Stivt legemers dynamikk

27.04.2015

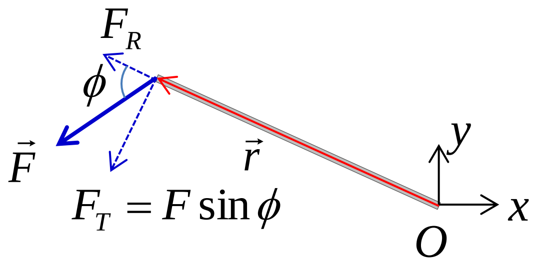
Resultater fra midtveiseksamen på semestersiden.

Eneste krav for å ta slutteksamen: 7 av 10 obliger.

Gruppetime i dag:
Gruppe 5 (Ø394) slås sammen med gruppe 7 på Ø443

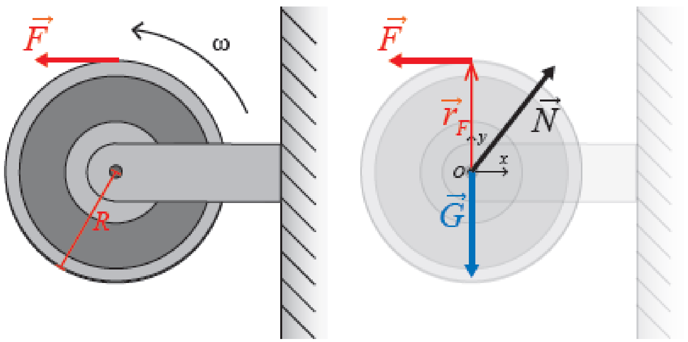
kraftmoment: $\vec{\tau}_O = \vec{r} \times \vec{F}$

$$\left|\vec{\tau}_O\right| = rF\sin\phi$$



N2L for rotasjoner: $\sum \tau_{O,z} = I_z \alpha$

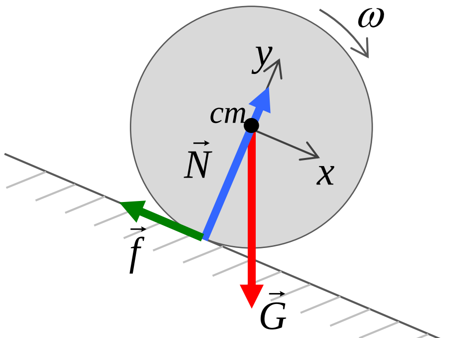
for et stivt legeme med
treghetsmoment I_z



translasjon og rotasjon:

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = M\vec{A}_{cm}$$

$$\sum \tau_z = I_{cm}\alpha$$



rullebetingelse: $V_{cm,x} = -R\omega$

kinetisk energi: $K = \frac{1}{2}MV_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$

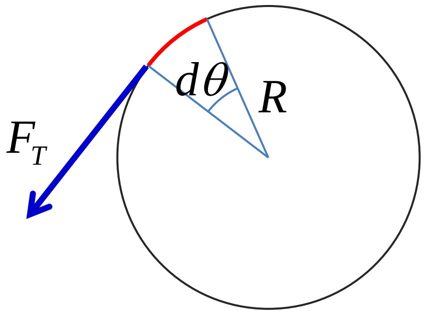
Arbeid:

en kraftmoment som virker på
et stivt legeme gjør arbeid:

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau_z d\theta$$

arbeid-energi teorem:

$$W = \frac{1}{2} I_z \omega_2^2 - \frac{1}{2} I_z \omega_1^2$$

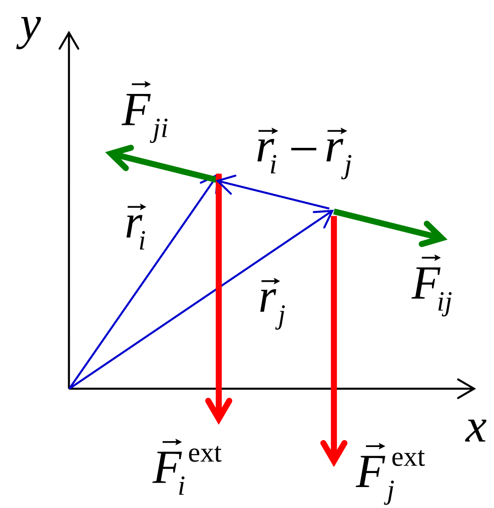


Spinn for flerpartikkelsystemer

$$\vec{L}_O = \sum_i \vec{l}_{O,i} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_O = \sum_i \frac{d\vec{l}_{O,i}}{dt} = \sum_i \vec{\tau}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_i \vec{r}_i \times (\vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{j\neq i} \vec{F}_{ji})$$

