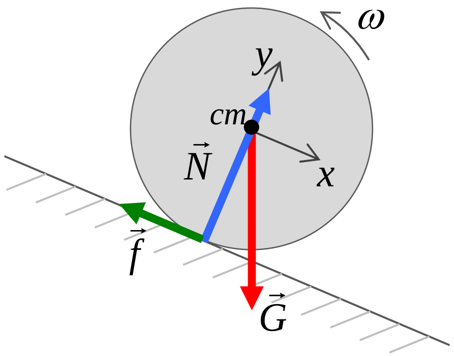
Stivt legemers dynamikk

Spinn

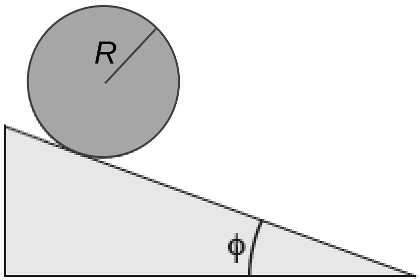
22.04.2015

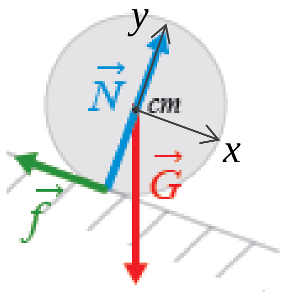
Problemløsning



- identifiser system og omgivelse
- definer et koordinatsystem
- finn massesenter, rotasjonsakse og treghetsmoment
- finn initialbetingelser: posisjon, hastighet, vinkel, vinkelhastighet
- finn kreftene og angrepspunktene
- finn kraftmomentene for hver kraft
- bruk Newtons andre lov for å finne akselerasjonen til massesenteret $\sum_i F_i = M\vec{A}$
- bruk Newtons andre lov for rotasjoner for å finne vinkelakselerasjonen $\sum_i \tau_{O,z,i} = I_z \alpha$
- bruk kinematiske betingelse for å relatere translasjon og rotasjon
- løs bevegelsesligninger for translasjon og rotasjon
- kontroller og analyser bevegelsen

Eksempel





Et legeme av masse M, radius R og treghetsmoment I ruller ned et skråplan.

koordinatsystem med *x* aksen langs planet
origo i massesenteret

normalkraft: $\vec{N} = N\,\hat{j}$

$$\vec{\tau}_N = \vec{r}_N \times \vec{N} = -R\,\hat{j} \times N\,\hat{j} = \vec{0}$$

friksjon: $\vec{f} = -f\,\hat{i}$

$$\vec{\tau}_f = \vec{r}_f \times \vec{f} = -R\,\hat{j} \times (-f\,\hat{i}) = -Rf\,\hat{k}$$

gravitasjon:

$$\vec{G} = Mg(\sin\phi)\hat{i} - Mg(\cos\phi)\,\hat{j}$$

$$\vec{\tau}_G = \vec{r}_G \times \vec{G} = \vec{0} \times \vec{G} = \vec{0}$$

N2L for translasjon: $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{N} + \vec{f} + \vec{G} = M\vec{A}$

x retning: $\boxed{Mg\sin\phi - f = MA_x}$

y retning: $N - Mg\cos\phi = MA_y = 0$

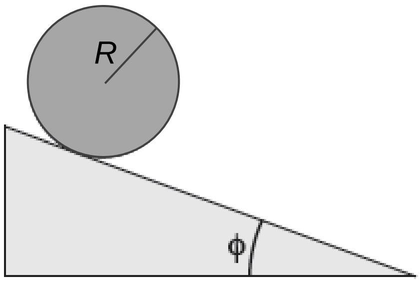
$$N = Mg\cos\phi$$

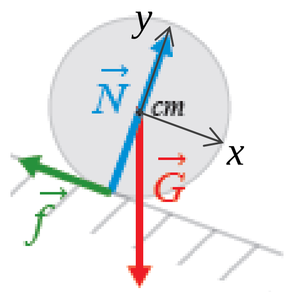
N2L for rotasjon: $\sum \tau_{z,cm} = \boxed{-Rf = I_{z,cm}\alpha}$

