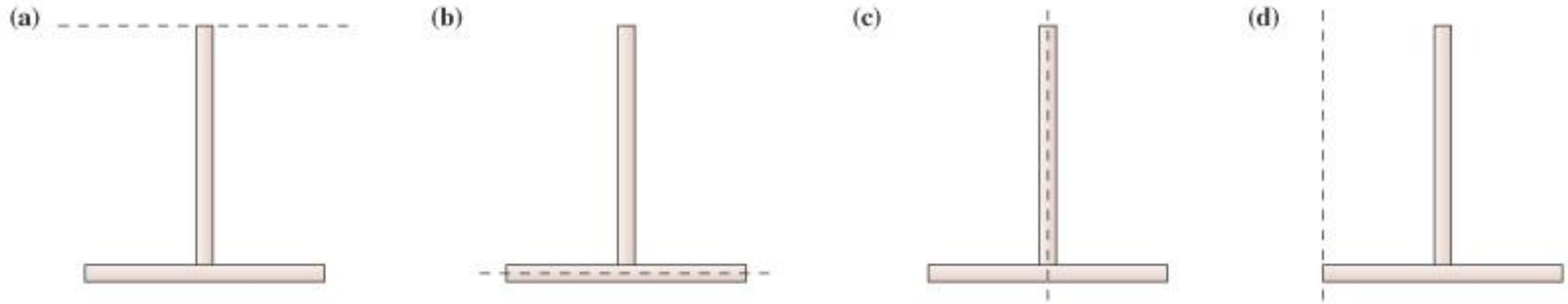
Parallellakseteoremet:

$$I_A = I_{cm} + Ms^2 = \frac{1}{12} ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2$$

$$= ML^2\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{3} ML^2$$

http://pingo.upb.de/ access number: 8178

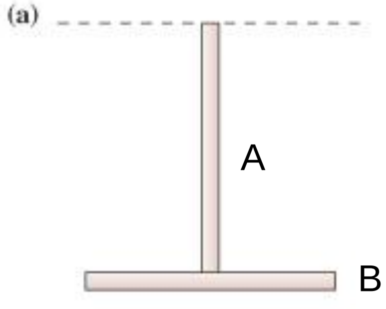
Fire T-er er laget av to identiske staver med samme masse og lengde. Ranger treghetsmomentene I_a til I_d for rotasjon om den stiplede linjen.



1. $I_c > I_b > I_d > I_a$
2. $I_c = I_d > I_a = I_b$
3. $I_a = I_b > I_c = I_d$
4. $I_a > I_d > I_b > I_c$
5. $I_a > I_b > I_d > I_c$

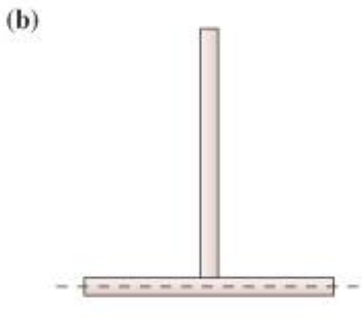
Superposisjonsprinsippet

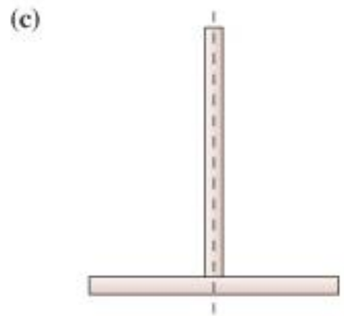
Hva er treghetsmoment for et legeme som består av to deler?

