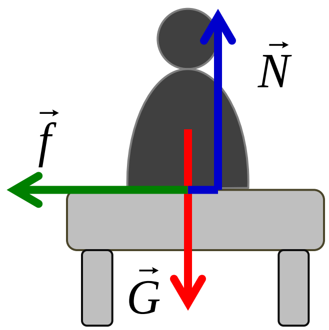
Fiktive krefter

Gravitasjon og planetenes bevegelser

04.05.2015

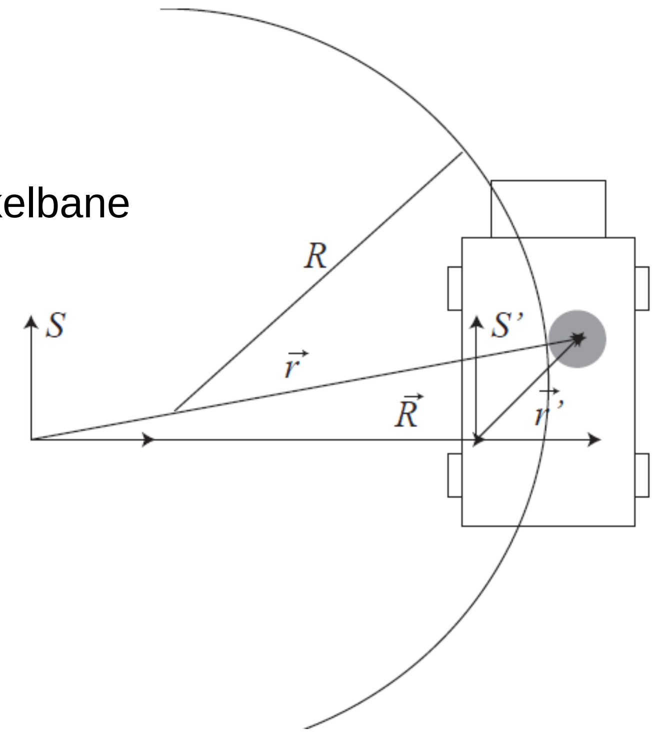
Sentrifugalkraft

inertialsystem S

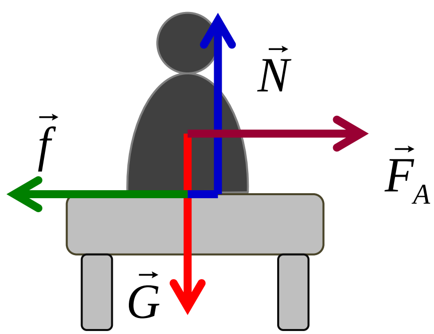


friksjon mellom passasjer og sete
$\Rightarrow$ sentripetalkraft
$\Rightarrow$ passasjer beveger seg i en sirkelbane

$$\vec{f} = -m\frac{v^2}{R}\vec{e}_r$$



roterende system S'



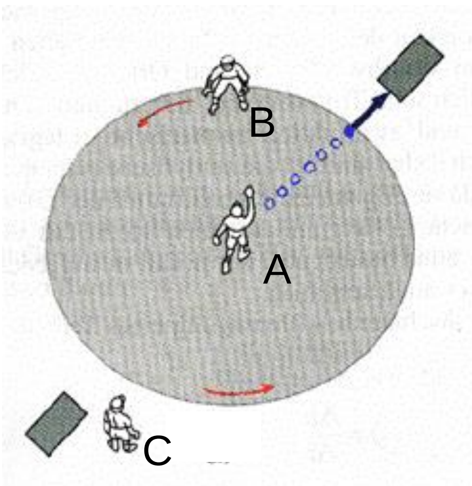
i roterende system sitter passasjer i ro
$\Rightarrow$ kreves en kraft som kompenserer sentripetalkraft (=friksjon)
$\Rightarrow$ sentrifugalkraft

$$\vec{F}_S = +m\frac{v^2}{R}\vec{e}_r$$

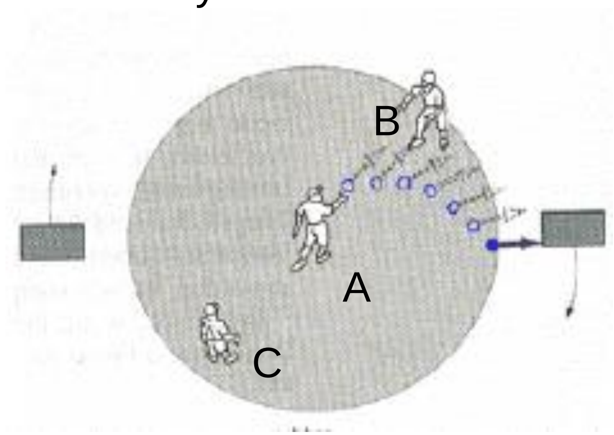
sentrifugalkraft oppstår bare i det roterende systemet
$\Rightarrow$ fiktiv kraft
$\Rightarrow$ sentripetal- og sentrifugalkraft er **ikke** kraft-motkraft par