$\vec{F}_{ji}$ indre kraft fra partikkel j på partikkel i



kraftmoment fra indre krefter:

$$\sum_i \vec{r}_i \times \sum_{j\neq i} \vec{F}_{ji} = \sum_i \sum_{j<i} (\vec{r}_i \times \vec{F}_{ji} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ij})$$

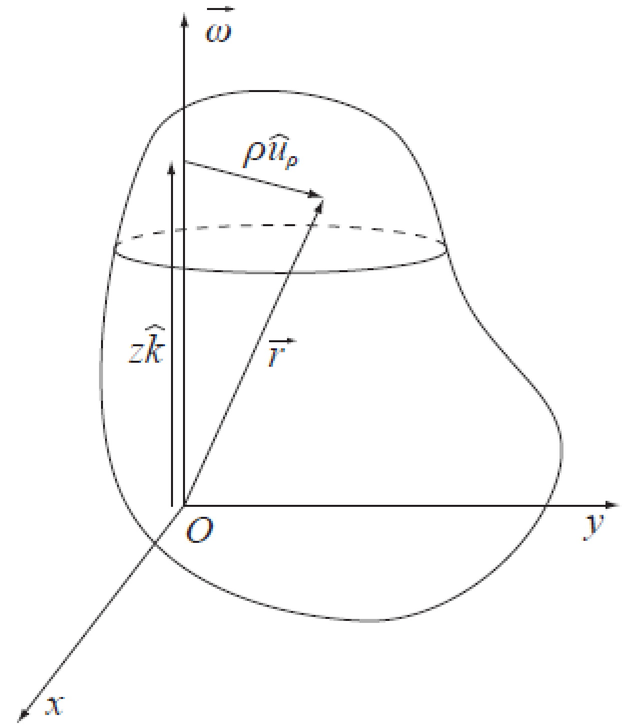
N3L: $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$

$$= \sum_i \sum_{j<i} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ji} = \vec{0}$$

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_O = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\text{ext}} = \vec{\tau}_O^{\text{ext}}$$

spinnsats for flerpartikkelsystemer

Spinn til et stivt legeme



for en massepunkt i et stivt legeme:

$$\vec{r}_i = \vec{\rho}_i + z_i \hat{k} \qquad \vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

$$\vec{v}_i = \omega \hat{k} \times (\vec{\rho}_i + z_i \hat{k}) = \vec{\omega} \times \vec{\rho}_i$$

$$\vec{l}_{O,i} = \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \;= m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_i)$$

$$= m_i \left(\vec{\omega} (\vec{r}_i \cdot \vec{\rho}_i) - \vec{\rho}_i (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega}) \right)$$

$$= m_i \omega \hat{k} \left((\vec{\rho}_i + z_i \hat{k}) \cdot \vec{\rho}_i \right) - m_i \vec{\rho}_i \left((\vec{\rho}_i + z_i \hat{k}) \cdot \omega \hat{k} \right)$$

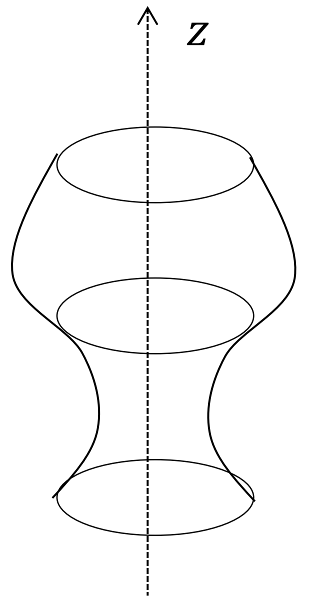
$$= \vec{\omega} m_i \rho_i^2 - \omega m_i \vec{\rho}_i z_i$$

for hele legemet: $\vec{L}_O = \sum_i \vec{l}_{O,i} = \vec{\omega} \sum_i m_i \rho_i^2 - \omega \sum_i m_i \vec{\rho}_i z_i$

$$= \vec{\omega} I_z - \omega \sum_i m_i \vec{\rho}_i z_i$$

$\vec{L}_O$ og $\vec{\omega}$ er generelt ikke parallelle. z komponent: $L_{O,z} = I_z \omega$

spinn til et stive legeme: $\vec{L}_O = \vec{\omega} I_z - \omega \sum_i m_i \vec{\rho}_i z_i$



