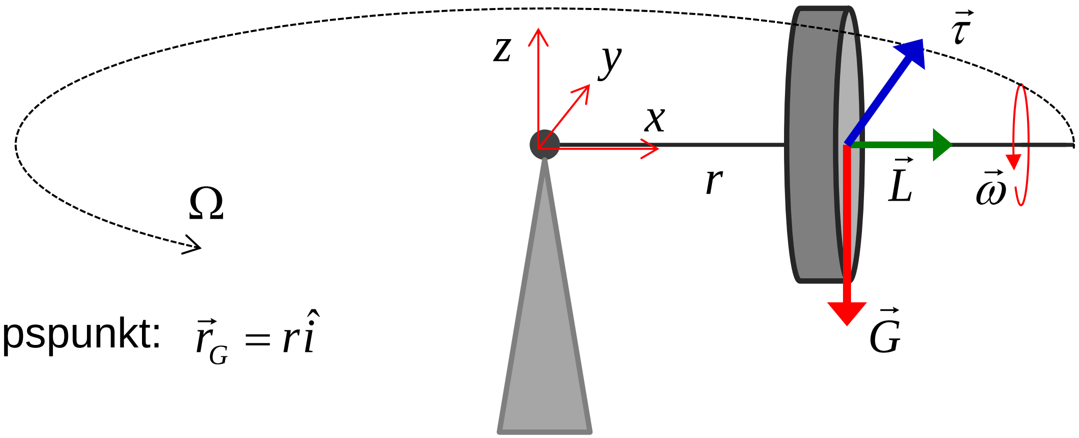
Fiktive krefter

29.04.2015

Eksempel: Gyroskop

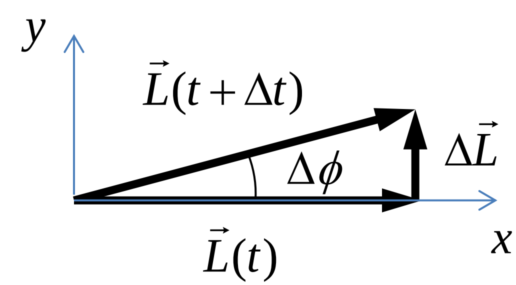


spinn i x retning: $\vec{L} = I\vec{\omega}$

gravitasjon: $\vec{G} = -mg\hat{k}$ angrepspunkt: $\vec{r}_G = r\hat{i}$

kraftmoment: $\vec{\tau} = \vec{r}_G \times \vec{G} = r\hat{i} \times (-mg\hat{k}) = rmg\,\hat{j}$

spinnsats: $\vec{\tau} = \frac{d}{dt}\vec{L}$



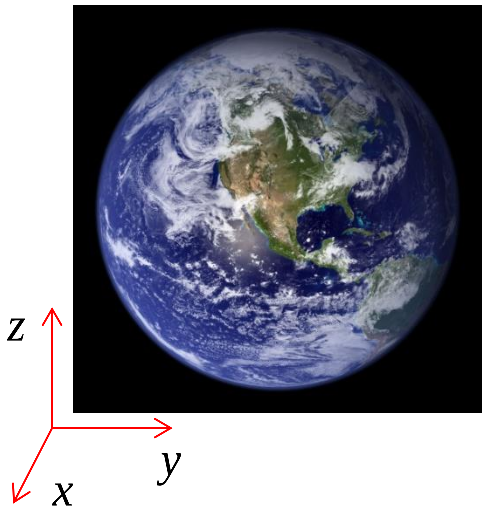
$\Rightarrow$ presesjon om z aksen med vinkelhastighet Ω

$$\Omega = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}\frac{|\Delta\vec{L}|}{|\vec{L}|} = \frac{|\vec{\tau}|}{|\vec{L}|} = \frac{rmg}{I\omega}$$

Fiktive krefter

problem: Newtons lover gjelder bare i inertialsystemer

hvordan analyserer vi en bevegelse i et akselerert system?



?

transformasjon

transformasjon

bruk Newtons lover

upraktisk å bruke et inertialsystem for å beskrive pendelen på FI (eller skyene i atmosfæren)

vi kan bruke akselererte referansesystemer, men det oppstår fiktive krefter

http://pingo.upb.de/ access number: 8178

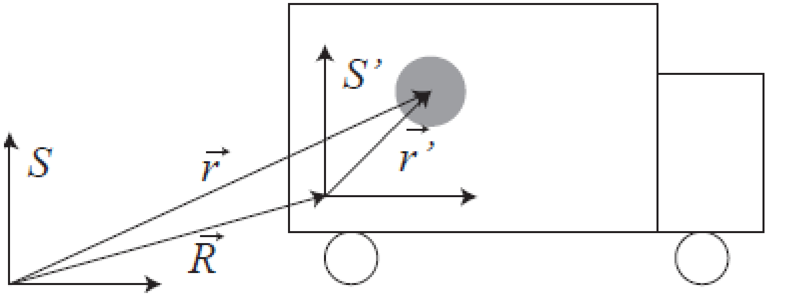
Du sitter på en buss som svinger til høyre og bremser. Du føler en kraft som er rettet:

1. Bakover og mot venstre
2. Bakover og mot høyre
3. Fremover og mot venstre
4. Fremover og mot høyre
5. Du føler ingen kraft

Eksempel: du sitter i en bil som bremser

koordinatsystem S: festet til gaten

koordinatsystem S': festet til bilen



$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}\,'$$

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}\,'$$

$$\vec{a} = \vec{A} + \vec{a}\,'$$

$\vec{v}$ din hastighet mot gaten

$\vec{v}\,'$ din hastighet mot bilen

$\vec{V}$ hastighet til bilen

er system S et inertialsystem?

egentlig ikke på grunn av jordens rotasjon,
men i dette tilfelle er effektene neglisjerbar

vi kan bruke Newtons lover i system S

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad = m\vec{A} + m\vec{a}\,'$$

$$m\vec{a}\,' = \sum \vec{F} - m\vec{A} = \sum \vec{F} + \vec{F}_A$$

hvis vi introdusere den fiktive kraften $\vec{F}_A = -m\vec{A}$

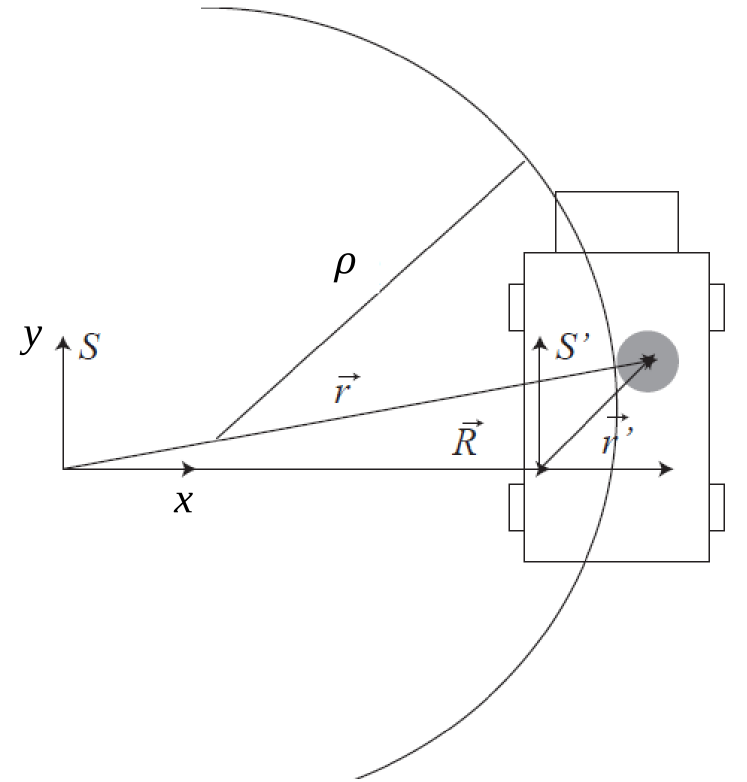
så kan vi bruke Newtons andre lov også i systemet S'

Bilen kjører rund en sving

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}'$$

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}'$$

$$\vec{a} = \vec{A} + \vec{a}'$$



akselerasjon til bilen som kjører med konstant hastighet v i en kurve med radius ρ:

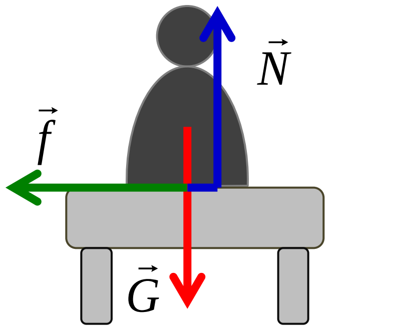
$$\vec{A} = -\frac{v^2}{\rho}\hat{u}_r$$ sentripetalakselerasjon

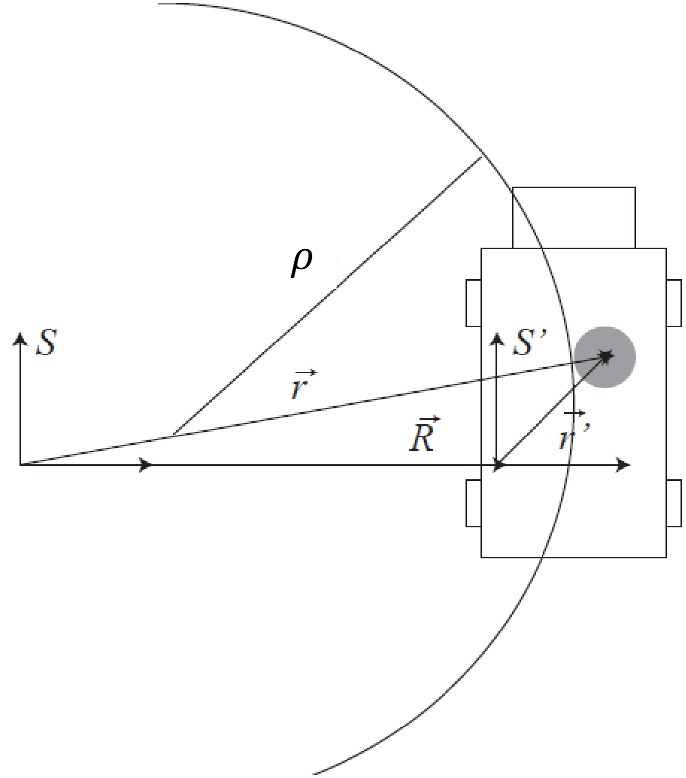
i system S': $m\vec{a}' = m\vec{a} - m\vec{A} = \sum \vec{F} + m\frac{v^2}{\rho}\hat{u}_r$

