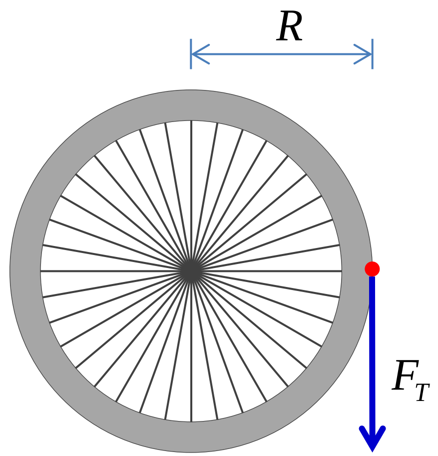
Stivt legemers dynamikk

20.04.2015

translasjon ⇔ rotasjon

	translasjon	**rotasjon**	
posisjon	$x(t)$	$\theta(t)$	vinkel
hastighet	$v(t) = \frac{dx}{dt}$	$\omega(t) = \frac{d\theta}{dt}$	vinkelhastighet
akselerasjon	$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$	$\alpha(t) = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$	vinkelakselerasjon
translatorisk energi	$K_t = \frac{1}{2}mv^2$	$K_r = \frac{1}{2}I\omega^2$	rotasjonell energi
masse	m	$I = \int_M \rho^2 dm$	treghetsmoment
kraft	$\vec{F} = m\vec{a}$	$\vec{\tau}_O = \vec{r} \times \vec{F}$	kraftmoment
bevegelsesmengde	$\vec{p} = m\vec{v}$	$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$	spinn

å spinne et hjul



tangensial kraft F_T i avstand R fra aksen

kraften virker over kort tid Δt
langs en kort strekning Δs

arbeid: $W \approx F_T \Delta s = F_T R \Delta\theta = K_1 - K_0$

kinetisk energi: $K = \frac{1}{2} I\omega^2$

$$F_T R \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{K(t+\Delta t) - K(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta K}{\Delta t}$$

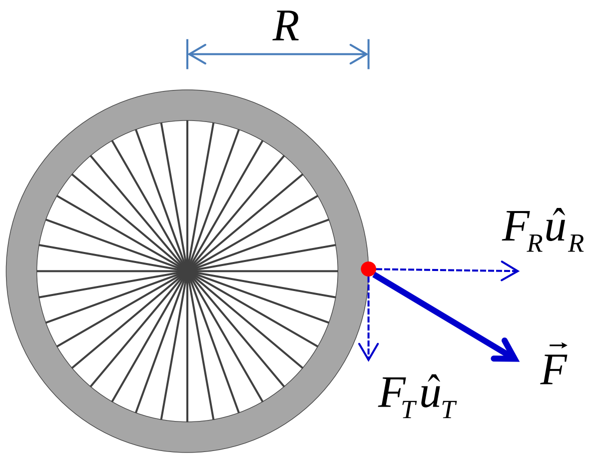
$$F_T R \frac{d\theta}{dt} = F_T R\omega = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} I\omega^2\right) = I\omega \frac{d\omega}{dt} = I\omega\alpha$$

N2L for rotasjoner: $F_T R = I\alpha$

"kraft $\times$ kraftarm"