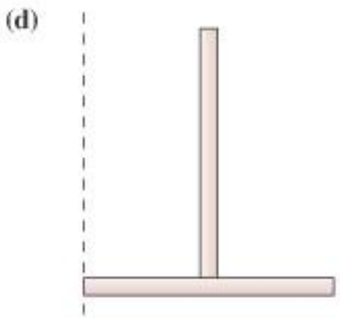


$$I_a = \sum_{i=1}^{N} m_i \rho_i^2 = \sum_{i=1}^{k} m_i \rho_i^2 + \sum_{i=k+1}^{N} m_i \rho_i^2 = I_{a,A} + I_{a,B}$$

$$I_{a,A} = \frac{1}{3} M L^2 \qquad I_{a,B} = I_{cm,B} + M s^2 = 0 + M L^2 \qquad I_a = \frac{1}{3} M L^2 + M L^2 = \frac{4}{3} M L^2$$



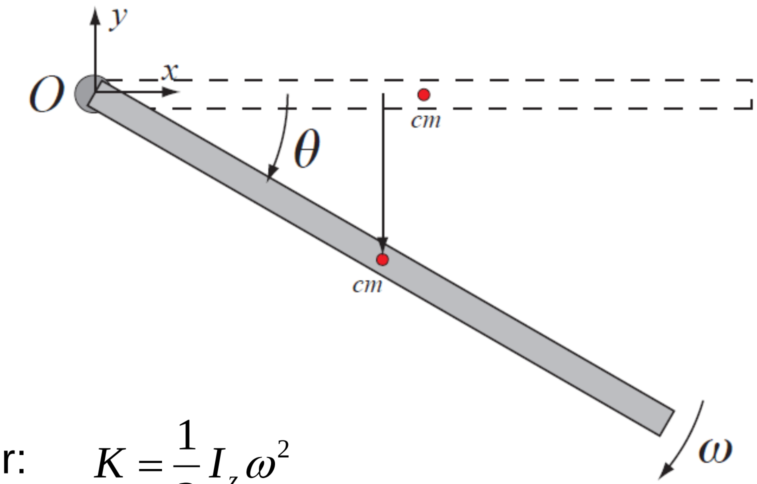




$$I_b = 0 + \frac{1}{3} M L^2 = \frac{1}{3} M L^2 \qquad I_c = 0 + \frac{1}{12} M L^2 = \frac{1}{12} M L^2 \qquad I_d = \frac{1}{3} M L^2 + M \left(\frac{L}{2} \right)^2 = \frac{7}{12} M L^2$$

$$I_\mathrm{a} > I_\mathrm{d} > I_\mathrm{b} > I_\mathrm{c}$$

En stav er festet i et friksjonsfritt hengsel og slippet fra en horisontal stilling.



finn vinkelhastigheten
(vi ser bort fra luftmotstand)

Kinetisk energi

Den kinetiske energien til et stivt legeme som roterer med vinkelhastigheten ω om en akse *z* er: $K = \frac{1}{2} I_z \omega^2$

Potensiell energi

Den potensielle energien til et stivt legeme i tyngdefeltet er: $U = \sum_i m_i g y_i = g \sum_i m_i y_i = MgY$

potensiell energi $\Rightarrow$ kinetisk energi

kan vi bruke energibevaring ?

la oss se på kreftene:

- gravitasjon $\Rightarrow$ potensiell energi
- ingen friksjon
- ingen luftmotstand
- normalkraft i hengselet

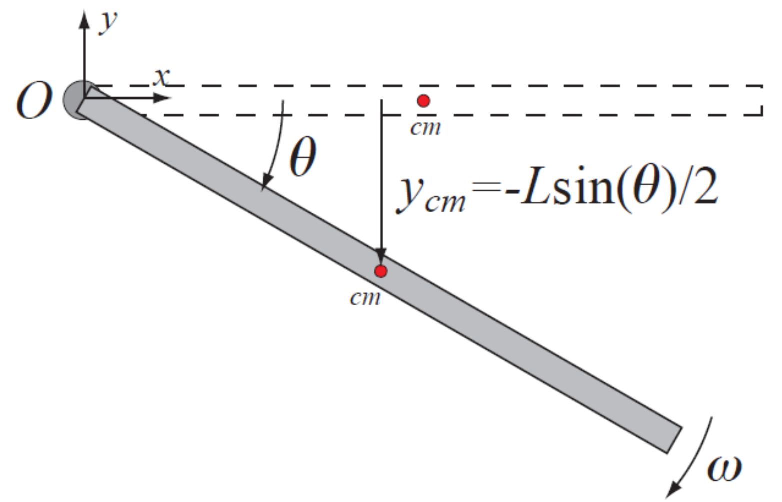
hengselet beveger seg ikke
$\Rightarrow$ normalkraft gjør ingen arbeid