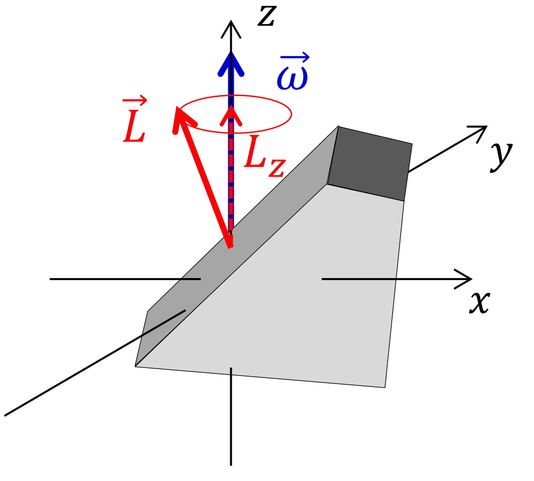
spesialfall: et rotasjonssymmetrisk legeme roterer om symmetriaksen

for hver skive på høyden z er: $\sum_i m_i \vec{\rho}_i = \vec{0}$

massesenteret til skiven ligger på z aksen

$\vec{L}_O = \vec{\omega} I_z$ spinn er parallell med rotasjonsaksen

generelt: $\vec{L}$ og $\vec{\omega}$ er ikke parallelle

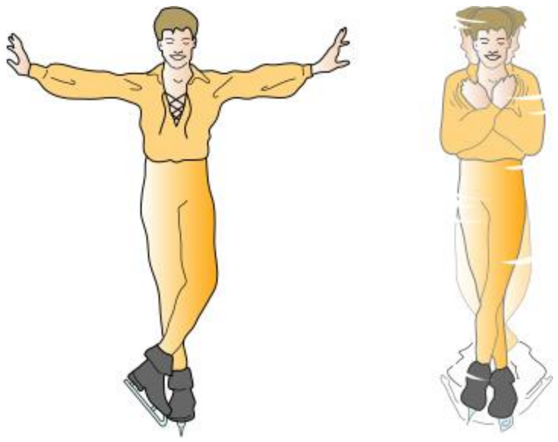


z komponent: $L_{O,z} = I_z \omega$

kraftmoment: $\tau_{O,z} = \frac{d}{dt} L_{O,z} = \frac{d}{dt}(I_{O,z}\omega) = I_{O,z}\alpha$

Newtons andre lov for rotasjoner

En kunstløper som roterer med vinkelhastighet ω_0 trekker armene inntil seg og halverer sitt treghetsmoment: $I_1 = \frac{1}{2} I_0$.
Etterpå er vinkelhastigheten:



A. $\omega_1 = \frac{1}{4}\omega_0$

B. $\omega_1 = \frac{1}{2}\omega_0$

C. $\omega_1 = \omega_0$

D. $\omega_1 = 2\omega_0$

E. $\omega_1 = 4\omega_0$

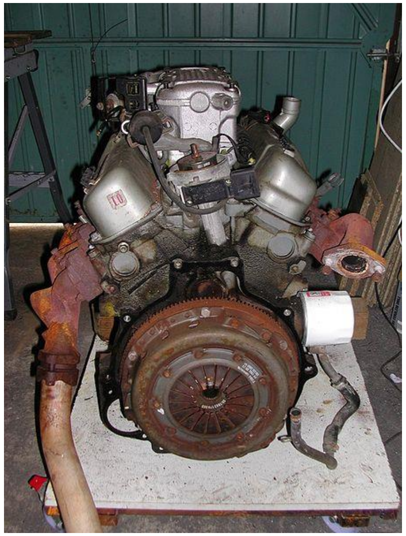
å trekke inn armene
$\Rightarrow$ ingen kraftmoment
$\Rightarrow$ spinn er bevart

$$L_{O,z}(0) = L_{O,z}(1)$$

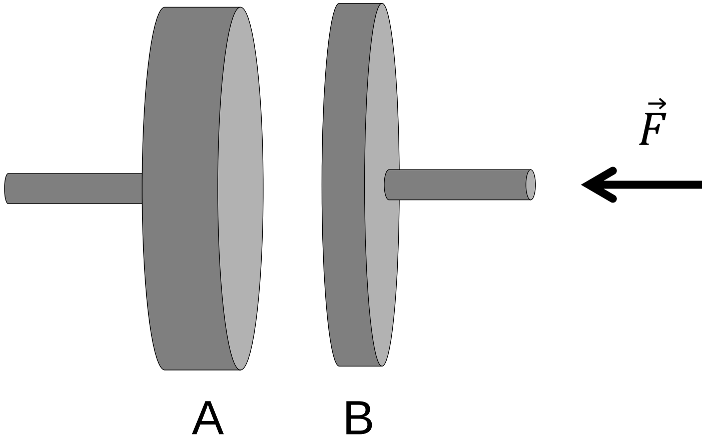
$$I_0\omega_0 = I_1\omega_1$$

$$\omega_1 = \frac{I_0}{I_1}\omega_0 = 2\omega_0$$

I en clutch presses et svinghjul A og en clutchplate B sammen med en kraft $\vec{F}$. Før skivene er i kontakt roterer svinghjulet med vinkelhastighet ω_A og clutchen med ω_B. Etterhvert roterer begge sammen som ett med vinkelhastighet ω. I prosessen er:



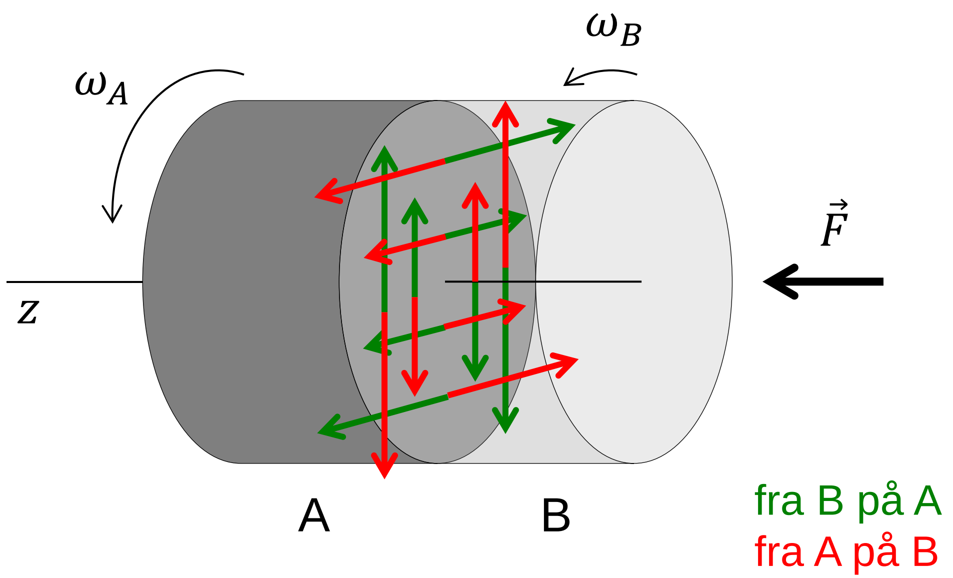
A. Både spinn og energi er bevart.
B. Energi er bevart men ikke spinn.
C. Spinn er bevart men ikke energi.
D. Hverken spinn eller energi er bevart.



skivene presses sammen

- friksjon
- ikke konservative krefter
- energi er ikke bevart

mekanisk energi $\rightarrow$ varme



friksjonskreftene

- indre krefter i system A+B
- gir ingen netto kraftmoment

ytre kraft $\vec{F}$

- virker langs rotasjonsaksen
- gir ingen kraftmoment

$$\tau_z = \frac{d}{dt} L_z = 0$$

spinn er bevart

spinn før sammenkobling: $I_A \omega_A + I_B \omega_B$

spinn etter sammenkobling: $(I_A + I_B)\omega$

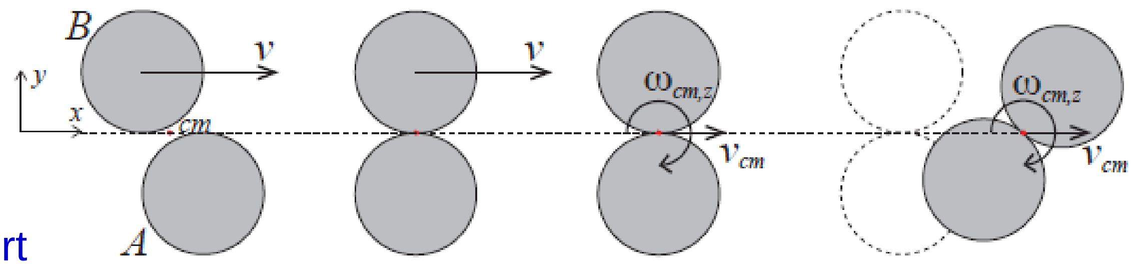
$$\omega = \frac{I_A \omega_A + I_B \omega_B}{I_A + I_B}$$

analog til en fullstendig uelastisk kollisjon

- bevegelsesmengde er bevart
- energi er ikke bevart

Eksempel: Kollisjon mellom to atomer

To atomer med masse m og radius R kolliderer. Før kollisjonen er atom A i ro, mens atom B beveger seg med hastighet v. Etter kollisjonen henger atomene sammen. Vi ser bort fra gravitasjon og luftmotstand.