Corioliskraft

inertialsystem



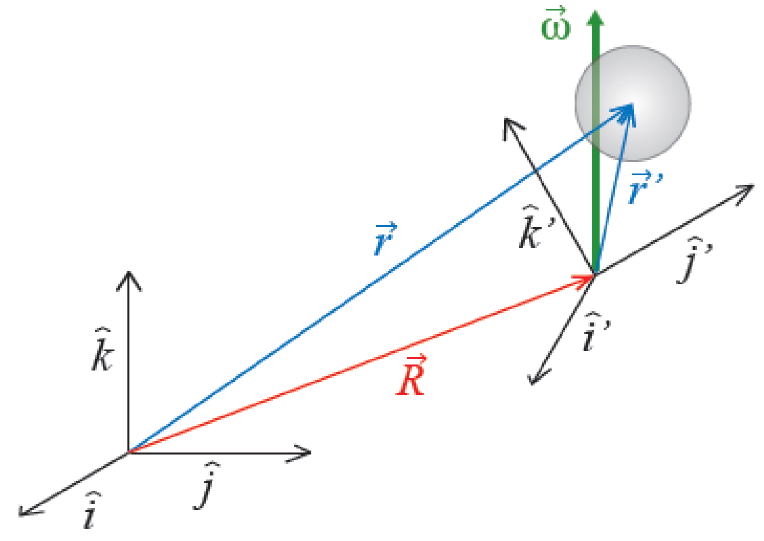
roterende system



person B dreier seg ut av skuddlinjen
mens ballen beveger seg mot ham

det oppstår en fiktiv kraft
som avleder ballen
$\Rightarrow$ Corioliskraft

Transformasjon i et roterende koordinatsystem



vi antar $\vec{A}=\vec{0}, \quad \vec{\alpha}=\vec{0}$

$$m\vec{a}' = m\vec{a} - 2m\vec{\omega}\times\vec{v}' - m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')$$

$$= \sum \vec{F} + \vec{F}_C + \vec{F}_S$$

Corioliskraft: $\vec{F}_C = -2m\vec{\omega}\times\vec{v}'$

er hastighetsavhengig

Sentrifugalkraft: $\vec{F}_S = -m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')$

er posisjonsavhengig

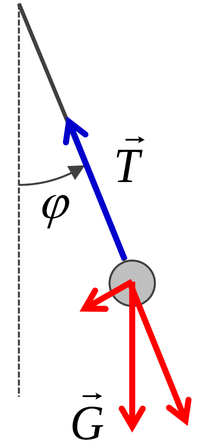
Repetisjon: pendel i inertialsystem

radial retning: $T - mg\cos\varphi = ma_R = 0$

$$T = mg\cos\varphi$$

tangensial retning: $F_T = -mg\sin\varphi = ma_T$

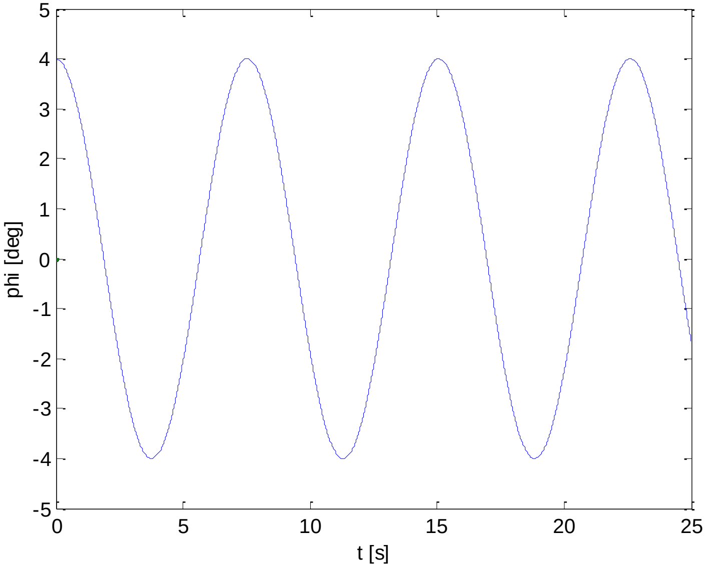
$$a_T = -g\sin\varphi$$



pendelen beveger seg på en sirkelbane: $v_T = \omega R \qquad a_T = \alpha R$

```
N = 5000;
phi = zeros(N);
t = zeros(N);
g = 9.81; % m/s^2
R = 14.1; % m
dt = 0.005; % s
phi(1) = 4*pi/180;
for i=1:N-1
    alpha = -g*sin(phi(i))/R;
    omega(i+1) = omega(i) + alpha*dt;
    phi(i+1) = phi(i) + omega(i+1)*dt;
    t(i+1) = t(i)+dt;
end
plot(t,phi/pi*180)
xlabel('t [s]');
ylabel('phi [deg]');
```