energi er bevart:

$$K_0 + U_0 = K_1 + U_1$$

$$E_0 = K_0 + U_0 = \frac{1}{2} I_O \omega_0^2 + MgY_0 = 0$$

$$E_1 = K_1 + U_1 = \frac{1}{2} I_O \omega_1^2 + MgY_1 = \frac{1}{2} I_O \omega_1^2 - Mg\frac{L}{2}\sin\theta$$



energibevaring: $E_0 = E_1$

$$0 = \frac{1}{2} I_O \omega_1^2 - Mg\frac{L}{2}\sin\theta$$

$$I_O \omega_1^2 = MgL\sin\theta$$

$$\frac{1}{3} ML^2 \omega_1^2 = MgL\sin\theta$$

$$\frac{1}{3} L\,\omega_1^2 = g\sin\theta$$

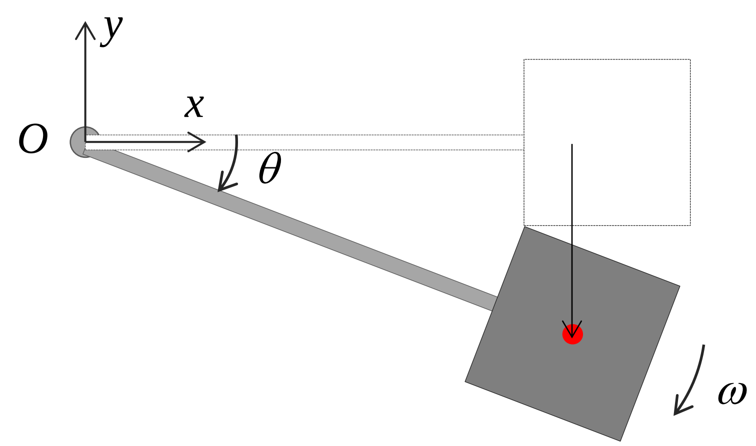
$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3g}{L}\sin\theta}$$

treghetsmoment:

$$I_O = \frac{1}{3} ML^2$$

http://pingo.upb.de/ access number: 8178

Vi fester en tung masse til enden av staven. Blir den maksimale vinkelhastigheten mindre, større eller like stor som for staven alene?



1. mindre
2. større
3. like stor

vi antar at massen til klossen er mye større enn massen til staven
$\Rightarrow$ massesenteret ligger i sentrum av klossen

treghetsmoment: $I_O = ML^2$

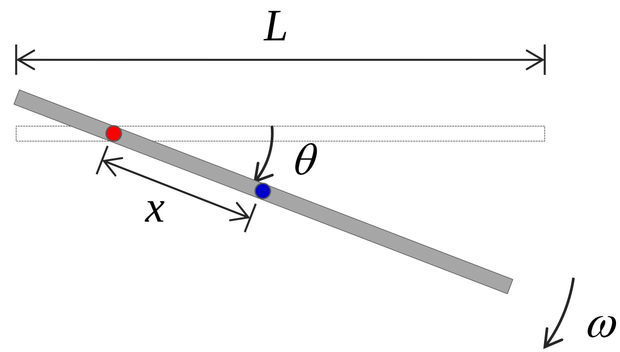
energibevaring: $\frac{1}{2}ML^2\omega^2 = MgL\sin\theta$

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{L}\sin\theta}$$

for staven alene: $\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}\sin\theta}$

den maksimale vinkelhastigheten (ved θ=90°) er mindre med klossen festet til enden