ingen ytre krefter
$\Rightarrow$ bevegelsesmengde er bevart $\quad \vec{F}_{\text{net}} = \frac{d}{dt}\vec{P} = \vec{0}$

massesenter $\vec{R}$ beveger seg med konstant hastighet $\vec{V}$

$$\vec{r}_A = \vec{R} + \vec{r}_{A,cm} \qquad \vec{r}_B = \vec{R} + \vec{r}_{B,cm} \qquad \vec{R} = \frac{1}{2m}(m\vec{r}_A + m\vec{r}_B) = \frac{1}{2}(\vec{r}_A + \vec{r}_B)$$

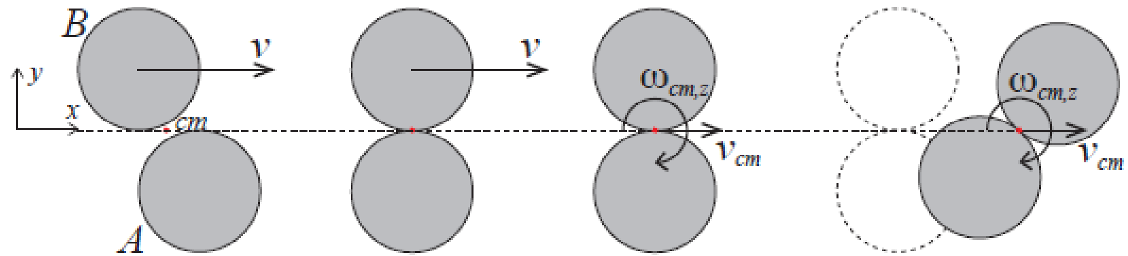
$$\vec{v}_A = \vec{V} + \vec{v}_{A,cm} = \vec{0} \qquad \vec{v}_B = \vec{V} + \vec{v}_{B,cm} = v\hat{i} \qquad \vec{V} = \frac{1}{2}(\vec{v}_A + \vec{v}_B) = \frac{1}{2}v\hat{i}$$

$$\vec{v}_{A,cm} = -\vec{V} = -\frac{1}{2}v\hat{i} \qquad \vec{v}_{B,cm} = \vec{v}_B - \vec{V} = v\hat{i} - \frac{1}{2}v\hat{i} = \frac{1}{2}v\hat{i}$$

Eksempel: Kollisjon mellom to atomer

ingen ytre krefter
$\Rightarrow$ ingen kraftmomenter
$\Rightarrow$ spinn er bevart

$$\vec{\tau}_{\text{net}} = \frac{d}{dt}\vec{L} = \vec{0}$$



spinn om massesenteret rett før kollisjonen:

$$\vec{L}_{A,cm} = \vec{r}_{A,cm} \times m\vec{v}_{A,cm} = -R\hat{j} \times (-\frac{1}{2}mv\hat{i}) = -\frac{1}{2}mRv\hat{k}$$

$$\vec{L}_{B,cm} = \vec{r}_{B,cm} \times m\vec{v}_{B,cm} = R\hat{j} \times \frac{1}{2}mv\hat{i} = -\frac{1}{2}mRv\hat{k}$$

$$\vec{L}_{cm} = \vec{L}_{A,cm} + \vec{L}_{B,cm} = -mRv\hat{k}$$

etter kollisjonen roterer hele systemet med vinkelhastighet ω om massesenteret $L_{cm,z} = I_{cm}\omega$

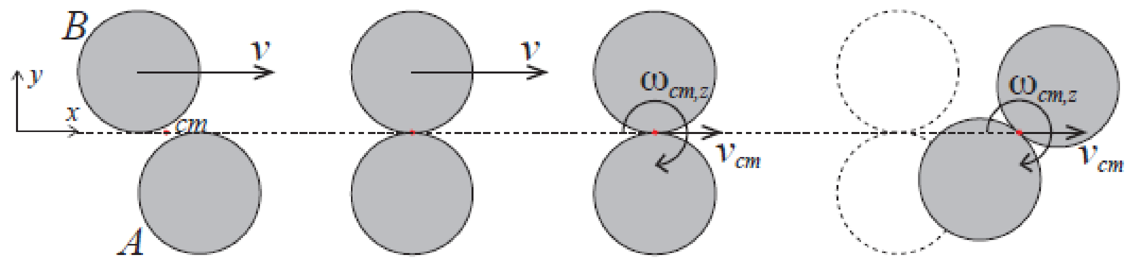
treghetsmoment: $I_{cm} = 2(\frac{2}{5}mR^2 + mR^2) = \frac{14}{5}mR^2$

$$\omega = \frac{L_{cm,z}}{I_{cm}} = -\frac{mRv}{\frac{14}{5}mR^2} = -\frac{5}{14}\frac{v}{R}$$

http://pingo.upb.de/ access number: 8178

Er den kinetiske energien bevart?