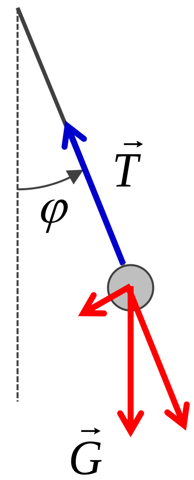
numerisk løsning:



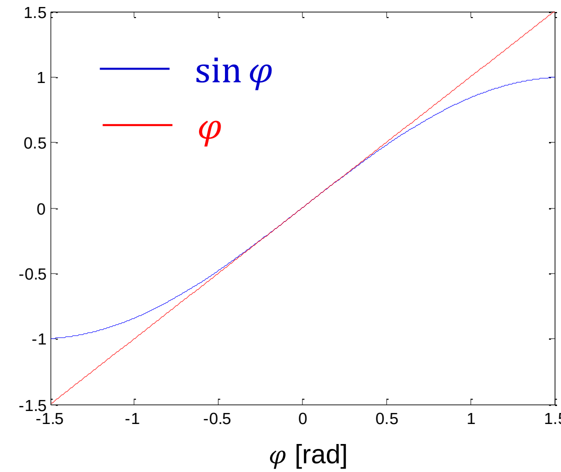
tangensial akselerasjon:

$$a_T = -g\sin\varphi = \alpha R$$

$$\alpha R + g\sin\varphi = 0$$



Taylorrekke: $\sin\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \cdots$



differensialligning $\ddot{\varphi} + \frac{g}{R}\sin\varphi = 0$

tilnærming for små vinkler: $\ddot{\varphi} + \frac{g}{R}\varphi = 0$

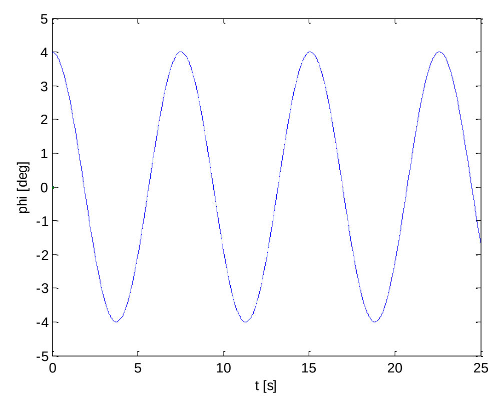
for små vinkler: $\sin\varphi \approx \varphi$

ansats: $\varphi(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$

$$\dot{\varphi}(t) = \omega A\cos(\omega t) - \omega B\sin(\omega t)$$

$$\ddot{\varphi}(t) = -\omega^2 A\sin(\omega t) - \omega^2 B\cos(\omega t) = -\omega^2\varphi(t)$$