passasjeren føler en fiktiv kraft $\vec{F}_A = +m\frac{v^2}{\rho}\hat{u}_r$

sentrifugalkraft

fri legeme
diagram
i system S

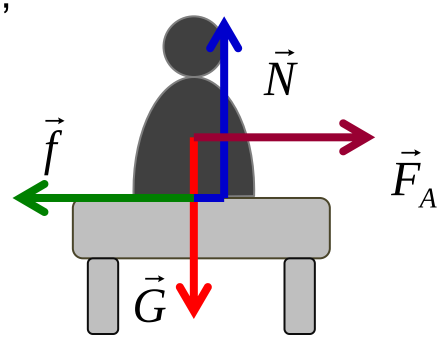




(bilen er en del av omgivelsen)

friksjonskreftene mellom passasjer
og sete fungerer som sentripetalkraft,
passasjer beveger seg i en sirkelbane

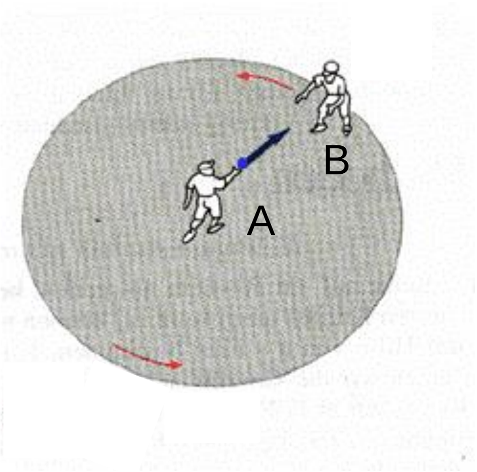
fri legeme
diagram
i system S’



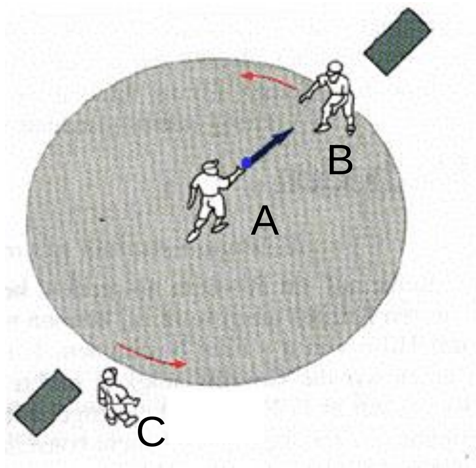
normalkraft og gravitasjon kompenserer hverandre
sentrifugalkraft og friksjon mellom kroppen og setet
kompenserer hverandre
$\Rightarrow$ passasjer sitter i ro

det kan være et kraftmoment på grunn av
sentrifugalkraften

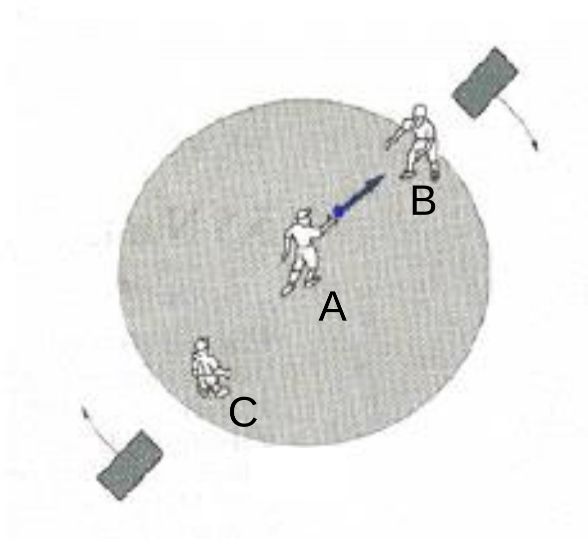
To personer står på en skive som roterer som vist i figuren.
Person A kaster en ball mot person B.
Fra A's perspektiv