1. ja
2. nei
3. vet ikke



kinetisk energi før kollisjonen: $K_0 = \frac{1}{2}mv^2$

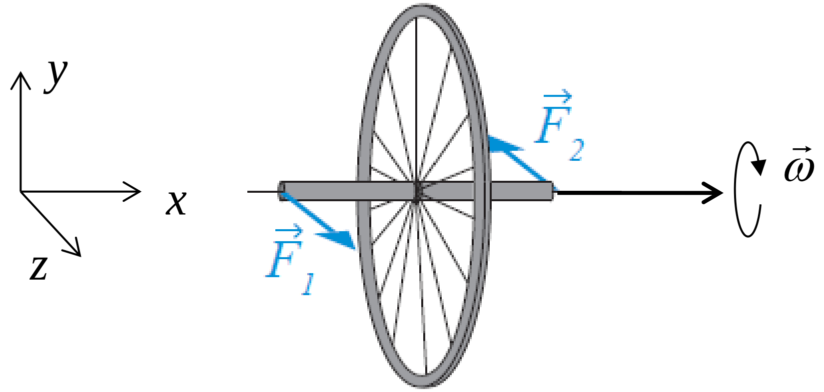
etter kollisjonen: $K_1 = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$

$$= \frac{1}{2}2m(\frac{v}{2})^2 + \frac{1}{2}\frac{14}{5}mR^2(\frac{5}{14}\frac{v}{R})^2$$

$$= \frac{1}{4}mv^2 + \frac{1}{2}\frac{5}{14}mv^2 = \frac{3}{7}mv^2$$

$K_1 < K_0$ kollisjonen er uelastisk ikke konservative indre krefter

Endring av spinnakse



hjulet roterer om x aksen: $\vec{L} = I_x \omega \hat{i}$

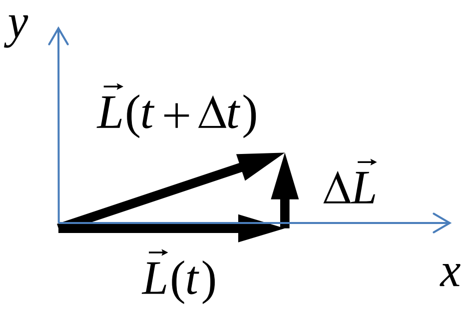
origo i massesenteret
kreftene angriper i avstand *x*

kraftmoment: $\vec{\tau} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = -x\hat{i} \times F\hat{k} + x\hat{i} \times (-F\hat{k}) = 2xF\,\hat{j}$

spinnsats: $\vec{\tau} = \frac{d}{dt}\vec{L}$

over et tidsintervall Δt: $\vec{L}(t+\Delta t) = \vec{L}(t) + \vec{\tau}\Delta t = I_x \omega \hat{i} + 2xF\,\Delta t\,\hat{j}$