2 ligninger
3 ukjente: A_x, α, f

$$Mg\sin\phi - f = MA_x \qquad (1)$$

$$-Rf = I_{z,cm}\alpha \qquad (2)$$





vi antar at legemet ruller:

rullebetingelse: $V_x = -\omega R \qquad (\omega < 0)$

$$\frac{d}{dt}V_x = A_x = -R\frac{d\omega}{dt} = -R\alpha$$

(2) $$f = -\frac{I_{z,cm}}{R}\alpha = \frac{I_{z,cm}}{R^2}A_x$$

(1) $$Mg\sin\phi - \frac{I_{z,cm}}{R^2}A_x = MA_x$$

$$g\sin\phi = \left(1 + \frac{I_{z,cm}}{MR^2}\right)A_x$$

$$A_x = \frac{g\sin\phi}{1+c}$$

friksjon: $f = \frac{I_{z,cm}}{R^2}\frac{g\sin\phi}{1+c} = Mg\sin\phi\frac{c}{1+c}$

friksjon øker med stigning ϕ

betingelse for at legemet ikke sklir: $f < \mu_s N$

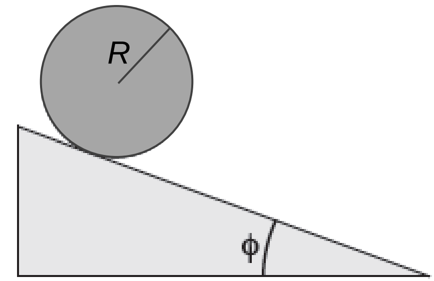
$$Mg\sin\phi\frac{c}{1+c} < \mu_s Mg\cos\phi$$

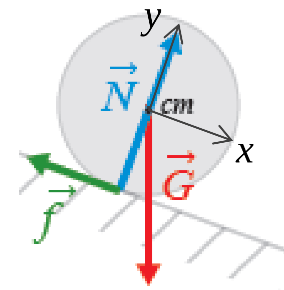
$$\tan\phi < \mu_s\frac{1+c}{c}$$

	$I_{z,cm}$	$\tan\phi_{\max}$
kule	$\frac{2}{5}MR^2$	$\frac{7}{2}\mu_s$
sylinder	$\frac{1}{2}MR^2$	$3\mu_s$
sylinderskall	MR^2	$2\mu_s$

$$Mg\sin\phi - f = MA_x \qquad (1)$$

$$-Rf = I_{z,cm}\alpha \qquad (2)$$





stor stigning: legemet sklir

i denne tilfelle kjenner vi friksjon:
dynamisk friksjon:

$$f = \mu_d N = \mu_d Mg\cos\phi$$

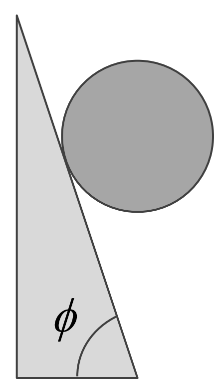
(1) $$Mg\sin\phi - \mu_d Mg\cos\phi = MA_x$$

$$A_x = g(\sin\phi - \mu_d\cos\phi)$$

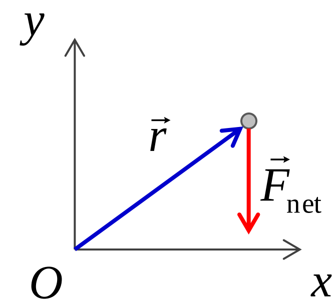
legemet vil fortsatt ruller:

(2) $$\alpha = -\frac{Rf}{I_{z,cm}} = -\mu_d \frac{RMg\cos\phi}{I_{z,cm}}$$

jo større ϕ jo mindre α



Spinn



Newtons andre lov: $$\vec{F}_{\text{net}} = \sum_i \vec{F}_i = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

kraftmoment om O: $$\vec{\tau}_{\text{net}} = \sum_i \vec{\tau}_i = \sum_i \vec{r} \times \vec{F}_i = \vec{r} \times \sum_i \vec{F}_i = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \vec{F}_{\text{net}} = \vec{\tau}_{\text{net}}$$

vi definerer:
spinn om punkt O for en partikkel
med masse m og bevegelsesmengde $\vec{p}$