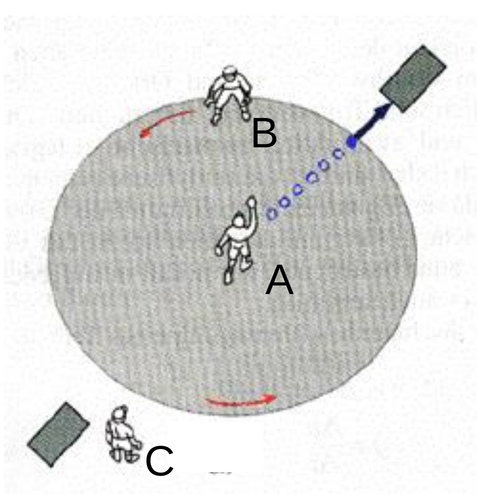


1. går ballen forbi B på venstre
2. treffer ballen B
3. gar ballen forbi B på høyre

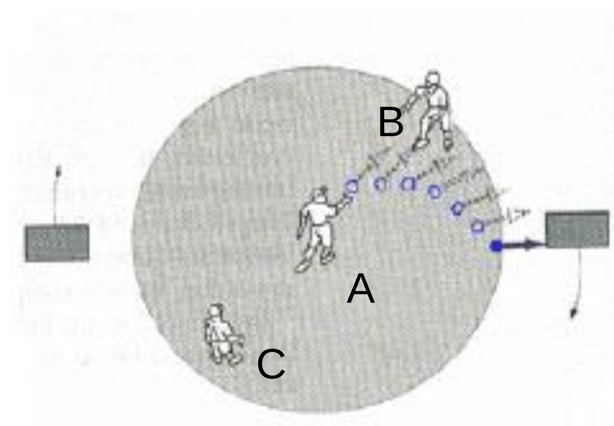


person A kaster en
ball mot person B
mens person C
observerer



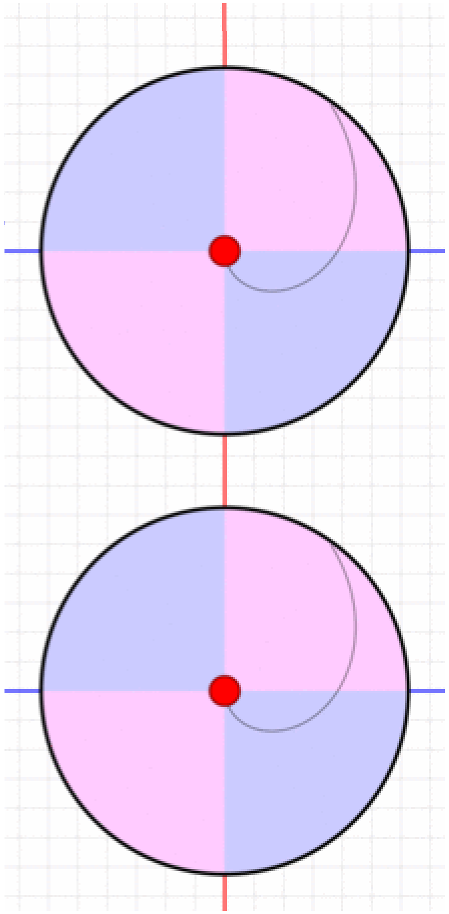


han bommer fordi person B
har dreiet seg ut av skuddlinjen
mens ballen beveger seg mot ham



han bommer fordi en
mysteriøst kraft har
avledet ballen

Corioliskraft



sett utenfra beveger ballen
seg på en rett linje

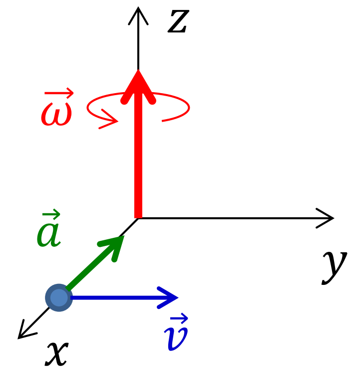
i det roterende referansesystem
virker en fiktiv kraft som avleder ballen:
Corioliskraft

Corioliskraft

Harvard Natural Sciences Lecture Demonstrations

http://www.youtube.com/watch?v=7TjOy56-x8Q

Roterende referansesystemer



eksempel: punkt i ro $\qquad \vec{r} = r\hat{\imath}$

systemet roterer med ω om z aksen

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \omega\hat{k} \times r\hat{\imath} = \omega r\hat{\jmath}$$

$$\vec{a} = \vec{\omega} \times \vec{v} = \omega\hat{k} \times \omega r\hat{\jmath} = -\omega^2 r\hat{\imath} = -\frac{v^2}{r}\hat{\imath}$$