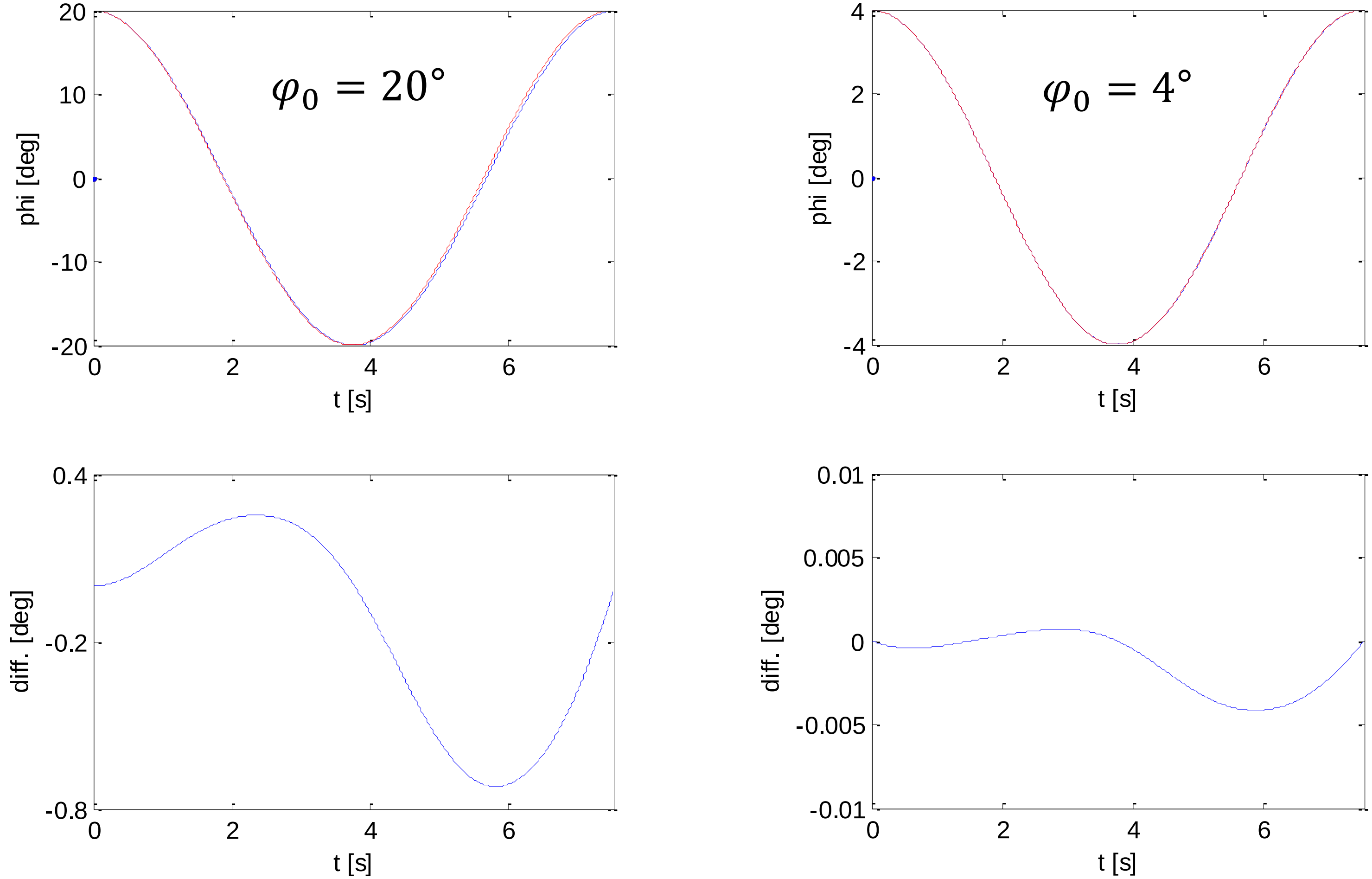
$$-\omega^2\varphi + \frac{g}{R}\varphi = 0 \qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{R}}$$



initialbetingelser: $\varphi(0) = B = \varphi_0$ $\qquad \dot{\varphi}(0) = \omega A = 0$ $\qquad \Rightarrow \qquad \varphi(t) = \varphi_0\cos(\omega t)$

numerisk, $\Delta t = 0.001$ s

analytisk med tilnærming $\sin\varphi = \varphi$



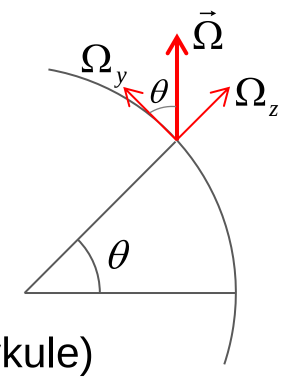
$\varphi = 20° = 0.3491$ rad
$\sin(20°) = 0.3420$

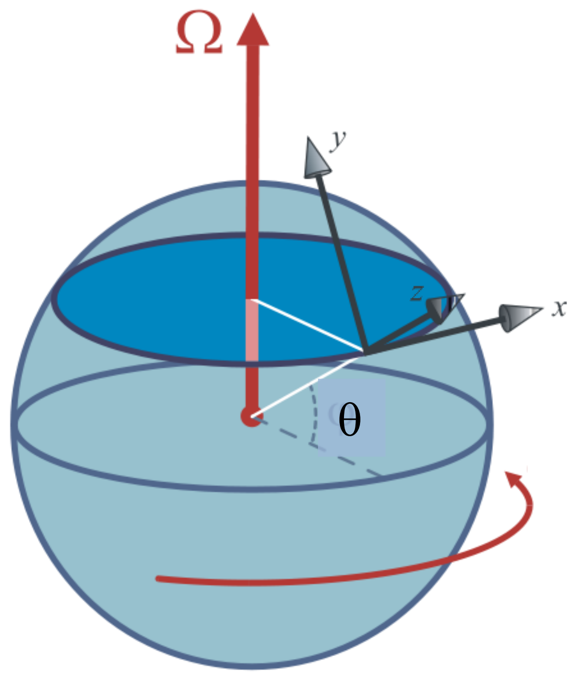
differanse: numerisk – analytisk

$\varphi = 4° = 0.06981$ rad
$\sin(4°) = 0.06976$

Corioliskraft på jorden

vi definerer et koordinatsystem for
et sted med geografisk bredde θ:
x akse: øst
y akse: nord
z akse: oppover