Eksempel: stav som svinger i et vilkårlig punkt



rotasjonspunkt i avstand x fra massesenteret

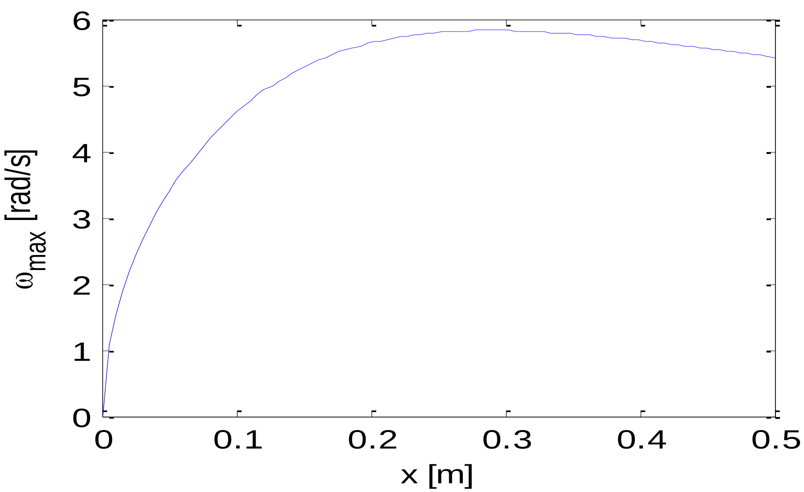
finn ω som funksjon av θ

treghetsmoment: bruk parallellakseteoremet

$$I_x = I_{cm} + Mx^2 = \frac{1}{12}ML^2 + Mx^2$$

energibevaring: $\frac{1}{2}I_x\omega^2 = Mgx\sin\theta$

vinkelhastighet ved $\theta = 90°$ $\quad \omega_{\max}^2 = \frac{2Mgx}{I_x}$



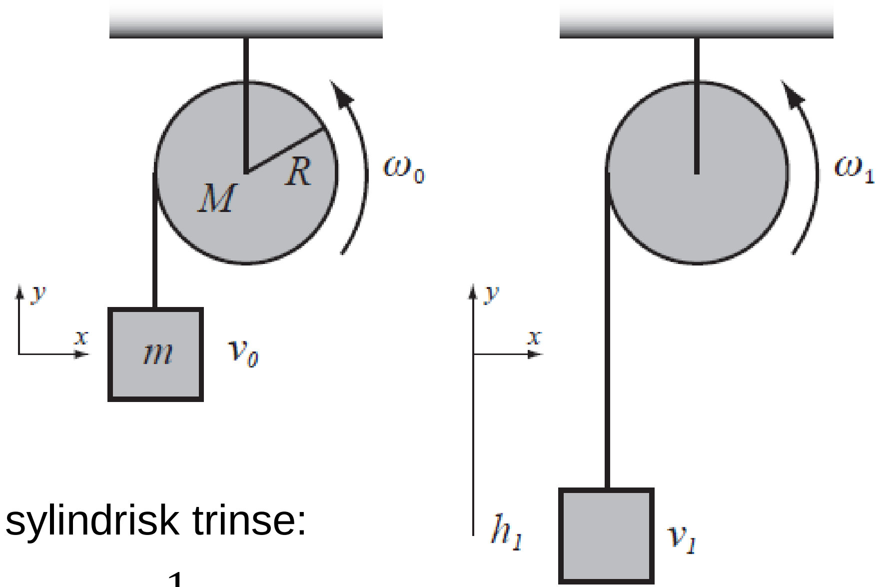
vi finner avhengighet av x numerisk:

```
M = 1.0;
L = 1.0;
g = 9.81;
x = linspace(0,L/2,100);
Ix = M*L^2/12 + M*x.^2;
omega = sqrt(2*M*g*x./Ix);
plot(x,omega);
xlabel('x [m]');
ylabel('\omega_{max} [rad/s]');
```