sentripetalakselerasjon

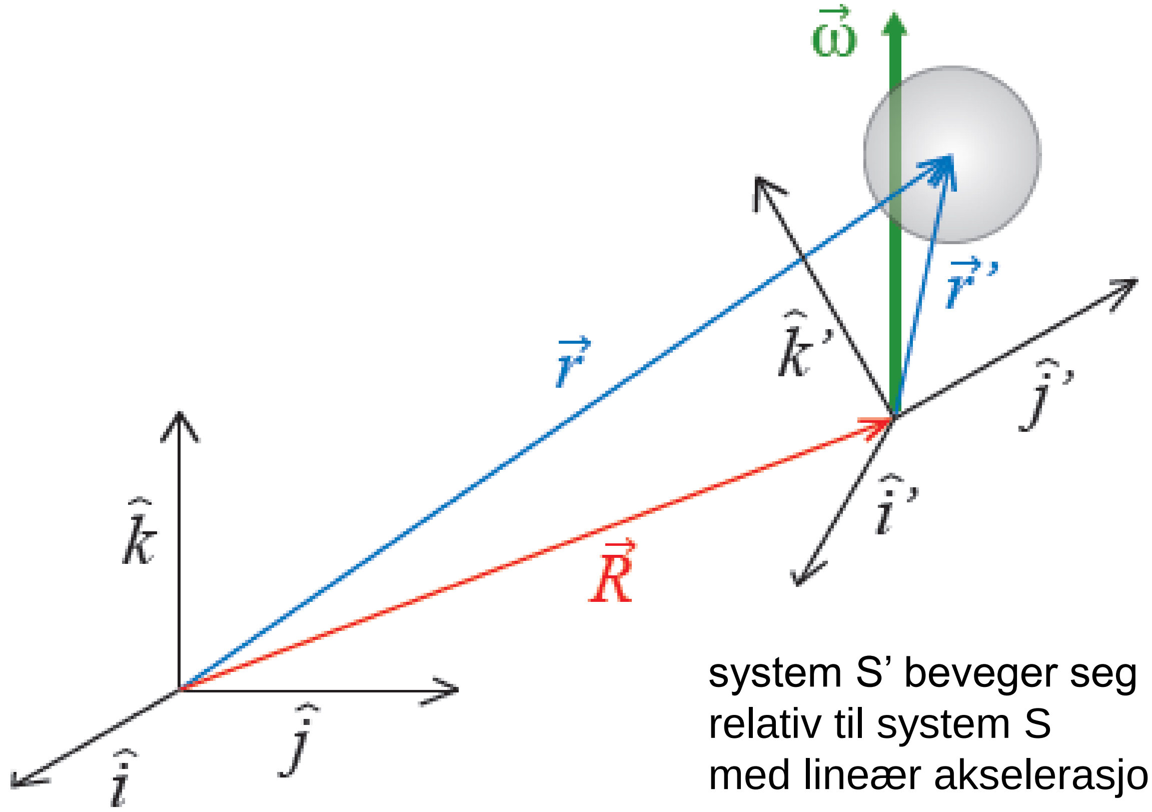
system S i ro, system S' roterer med ω

$$\vec{r}' = x'\hat{\imath}' + y'\hat{\jmath}' + z'\hat{k}'$$

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \dot{x}'\hat{\imath}' + \dot{y}'\hat{\jmath}' + \dot{z}'\hat{k}' + x'\dot{\hat{\imath}}' + y'\dot{\hat{\jmath}}' + z'\dot{\hat{k}}' = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

$$\frac{d\vec{v}'}{dt} = \ddot{x}'\hat{\imath}' + \ddot{y}'\hat{\jmath}' + \ddot{z}'\hat{k}' + \dot{x}'\dot{\hat{\imath}}' + \dot{y}'\dot{\hat{\jmath}}' + \dot{z}'\dot{\hat{k}}' = \vec{a}' + \vec{\omega} \times \vec{v}'$$

Akselererte koordinatsystemer

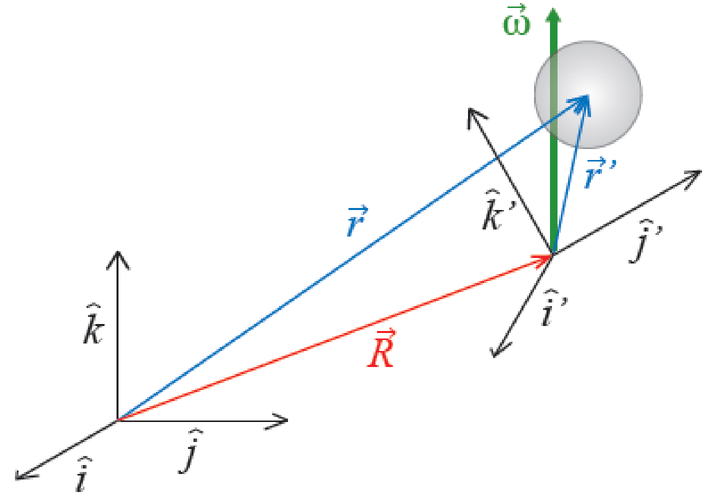


system S' beveger seg relativ til system S med lineær akselerasjon $\vec{A} = \frac{d^2R}{dt^2}$

system S er et inertialsystem

system S' roterer om en vilkårlig akse med vinkelakselerasjon $\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$

Akselererte referansesystemer



$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}'$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{R}}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{V} + \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{V}}{dt} + \frac{d\vec{v}'}{dt} + \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}')$$

$$= \vec{A} + \vec{a}' + (\vec{\omega} \times \vec{v}') + \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}'\right) + \left(\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}'}{dt}\right)$$

$$= \vec{A} + \vec{a}' + (\vec{\omega} \times \vec{v}') + (\vec{\alpha} \times \vec{r}') + \left(\vec{\omega} \times (\vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}')\right)$$