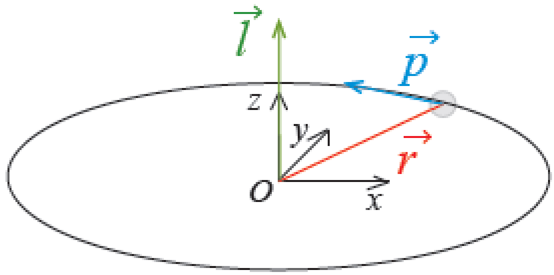
engelsk:
momentum $\vec{p}$
angular momentum $\vec{l}$

$$\vec{l}_O = \vec{r} \times \vec{p}$$

spinnet er definert i forhold til et punkt!

spinnsats: $$\vec{\tau}_{\text{net}} = \frac{d}{dt}\vec{l}_O$$

uten netto kraftmoment er spinnet bevart sirkelbane



$$\vec{l}_O = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

$$= \vec{r} \times m(\vec{\omega} \times \vec{r})$$

$$= m\vec{\omega}(\vec{r} \cdot \vec{r}) - m\vec{r}(\vec{\omega} \cdot \vec{r})$$

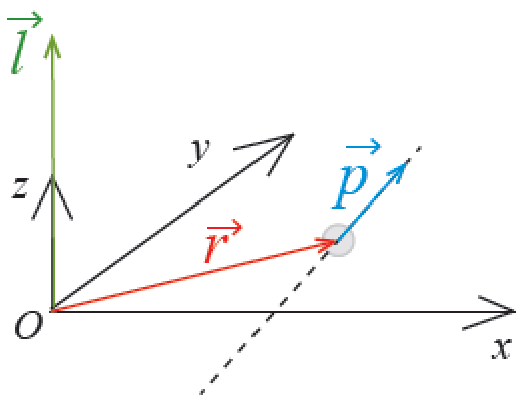
$$= mr^2\vec{\omega} \;\; = mr^2\omega\hat{k}$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$\vec{\omega} \perp \vec{r}$$

lineær bevegelse



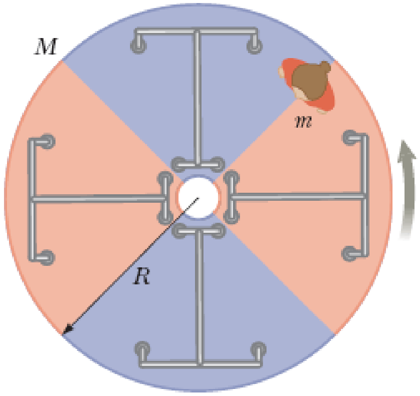
vi antar: $\vec{r} = b\hat{i} + y(t)\hat{j}$

$$\vec{v} = v_y\,\hat{j}$$

$$\vec{l}_O = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} \;\; = (b\hat{i} + y(t)\,\hat{j}) \times mv_y\,\hat{j} \;\; = bmv_y\,\hat{k}$$

en masse med lineær hastighet har
også et spinn i forhold til et punkt

Et barn står på en karusell som roterer uten friksjon. Barnet går sakte mot karusellens senter.
Mens barnet beveger seg innover:



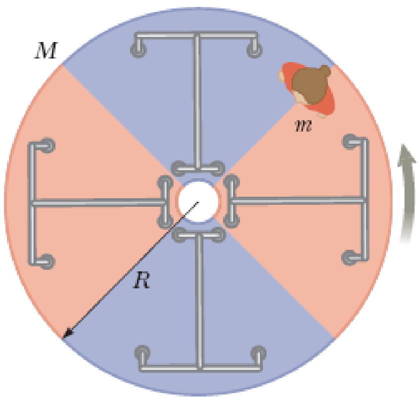
1. øker spinnet
2. avtar spinnet
3. er spinnet konstant

bevegelsen mot senteret
gir ingen kraftmoment

$\Rightarrow$ spinn er bevart

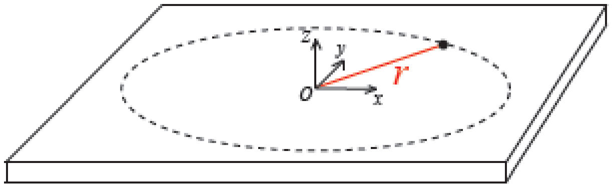
http://pingo.upb.de/ access number: 8178