N2L for translasjoner: $F = ma$

Kraftmoment



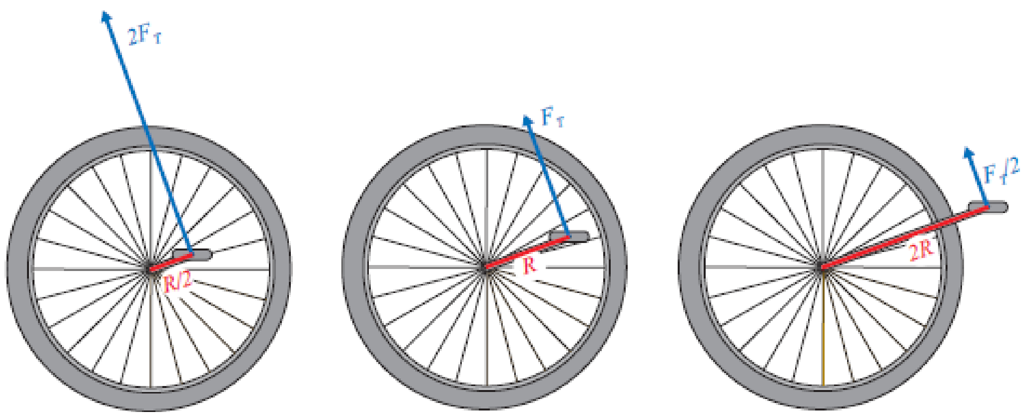
bare den tangensiale kraftkomponenten bidrar til å få hjulet å spinne

N2L for rotasjoner: $F_T R = I\alpha$

$\tau = F_T R$ kraftmoment

kraftmomentet er årsak for vinkelakselerasjonen: $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{I\alpha}$

avstand R fra rotasjonsaksen er viktig:



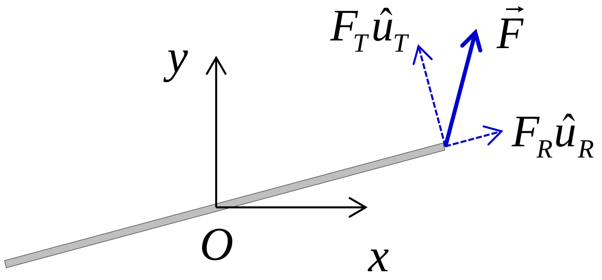
Treghetsmomentet er legemets motstand mot å få rotasjonshastigheten endret.

Det krever et kraftmoment.

Kraftmoment

angrepspunkt for kraften: $\vec{r} = r\hat{u}_R$

bare den tangensiale kraftkomponenten bidrar.

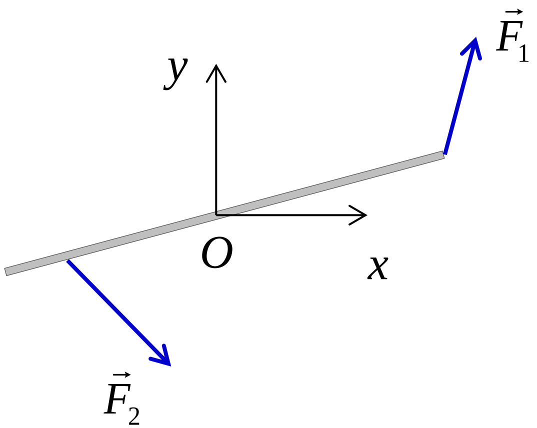


rotasjon om z aksen: $\vec{\alpha} = \alpha\hat{k}$

kraftmoment: $\vec{\tau}_O = \vec{r} \times \vec{F} \quad = r\hat{u}_R \times (F_R\hat{u}_R + F_T\hat{u}_T)$

$$= r\hat{u}_R \times F_T\hat{u}_T \;= rF_T\hat{k} \;= \tau_z\hat{k}$$

N2L for rotasjoner: $\tau_z = I_z\alpha_z$



hvis flere krefter virker:

$$\sum_i \tau_{z,i} = I_z\alpha_z \qquad \text{(N2Lr)}$$

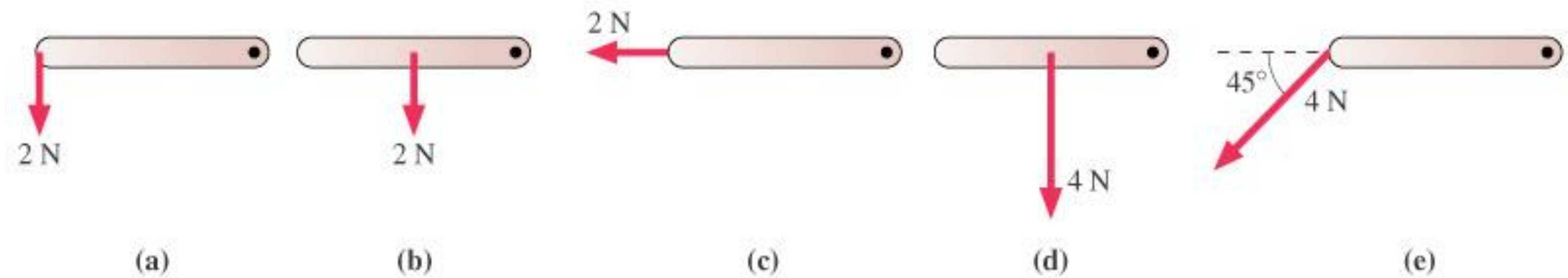
$\vec{\tau}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i$

kraftmomentet definert
I forhold til en punkt O

"kraftmoment om O"

http://pingo.upb.de/ access number: 8178

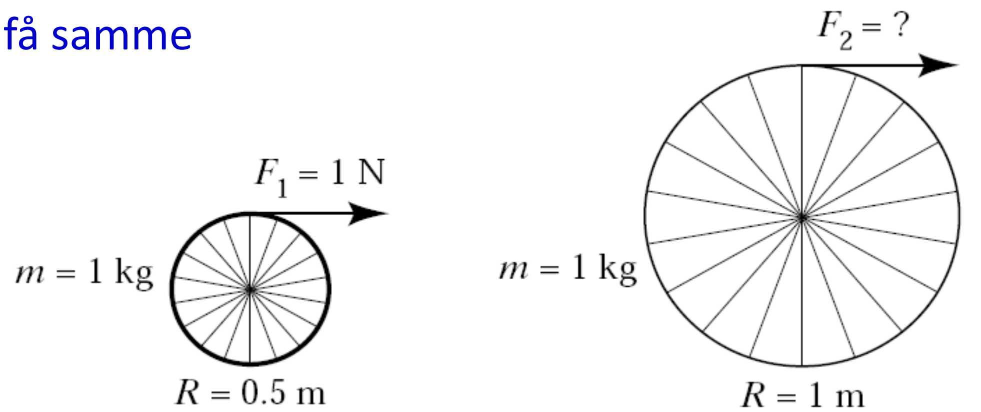
Ranger kraftmomentene



1. $\tau_d > \tau_e > \tau_a = \tau_b > \tau_c$
2. $\tau_e > \tau_a > \tau_d > \tau_b > \tau_c$
3. $\Rightarrow$ $\tau_e > \tau_a = \tau_d > \tau_b > \tau_c$
4. $\tau_d = \tau_e > \tau_a = \tau_b = \tau_c$
5. $\tau_d = \tau_e > \tau_a = \tau_b > \tau_c$

To hjul med fiksert nav har begge massen 1 kg. Anta at navet og eikene er masseløse slik at treghetsmomentet er $I = mR^2$. Hvor stor må F_2 være for at hjulene skal få samme vinkelakselerasjon?