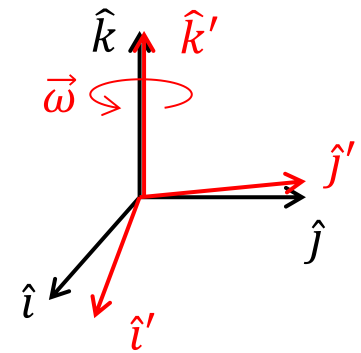
$$= \vec{A} + \vec{a}' + 2(\vec{\omega} \times \vec{v}') + (\vec{\alpha} \times \vec{r}') + \left(\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')\right)$$

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{A} - (\vec{\alpha} \times \vec{r}') - 2(\vec{\omega} \times \vec{v}') - \left(\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')\right)$$

Coriolis-
akselerasjon

Sentrifugal-
akselerasjon

Akselererte referansesystemer



$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{A} - (\vec{\alpha} \times \vec{r}') - 2(\vec{\omega} \times \vec{v}') - \left(\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')\right)$$

Coriolis-akselerasjon　　Sentrifugal-akselerasjon

for et jevnt roterende koordinatsystem: $\vec{A} = \vec{0}$, $\vec{\alpha} = \vec{0}$

$$m\vec{a}' = m\vec{a} - 2m(\vec{\omega} \times \vec{v}') - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') = \sum \vec{F}_{ext} + \vec{F}_C + \vec{F}_S$$

Corioliskraft: $\vec{F}_C = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}'$

er hastighetsavhengig

virker på en masse som **beveger** seg i et roterende referansesystem

$\vec{F}_C \perp \vec{\omega}$　　$\vec{F}_C \perp \vec{v}'$

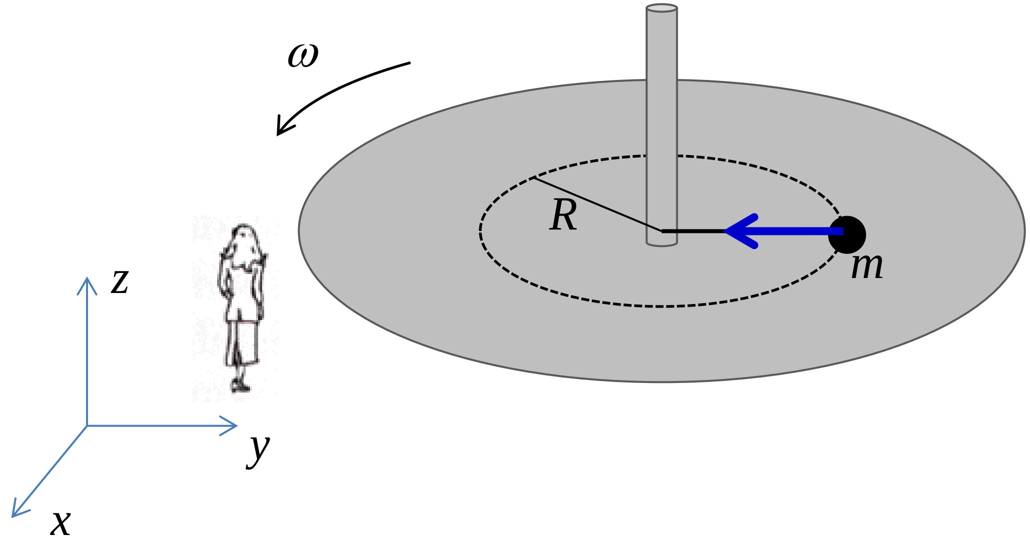
$\vec{F}_C = \vec{0}$ hvis $\vec{v}' \parallel \vec{\omega}$

Sentrifugalkraft: $\vec{F}_S = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$

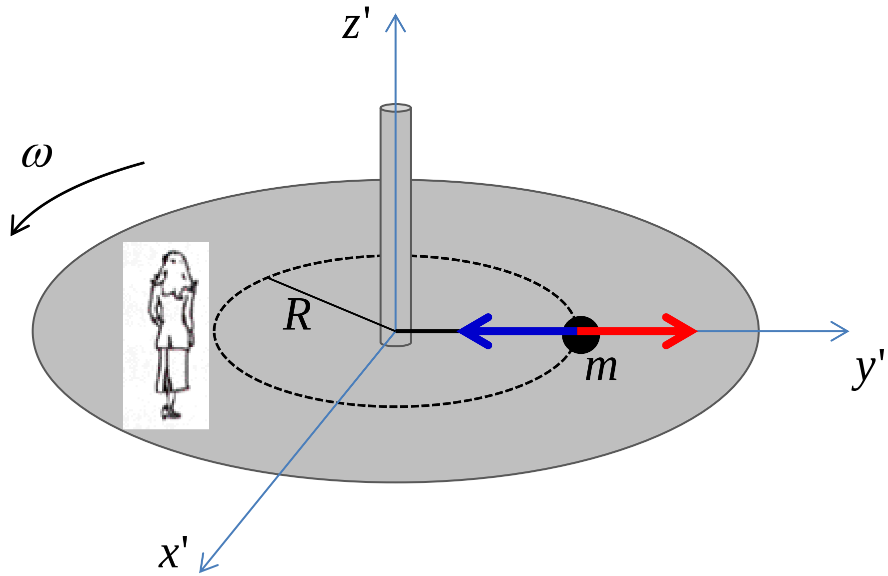
er posisjonsavhengig
(avstand fra rotasjonsaksen)