Et barn står på en karusell som roterer uten friksjon. Barnet går sakte mot karusellens senter.
Mens barnet beveger seg innover:

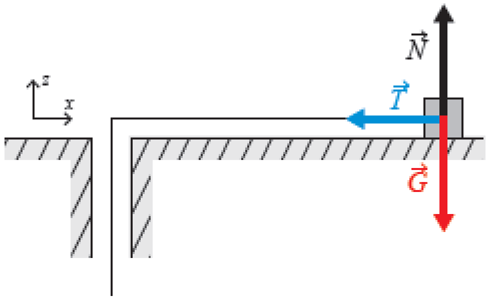


1. gjør hun positiv arbeid på systemet
2. gjør hun negativ arbeid på systemet
3. gjør hun ingen arbeid på systemet

Eksempel



En kloss med masse *m* henger i en masseløs snor som går gjennom et hull i et friksjonsfritt bord.
Klossen har vinkelhastighet ω_0 ved radius r_0.
Vi trekker sakte i snoren.



Gravitasjon balanseres av normalkraften.

Eneste kraft i planet: snordraget $\vec{T}$

kraftmoment til snordraget: $\vec{\tau}_T = \vec{r} \times \vec{T} = r\hat{u}_r \times (-T\hat{u}_r) = \vec{0}$

spinnsats: $\vec{\tau} = \frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{0}$ $\Rightarrow$ spinnbevaring $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$

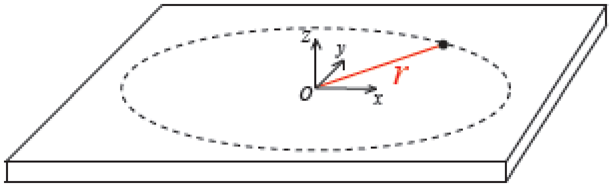
massen beveger seg på en sirkelbane: $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

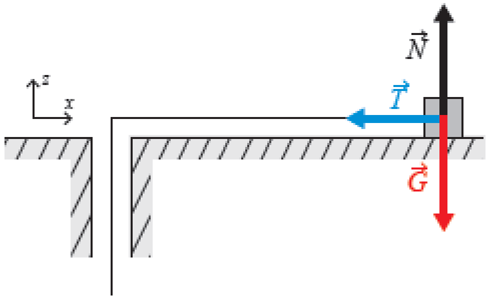
$$\vec{l} = \vec{r} \times m\vec{v} = \vec{r} \times m(\vec{\omega} \times \vec{r}) = mr^2\omega\hat{k}$$

spinnbevaring: $mr_0^2\omega_0 = mr^2\omega$ $\omega = \frac{r_0^2}{r^2}\omega_0$ vinkelhastigheten øker når vi drar inn snoren

Eksempel

En kloss med masse *m* henger i en masseløs snor som går gjennom et hull i et friksjonsfritt bord. Klossen har vinkelhastighet ω_0 ved radius r_0. Vi trekker sakte i snoren.





$$\omega = \frac{r_0^2}{r^2}\omega_0$$

kinetisk energi: $$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mr^2\omega^2$$

arbeid: $$W = K - K_0 = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 - \frac{1}{2}m\omega_0^2 r_0^2$$