vinkelhastighet:

tangensial komponent mot nord
radial komponent opp (nordlige halvkule)
ned (sørlige halvkule)

$$\vec{\Omega} = \Omega \cos\theta \, \hat{j} + \Omega \sin\theta \, \hat{k}$$

en masse beveger seg med hastighet $\vec{v}$

$$\vec{F}_C = -2m\vec{\Omega} \times \vec{v}$$

$$= -2m(\Omega \cos\theta \, \hat{j} + \Omega \sin\theta \, \hat{k}) \times (v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k})$$

$$= 2m\Omega\left(v_x \cos\theta \, \hat{k} - v_z \cos\theta \, \hat{i} - v_x \sin\theta \, \hat{j} + v_y \sin\theta \, \hat{i}\right)$$

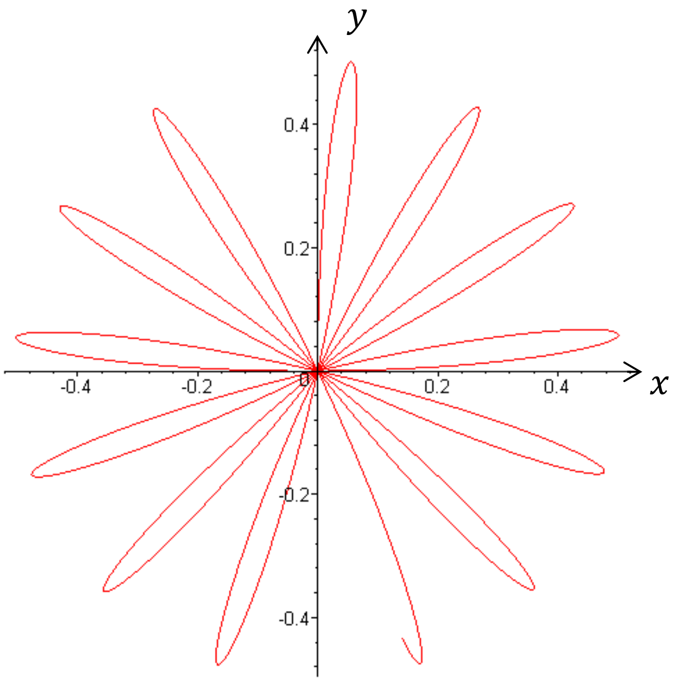
Focault pendel

$$F_{C,x} = 2m\Omega\left(v_y \sin\theta - v_z \cos\theta\right)$$
$$F_{C,y} = -2m\Omega v_x \sin\theta$$
$$F_{C,z} = 2m\Omega v_x \cos\theta$$

for en lang pendel er $v_z \approx 0$

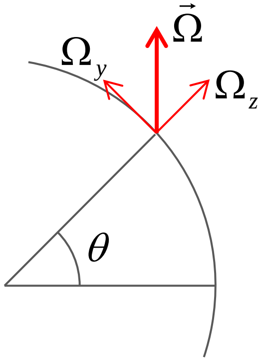
horisontal Corioliskraft:

$$F_{C,x} = 2mv_y\Omega\sin\theta$$
$$F_{C,y} = -2mv_x\Omega\sin\theta$$



Corioliskraft på pendelen er avhengig av geografisk bredden θ:

maksimal på polen
null på ekvator

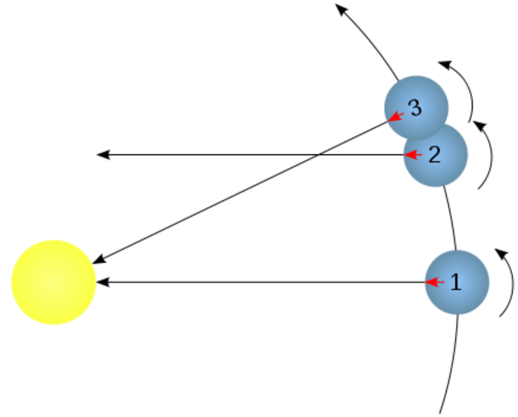


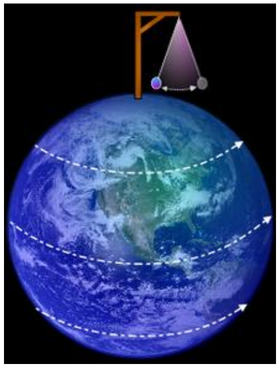
http://pingo.upb.de/ access number: 8178

Hvor mye tid tar det før pendelen på fysisk institutt har rotert 360°?