Sentrifugalkraft

sentripetalkraften holder massen på sirkelbanen



en observatør i det roterende system ser massen i ro
sentripetalkraften virker som motkraft til sentrifugalkraften



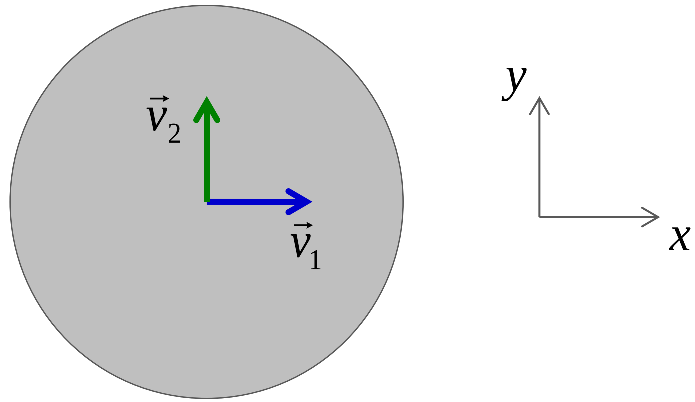
$$\vec{F}_S = -m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}\,')$$
$$= -m\omega\hat{k}'\times(\omega\hat{k}'\times R\,\hat{j}')$$
$$= -m\omega^2 R\,\hat{k}'\times(-\hat{i}\,')$$
$$= m\omega^2 R\,\hat{j}'$$

Corioliskraft

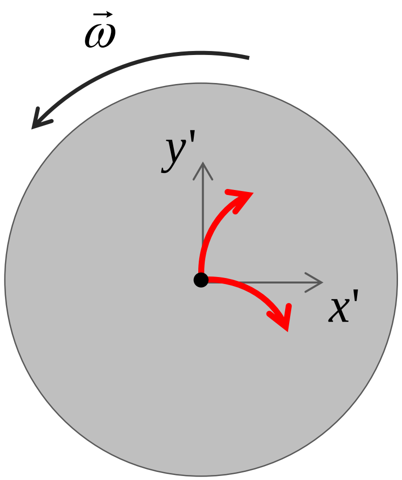
to masser beveger seg på en plate

$$\vec{v}_1 = \vec{v}\,\hat{i}$$

$$\vec{v}_2 = \vec{v}\,\hat{j}$$



rotasjon om z aksen: $\vec{\omega} = \omega\hat{k}$



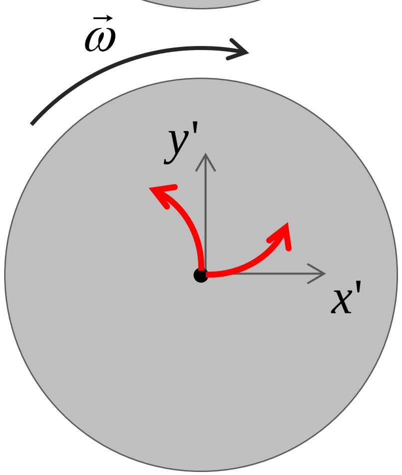
$$\vec{F}_{C,1} = -2m\vec{\omega}\times\vec{v}_1'$$

$$= -2m\omega v\,\hat{k}'\times\hat{i}'$$

$$= -2m\omega v\,\hat{j}'$$

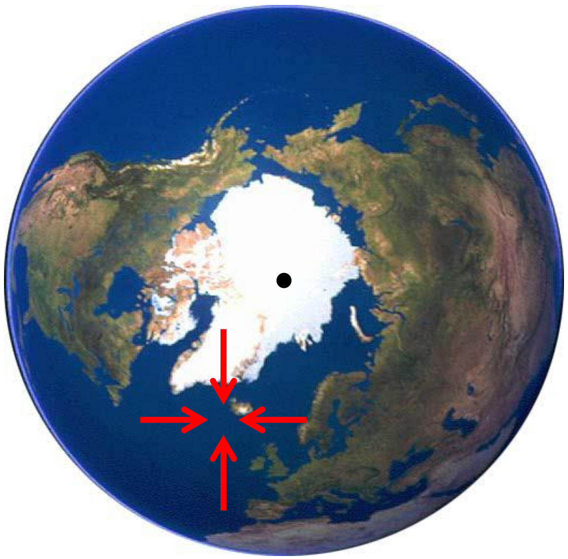
$$\vec{F}_{C,2} = -2m\omega v\,\hat{k}'\times\hat{j}' = 2m\omega v\,\hat{i}'$$