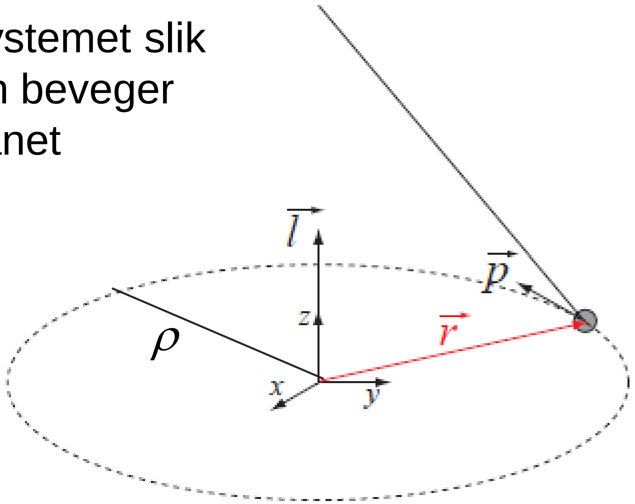
$$= \frac{1}{2}m\left(\frac{r_0^2}{r^2}\omega_0\right)^2 r^2 - \frac{1}{2}m\omega_0^2 r_0^2$$

$$= \frac{1}{2}m\omega_0^2 r_0^2\left(\frac{r_0^2}{r^2} - 1\right) > 0$$

vi må gjøre positivt arbeid
for å dra inn massen mot sentrum

Konisk pendel

koordinatsystemet slik at pendelen beveger seg i *xy*-planet



spinn om punktet O: $\vec{l}_O = \vec{r} \times \vec{p}$

pendel i punkt $\vec{r} = \rho \hat{j}$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \omega \hat{k} \times \rho \hat{j} = -\omega \rho \hat{i}$$

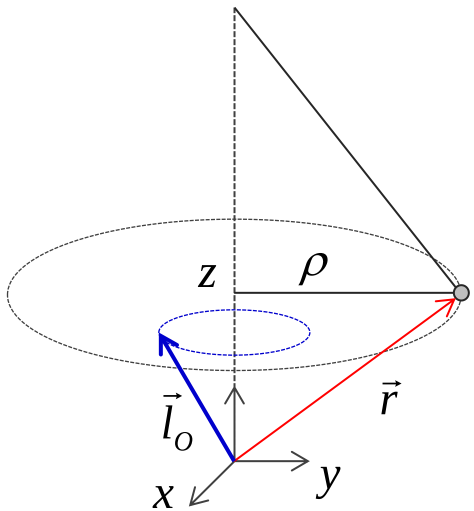
$$\vec{l}_O = \rho \hat{j} \times m(-\omega \rho \hat{i}) = -m\omega \rho^2 (\hat{j} \times \hat{i}) = m\omega \rho^2 \hat{k}$$

hva hvis vi velger et annet punkt (langs z aksen)?

$$\vec{r} = \rho \hat{j} + z\hat{k}$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \omega \hat{k} \times (\rho \hat{j} + z\hat{k}) = -\omega \rho \hat{i} = -v\hat{i}$$

$$\vec{l}_O = \vec{r} \times \vec{p} = (\rho \hat{j} + z\hat{k}) \times m(-\omega \rho \hat{i}) = m\omega \rho^2 \hat{k} - zm\omega \rho \hat{j}$$



spinn har samme z komponent,
men også en komponent i xy-planet

z komponenten $l_{O,z}$ er bevart

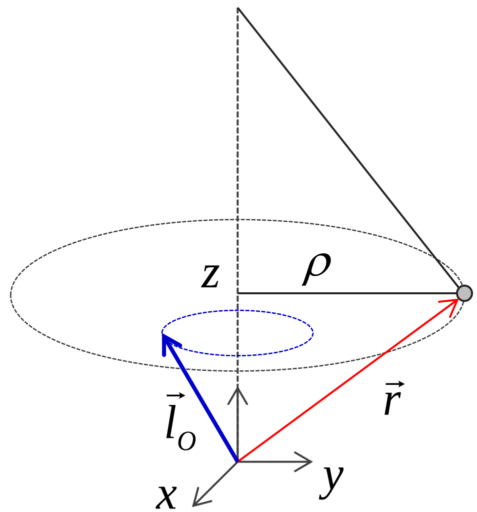
xy komponenten $l_{O,\rho}$ roterer om z aksen