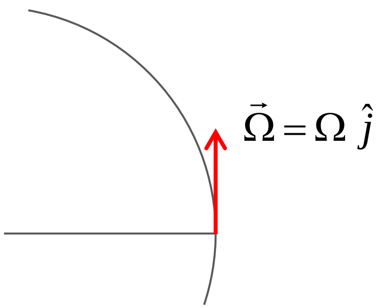
1. mindre enn 24 timer
2. nøyaktig 24 timer
3. mer enn 24 timer

jorden bruker 23,9345 timer
for en omdreining (siderisk døgn)





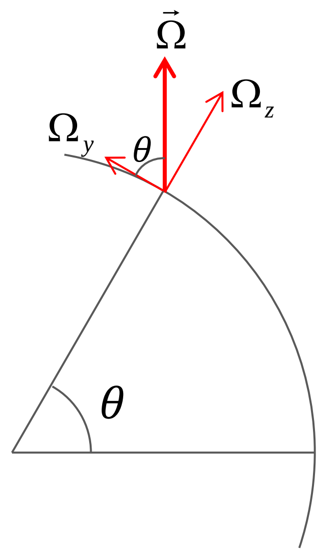
pendel på Nordpolen:
jorden dreier seg under
pendelen i 23.9345 timer



pendel på ekvator ($\theta = 0°$):
ingen vertikal komponent Ω_z
ingen Corioliskraft

$$F_{C,x} = 2mv_y\Omega\sin\theta$$

$$F_{C,y} = -2mv_x\Omega\sin\theta$$



pendel i Oslo ($\theta = 60°$):

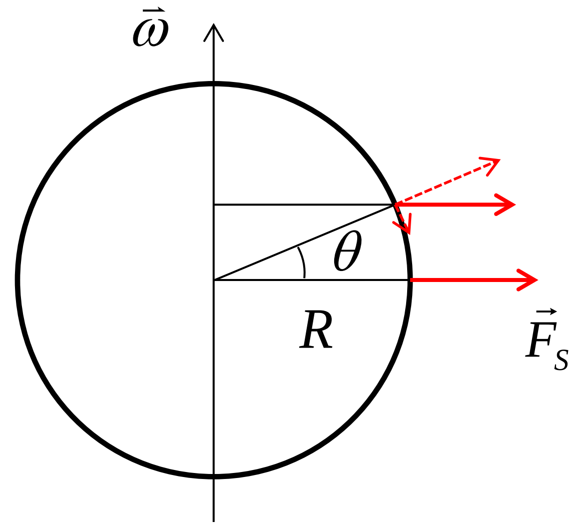
pendel svinger i xy planet

$$\Omega_z = \Omega\sin\theta$$

vinkelhastighet om z aksen
er mindre, perioden lenger:

$$T = \frac{23.9345\,\mathrm{h}}{\sin 60°} = 27.64\,\mathrm{h}$$

Sentrifugalkraft på jorden



sentrifugalkraft: $\vec{F}_S = -m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}\,')$

sentrifugalakselerasjon: $\vec{a}_S = -\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}\,')$

på ekvator: $a_S = \omega^2 R$

på breddegrad θ: $a_S = \omega^2 R\cos\theta$

tyngdeakselerasjon er rettet mot jordens sentrum

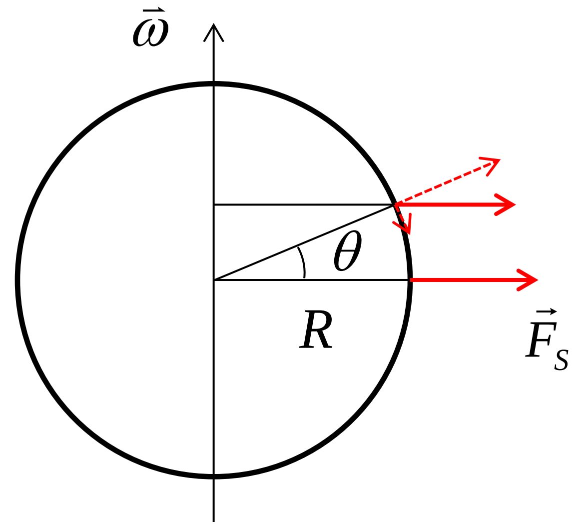
den resulterende akselerasjonen er generell ikke radial

radial komponent: $g_r = -g_0 + a_s\cos\theta = -g_0 + \omega^2 R(\cos\theta)^2$

tangensial komponent: $g_t = a_s\sin\theta = \omega^2 R\cos\theta\sin\theta$

radial komponent: $g_r = -g_0 + \omega^2 R(\cos\theta)^2$

tangensial komponent: $g_t = \omega^2 R \cos\theta \sin\theta$



siderisk døgn: T = 23.9345 h = 86164 s

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 7.292 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$$