$$\vec{\omega} = -\omega\hat{k}$$

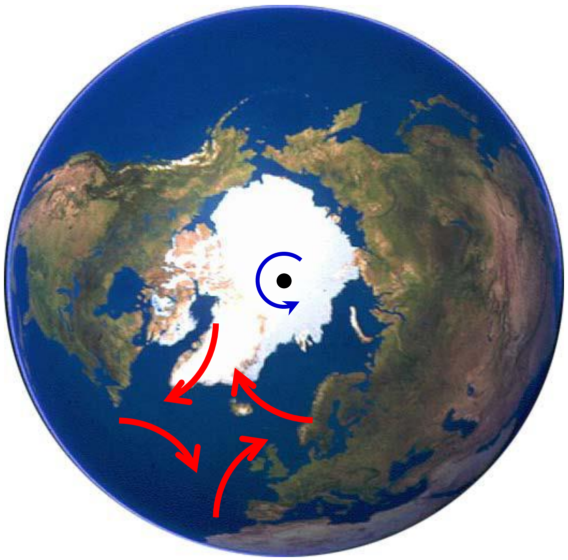


Corioliskraft og været

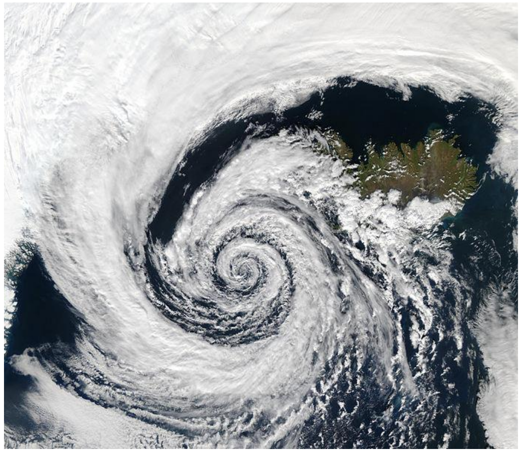
uten rotasjon



med rotasjon



luft strømmer inn til
et område med lavt trykk

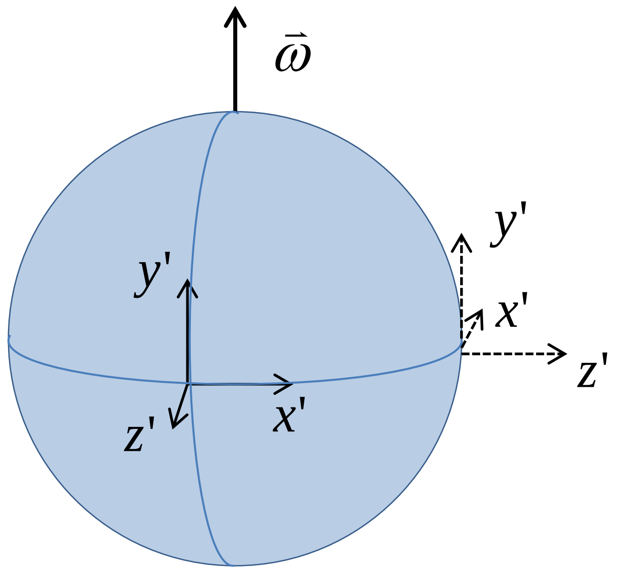


skyggene dreier
seg i motsatt retning
på den sørlige
halvkule

http://pingo.upb.de/ access number: 8178

Du står på ekvator og dropper en masse fra en høyde h. Corioliskraften avleder massen

1. mot nord
2. mot vest
3. mot sør
4. mot øst
5. har ingen effekt



koordinatsystem som roterer med jorden:

$\hat{i}'$ øst

$\hat{j}'$ nord

$\hat{k}'$ vertikal opp

massen faller nedover: $\vec{v}' = -v\hat{k}'$

jordens rotasjonsakse: $\vec{\omega} = \omega\,\hat{j}'$

Corioliskraft:

$$\vec{F}_C = -2m\vec{\omega}\times\vec{v}'$$

$$= -2m\omega\,\hat{j}'\times(-v\hat{k}')$$

$$= 2m\omega v(\hat{j}'\times\hat{k}')$$

$$= 2m\omega v\,\hat{i}'$$

Corioliskraften avleder massen mot øst.

http://pingo.upb.de/ access number: 8178

Du måler vekten til en masse i Oslo og på et sted ved ekvatoren.
På grunn av sentrifugalkraften er vekten i Oslo:

1. mindre enn ved ekvator
2. den samme som ved ekvator
3. større enn ved ekvator

$$\vec{a}_S = -\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}\,')$$

$$= -\omega\hat{k}'\times(\omega\hat{k}'\times(R\cos\theta\,\hat{i}\,' + R\sin\theta\,\hat{k}'))$$

$$= -\omega\hat{k}'\times(\omega\hat{k}'\times R\cos\theta\,\hat{i}\,')$$

$$= -\omega^2 R\cos\theta(\hat{k}'\times\hat{j}\,')$$

$$= \omega^2 R\cos\theta\,\hat{i}\,'$$