$\vec{l}_O$ forandrer seg over tiden

bare z komponenten $l_{O,z}$ er konstant

det kreves et kraftmoment

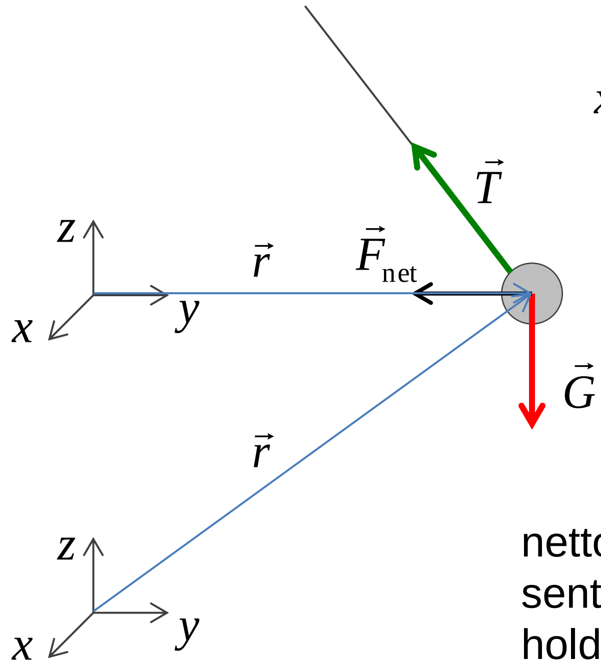
spinnsats: $\vec{\tau}_{\text{net}} = \frac{d}{dt}\vec{l}_O$



O i rotasjonsplanet:

$$\vec{\tau}_{\text{net}} = \vec{r} \times \vec{F}_{\text{net}} = 0$$

$$\vec{l}_O = l_{O,z}\hat{k} \text{ er konstant}$$



O flyttet langs z aksen:

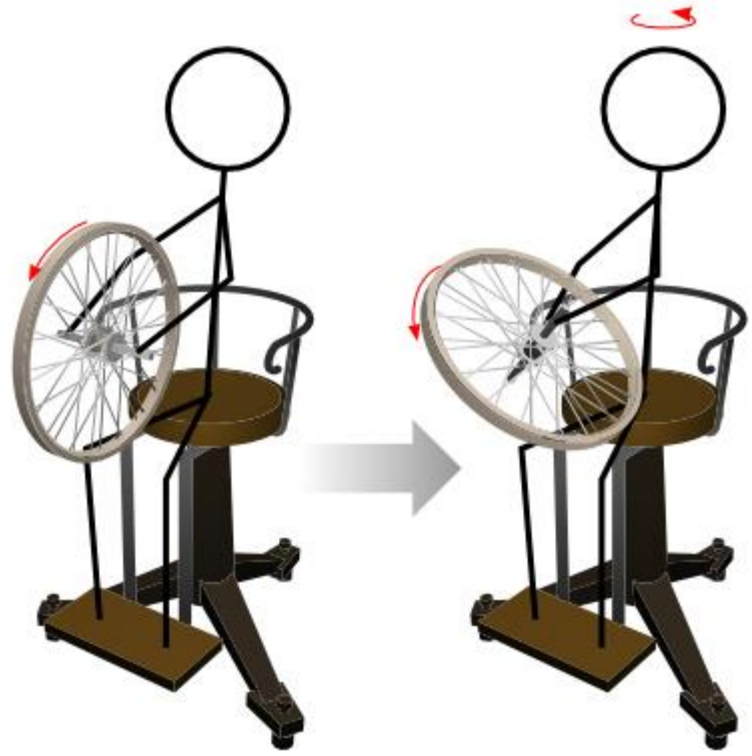
$$\vec{\tau}_{\text{net}} = \vec{r} \times \vec{F}_{\text{net}} = (\rho\,\hat{j} + z\hat{k}) \times (-F\,\hat{j}) = zF\hat{i}$$