Eksempel: kloss i trinse

finn hastigheten till klossen som funksjon av h

(ingen friksjon, ingen luftmotstand)



kinetisk energi til klossen: $K_{\text{lin}} = \frac{1}{2} m v^2$

kinetisk energi til trinsen: $K_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I \omega^2$

potensiell energi til klossen: $U = mg\,y$

sylindrisk trinse:

$$I = \frac{1}{2} M R^2$$

energibevaring: $0 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 - mgh$

to ukjente: v og ω koblet via snoren

hvis snoren ikke glipper: $s = R\theta$

$$v = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} = R\omega$$

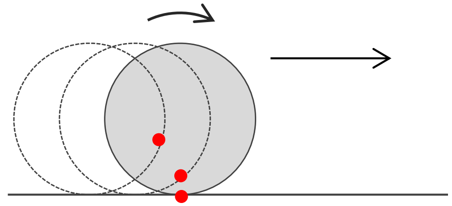
$$\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2} M R^2 \frac{v^2}{R^2} = mgh$$

$$(2m + M) v^2 = 4mgh$$

$$v = \sqrt{\frac{4mgh}{2m + M}}$$

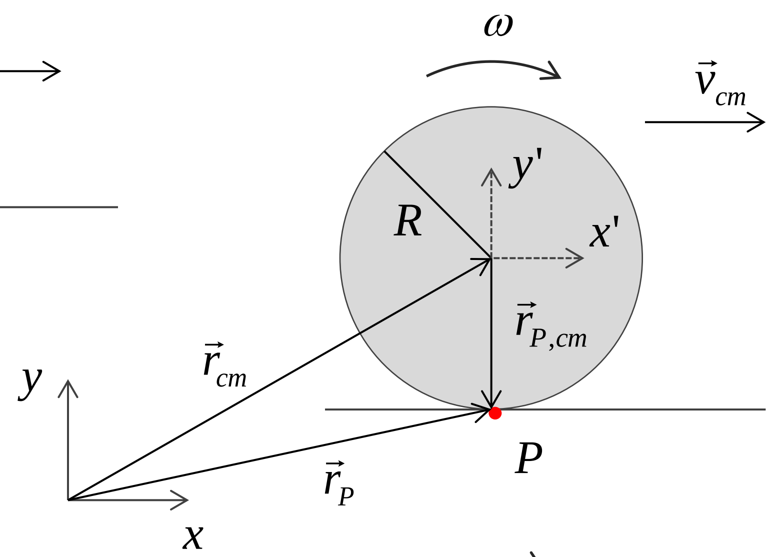
masseløs trinse: $v = \sqrt{2gh}$

Rullebetingelse



$$\vec{r}_P = \vec{r}_{cm} + \vec{r}_{P,cm}$$

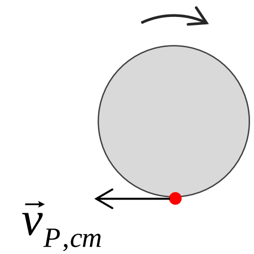
$$\vec{v}_P = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_{P,cm}$$



punktet P beveger seg på en sirkelbane i massesentersystemet:

$$\vec{v}_{P,cm} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{P,cm} = -\omega \hat{k} \times (-R\hat{j}) = \omega R(\hat{k} \times \hat{j}) = -\omega R \hat{i}$$

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_{P,cm} = \vec{v}_{cm} - \omega R \hat{i}$$



rullebevegelse i laboratoriesystem:

P snu vertikal bevegelsesretning når den treffer bakken: $v_{P,y} = 0$

uten å skli: $v_{P,x} = 0$

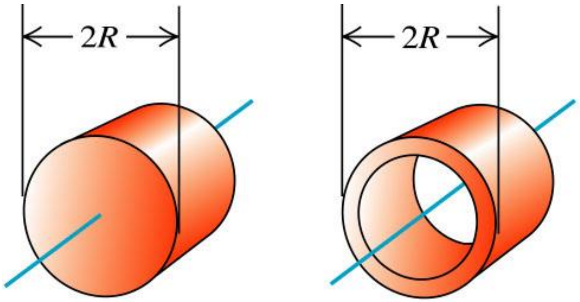
rullebetingelse: $\vec{v}_P = \vec{0}$

$$\Rightarrow \quad \vec{v}_{cm} = \omega R \hat{i}$$

legeme (sylinder, ball) ruller uten å skli:
⇒ finn hastighet til massesenteret fra vinkelhastighet

http://pingo.upb.de/ access number: 8178

En sylinder og et sylinderskall med samme masse og radius ruller nedover et skråplan. Hvilken når bunnen først?



1. Sylinderen
2. Sylinderskallet
3. De kommer samtidig ned.

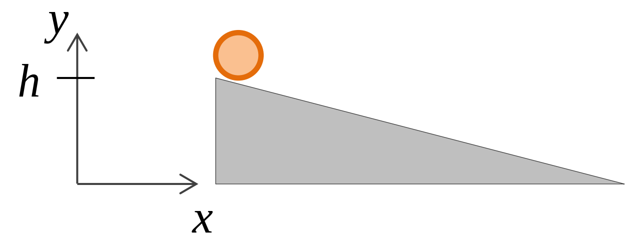
sylinder: $I_z = \frac{1}{2} m R^2$

sylinderskall: $I_z = \frac{1}{2} m (R_2^2 - R_1^2) \approx m R^2$

kinetisk energi: $K_r = \frac{1}{2} I_z \omega^2$

Energibevaring:
- sylinderskall har mer rotasjonsenergi
- sylinder har mer translatorisk energi

kinetisk energi i translasjon: $K_t = \frac{1}{2} m v_{cm}^2$



kinetisk energi i rotasjon: $K_r = \frac{1}{2} I \omega^2$

potensiell energi i tyngdefelt: $U = mg\, y_{cm}$

energibevaring: $mgh = \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I \frac{v_{cm}^2}{R^2} = \frac{1}{2} m v_{cm}^2 \left(1 + \frac{I}{mR^2}\right) = \frac{1}{2} m v_{cm}^2 (1+c)$

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{2gh}{1+c}}$$

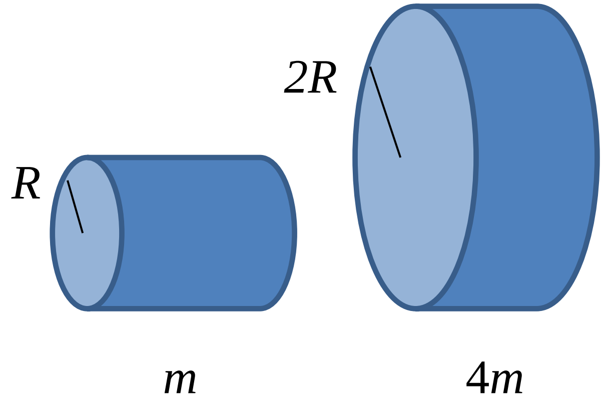
sylinder: $c = \frac{I}{mR^2} = \frac{1}{2}$

sylinderskall: $c = \frac{I}{mR^2} = 1$

sylinder når bunnen først

http://pingo.upb.de/ access number: 8178

En liten sylinder med radius *R* og masse *m* og en stor sylinder med radius 2*R* og masse 4*m* ruller ned et skråplan. Hvilken når bunnen først?



1. Den lille sylinderen
2. Den store sylinderen
3. De kommer samtidig ned.

vi har funnet: $v_{cm} = \sqrt{\dfrac{2gh}{1+c}}$ hvor: $c = \dfrac{I}{mR^2} = \dfrac{1}{2}$ for en sylinder

Hastighet v_{cm} er uavhengig av R og m.