A. 0.25 N
B. 0.5 N
C. 1 N
D. 2 N
E. 4 N

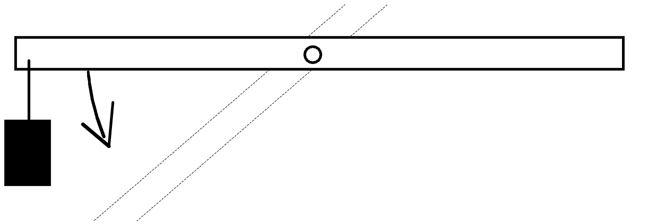


$$\tau = I\alpha$$

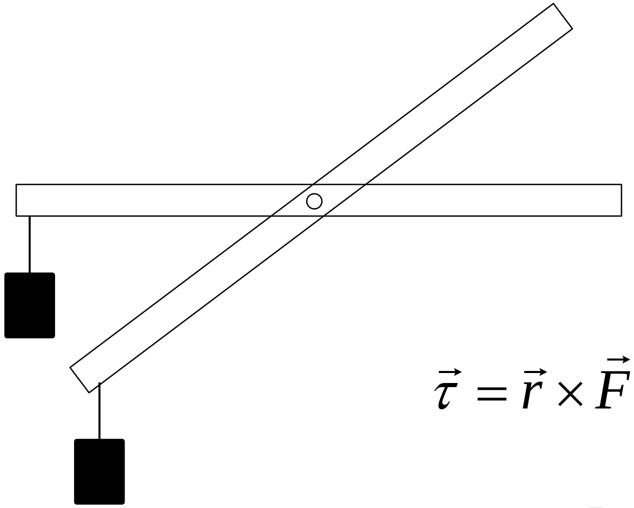
$$\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{RF}{mR^2} = \frac{F}{mR}$$

http://pingo.upb.de/ access number: 8178

Mens staven roterer fra den horisontale til den vertikale posisjonen blir vinkelakselerasjonen



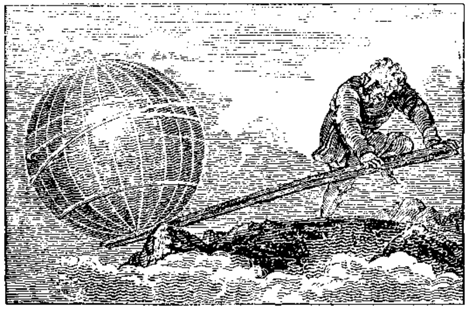
1. større
2. mindre
3. forblir den samme



$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$ blir mindre

$$\alpha = \frac{\tau}{I}$$ blir mindre

Arkimedes: *"Gi meg et fast punkt, og jeg skal flytte jorden."*



fast punkt: *O*

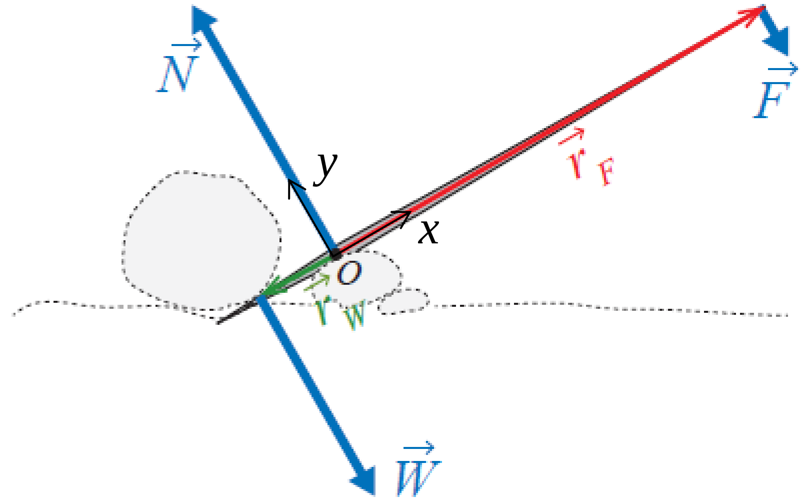
netto kraftmoment om *O*:

$$\vec{\tau}_{\text{net}} = \vec{r}_W \times \vec{W} + \vec{r}_F \times \vec{F} + \vec{r}_N \times \vec{N}$$

$$= -r_W\,\hat{i} \times (-W\,\hat{j}) + r_F\,\hat{i} \times (-F\,\hat{j}) + \vec{0} \times N\,\hat{j}$$