kreftene virker i $\pm z$ retning
spinnet reagerer i y retning



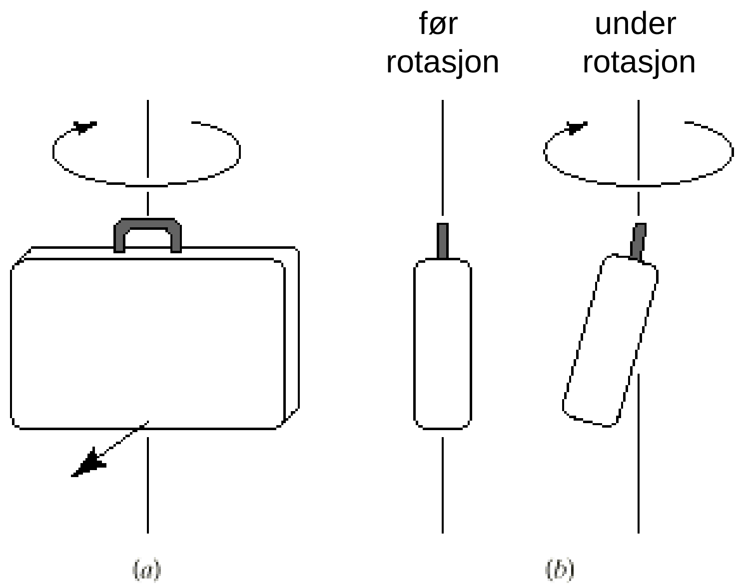
Eksempel: svinghjul i en koffert

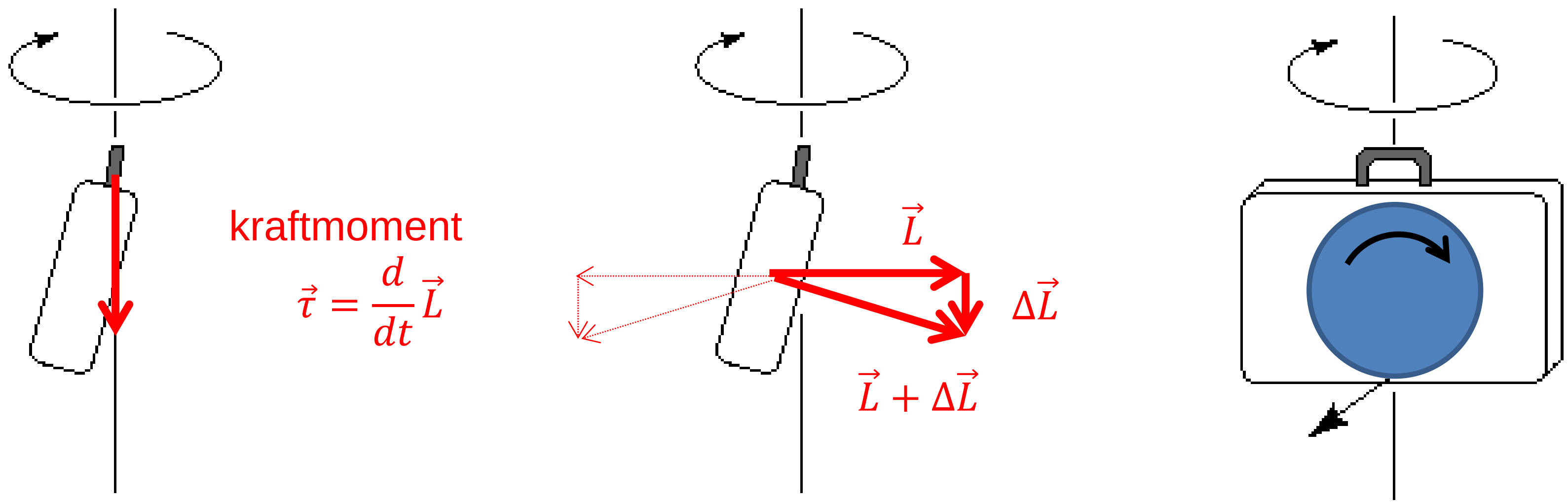
I hvilken retning roterer hjulet?

http://pingo.upb.de/ access number: 8178

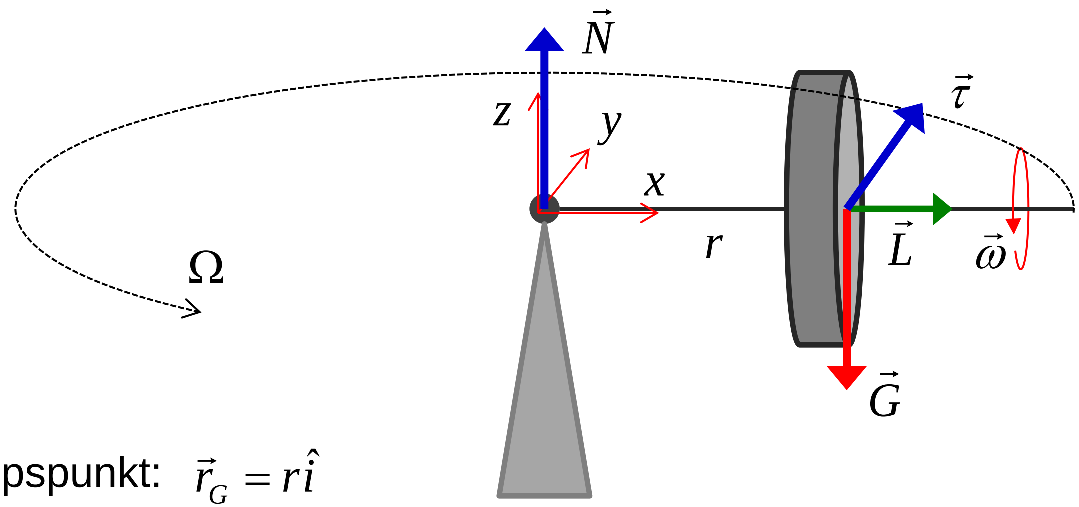
Et svinghjul roterer om en horisontal akse i en koffert. Mens du roterer kofferten om en vertikal akse beveger bunnen seg oppover som vist i figuren. Sett fra siden som i (a), roterer hjulet:

1. med klokken
2. mot klokken
3. vet ikke





Eksempel: Gyroskop



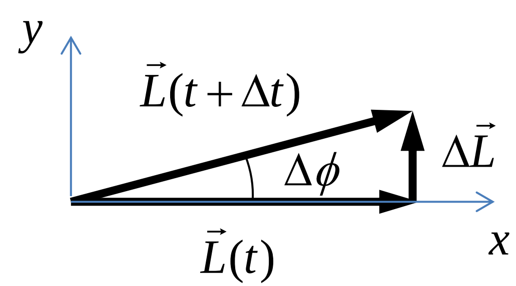
spinn i x retning: $\vec{L} = I\vec{\omega}$

normalkraft virker i origo O
$\Rightarrow$ ingen kraftmoment om O

gravitasjon: $\vec{G} = -mg\hat{k}$ angrepspunkt: $\vec{r}_G = r\hat{i}$

kraftmoment: $\vec{\tau} = \vec{r}_G \times \vec{G} = r\hat{i} \times (-mg\hat{k}) = rmg\,\hat{j}$

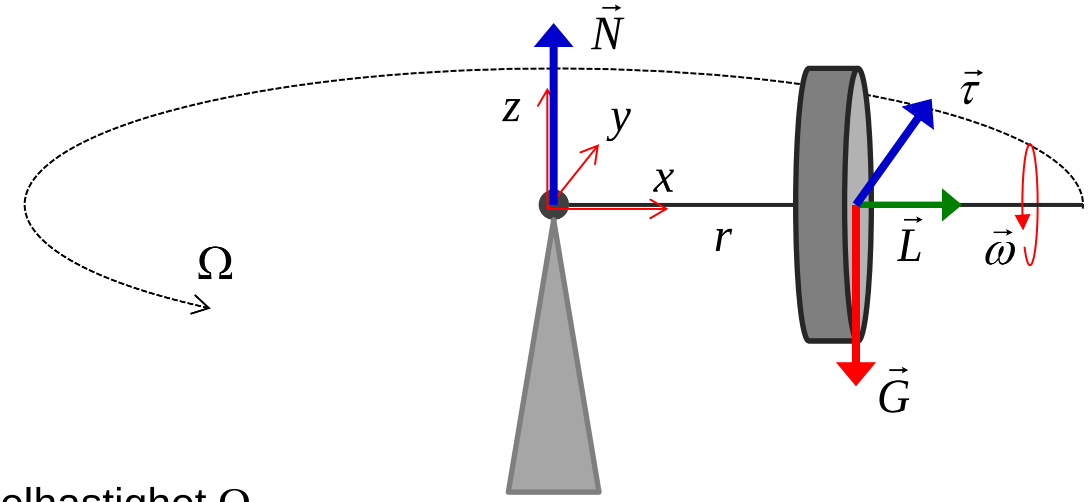
spinnsats: $\vec{\tau} = \frac{d}{dt}\vec{L}$ $\Delta\vec{L} = \vec{L}(t+\Delta t) - \vec{L}(t) = \vec{\tau}\,\Delta t$



spinnaksen dreier i horisontalplanet om z aksen

$\Rightarrow$ presesjon om z aksen med vinkelhastighet Ω

Eksempel: Gyroskop

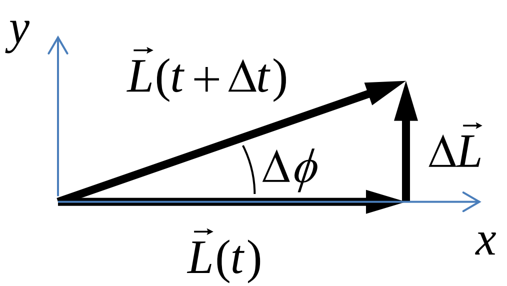


spinn i x retning: $\vec{L} = I\vec{\omega}$

kraftmoment: $\vec{\tau} = \dfrac{\Delta\vec{L}}{\Delta t} = rmg\,\hat{j}$

$\Rightarrow$ presesjon om z aksen med vinkelhastighet Ω

$$\Omega = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}\frac{\left|\Delta\vec{L}\right|}{\left|\vec{L}\right|} = \frac{\left|\vec{\tau}\right|}{\left|\vec{L}\right|} = \frac{rmg}{I\omega}$$



Ω øker når ω blir mindre på grunn av friksjon