jordens radius: $R = 6.38 \cdot 10^6 \text{ m}$

Nordpol:	$g_r = 9.832 \text{ m/s}^2$	$g_t = 0$
Oslo (59.9°):	$g_r = 9.8235 \text{ m/s}^2$	$g_t = 0.0147 \text{ m/s}^2$
Paris (48.8°):	$g_r = 9.817 \text{ m/s}^2$	$g_t = 0.0168 \text{ m/s}^2$
Ekvator:	$g_r = 9.798 \text{ m/s}^2$	$g_t = 0$

tangensialakselerasjon mot ekvator
$\Rightarrow$ jordens radius er større på ekvator enn på polene

$$R_{\text{ekv}} = 6378.137 \text{ km}$$
$$R_{\text{pol}} = 6356.752 \text{ km}$$

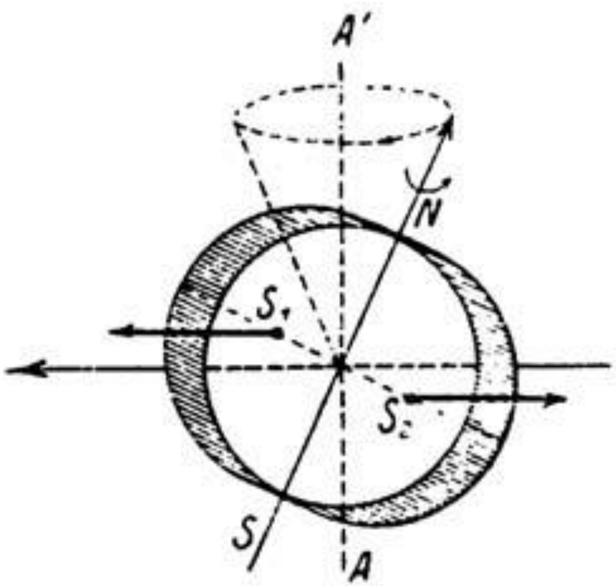
konsekvens av utflatning:

gravitasjonskraft fra solen på jorden gir et kraftmoment

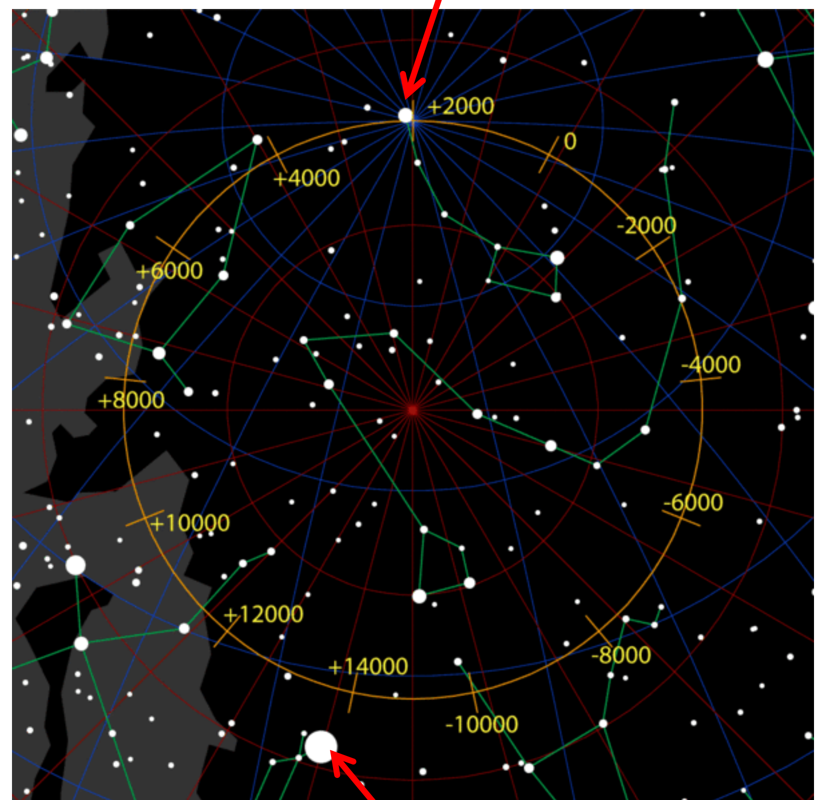
spinn forandrer seg i retning av kraftmomentet $\vec{\tau} = \frac{d}{dt}\vec{l}$