$$= r_W W(\hat{i} \times \hat{j}) - r_F F(\hat{i} \times \hat{j})$$

$$= (r_W W - r_F F)\hat{k}$$



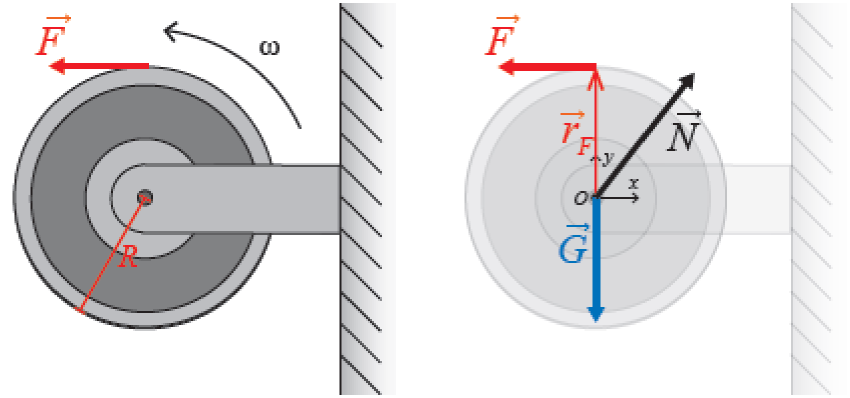
for å få et negativt kraftmoment
om z aksen (med klokken):

$$r_W W < r_F F$$

$$F > \frac{r_W}{r_F} W$$

Eksempel

En konstant kraft F virker tangensial på et hjul (homogen sylinder).
Finn vinkel θ som funksjon av tiden.



krefter:

- gravitasjon: $\vec{G} = -Mg\,\hat{j}$
- konstant kraft: $\vec{F} = -F\,\hat{i}$
- normalkraft fra aksen på hjulet: $\vec{N}$

massesenteret beveger seg ikke

$$\sum F_{\text{ext}} = \vec{G} + \vec{F} + \vec{N} = \vec{0}$$

$$\vec{N} = -\vec{F} - \vec{G} = F\,\hat{i} + Mg\,\hat{j}$$

kraftmomenter:

$$\vec{\tau}_G = \vec{r}_G \times \vec{G} = \vec{0} \times (-Mg\,\hat{j}) = \vec{0}$$

$$\vec{\tau}_N = \vec{r}_N \times \vec{N} = \vec{0} \times (-F\,\hat{i} - Mg\,\hat{j}) = \vec{0}$$

$$\vec{\tau}_F = \vec{r}_F \times \vec{F} = R\,\hat{j} \times (-F\,\hat{i}) = RF\,\hat{k}$$

N2Lr: $\tau_z = I_z \alpha$

$$\alpha = \frac{\tau_z}{I_z} = \frac{RF}{\frac{1}{2}MR^2} = \frac{2F}{MR}$$

$$\omega(t) - \omega(0) = \int_0^t \alpha\, dt = \frac{2F}{MR} t$$

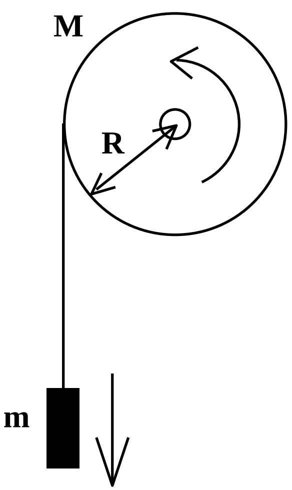
$$\theta(t) - \theta(0) = \int_0^t \omega(t)\, dt = \frac{2F}{MR} \int_0^t t\, dt$$

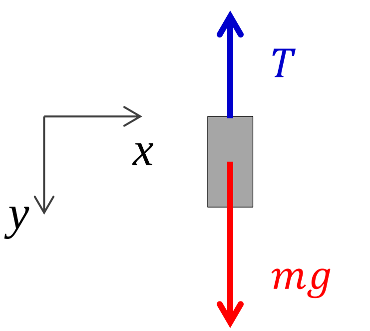
$$\theta(t) = \frac{F}{MR} t^2$$

http://pingo.upb.de/ access number: 8178

Et lodd med masse m henger fra en strikk som er festet på en trinse med masse M og radius R. Trinsen roterer uten friksjon når massen faller ned. Størrelsen til kraftmomentet på trinsen er:

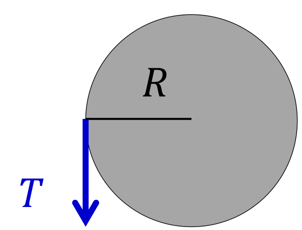
A. større enn mgR
B. mindre enn mgR
C. lik mgR





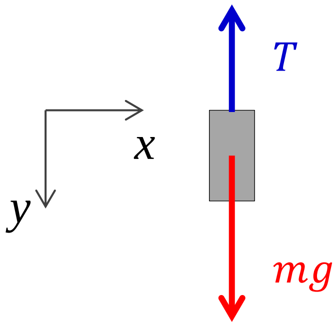
$$mg - T = ma_y$$

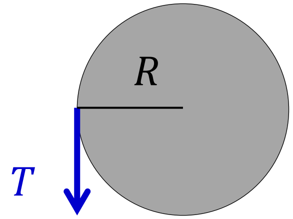
akselerasjon nedover:
T< mg



kraftmoment:
$\tau = TR < mgR$

Eksempel: Trinse





snoren sklir ikke:

$$v_y = R\omega$$
$$a_y = R\alpha$$

kraftmoment:

$$\tau = TR = I_z \alpha$$

$$TR = I_z \frac{a_y}{R} = \frac{1}{2} M R^2 \frac{a_y}{R}$$

$$T = \frac{1}{2} M a_y$$

$$mg - T = m a_y$$

$$mg - \frac{1}{2} M a_y = m a_y$$

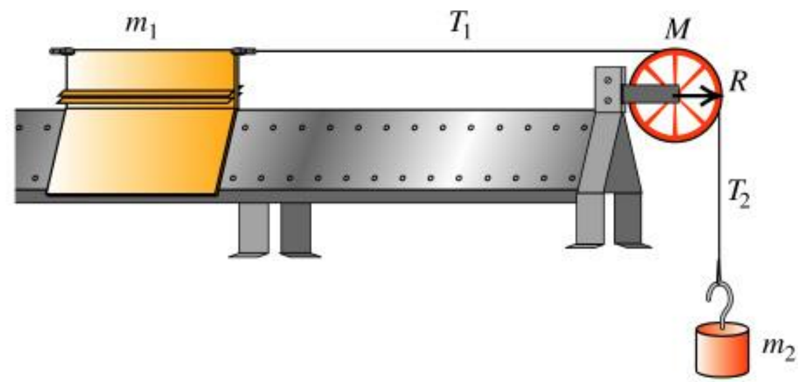
$$a_y = \frac{mg}{\frac{1}{2} M + m}$$

hvis $M \ll m$: $a_y \approx g, \; T \approx 0$

hvis $M \gg m$: $a_y \approx 0, \; T \approx mg$

http://pingo.upb.de/ access number: 8178

Kloss m_1 glir friksjonsfritt og er festet til lodd m_2 med en masseløs snor som roterer hjulet (M, R) uten å gli. Hva er relasjon mellom snordragene idet klossen slippes?



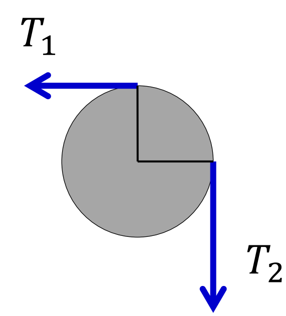
A. $m_2 g = T_2 = T_1$

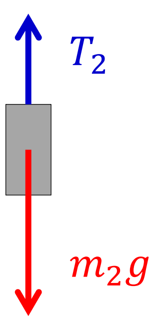
B. $m_2 g > T_2 = T_1$

C. $m_2 g > T_2 > T_1$

D. $m_2 g = T_2 > T_1$

E. Ingen av alternativene over





loddet akselerer nedover:
$m_2 g > T_2$

hjulet får vinkelakselerasjon (med klokken)
netto-kraftmoment med klokken
$T_2 > T_1$