$$\Delta\vec{l}_O = \vec{\tau}_{\text{net}}\Delta t$$

forandring av spinn i x retning

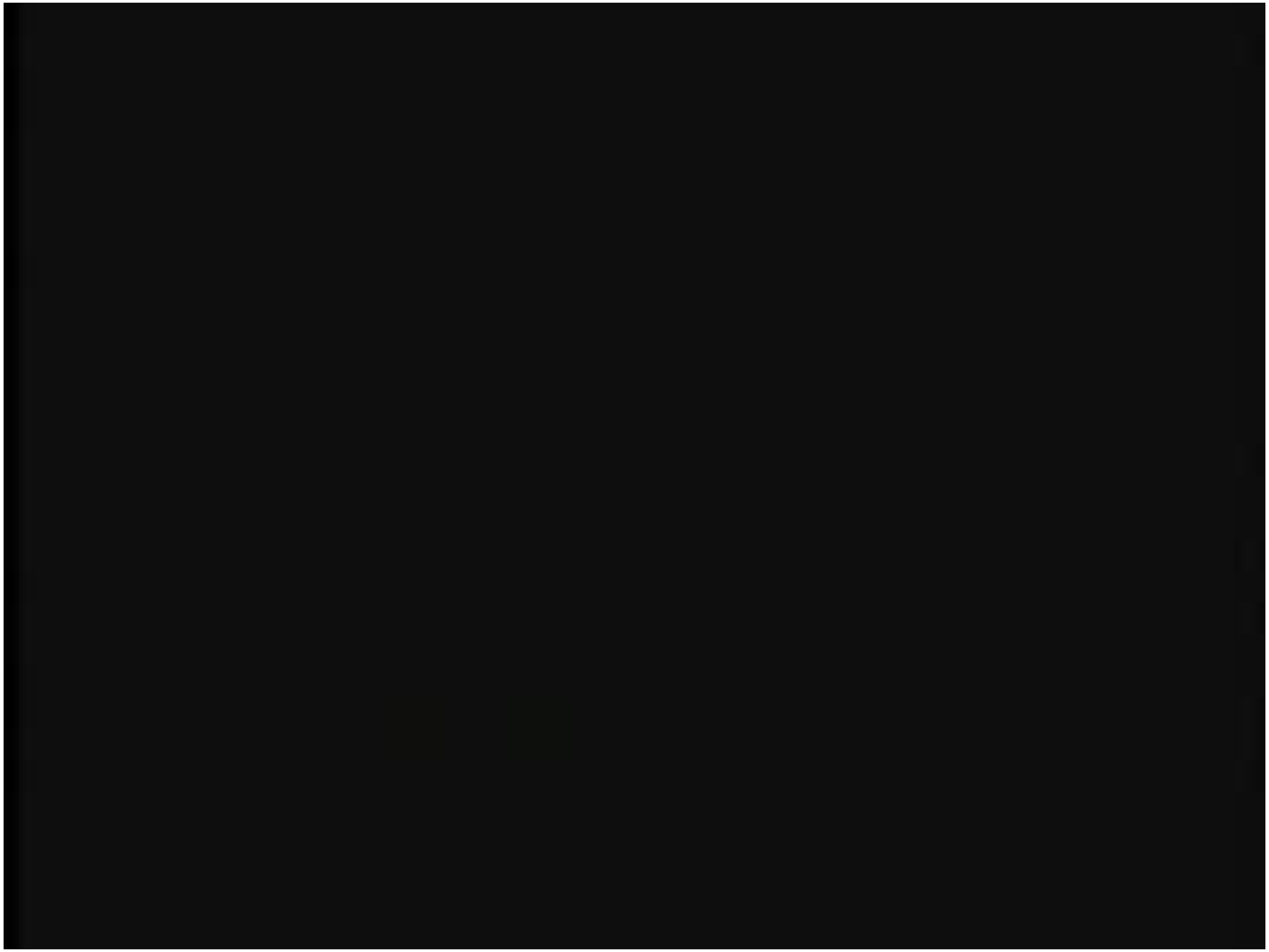
nettokraften er
sentripetalkraft som
holder pendelen
på en sirkelbane

Spinnbevaring



Space shuttle mission STS-54, Endeavour, Jan. 1993

Pilot Donald R. McMonagle



http://www.youtube.com/watch?v=5cHIa8vhvTI