$\Rightarrow$ presesjonsbevegelse
periode: 25800 a

solen



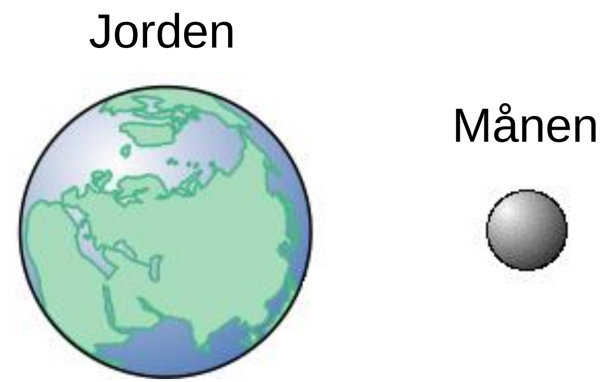
Polaris



Vega

http://pingo.upb.de/ access number: 8178

Månens masse er 1/81 av Jordens masse. Sammenliknet med gravitasjonskraften som Jorden utøver på månen, så er gravitasjonskraften månen utøver på Jorden:



A. $81^2 =$ 6561 ganger større

B. 81 ganger større

C. like stor

D. 1/81 så stor

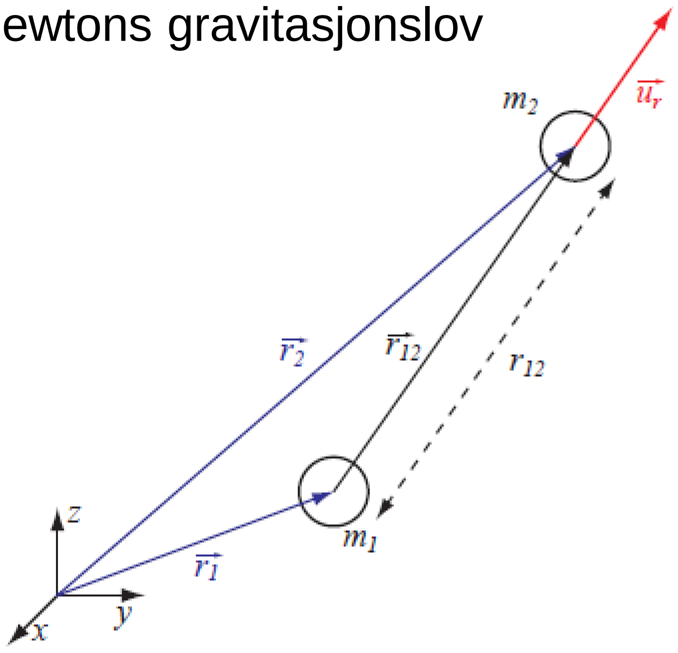
E. $(1/81)^2$ så stor

$$\vec{F}_{1\,\text{på}\,2} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^3}\vec{r}_{12}$$

kraft-motkraft par

$$\vec{r}_{12} = -\vec{r}_{21}$$

Newtons gravitasjonslov



mellom ethvert partikkelpar i universet gjelder:

$$\vec{F}_{1\,\text{på}\,2} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\hat{u}_r$$

hvor $\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ $\qquad \hat{u}_r = \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|}$

$$\vec{F}_{1\,\text{på}\,2} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^3}\vec{r}_{12}$$

En astronaut med masse $m_A = 75$ kg veier $W_J = m_A g = 735.75$ N på jorden. Hvor mye veier han i en romferje som befinner seg i en orbit 200 km over jordens overflate?

A. $W_{RF} = 0$ N

B. $W_{RF} = 689.8$ N

C. $W_{RF} = 735.8$ N

på jorden:

$$W_J = G\frac{m_J m_A}{R_J^2} = m_A g = 75\,\text{kg}\cdot 9.81\,\text{m/s}^2 = 735.8\,\text{N}$$

i romferjen:

$$W_{RF} = G\frac{m_J m_A}{(6380\,\text{km}+200\,\text{km})^2} = 75\,\text{kg}\cdot 9.2\,\text{m/s}^2 = 689.8\,\text{N}$$

romferjen er i fritt fall rundt jorden

$\Rightarrow$ astronaut føler seg vektløs

Ekvivalensprinsippet

gravitasjonskraft: $$F_G = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

for et legeme som befinner
seg på jordens overflate:

$$F_G = mG\frac{m_J}{R_J^2} = mg$$

Vi kan bruke gravitasjonsloven
for å definere masse:

$$m_G = \frac{F_G}{g}$$ gravitasjonell masse

Newtons andre lov: $$F = ma$$

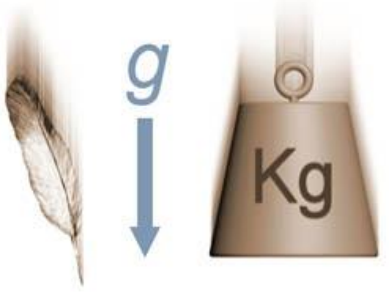
Vi kan bruke N2L for å definere masse:

$$m_a = \frac{F}{a}$$ inertialmasse

ekvivalensprinsip: $$m_a = m_G$$

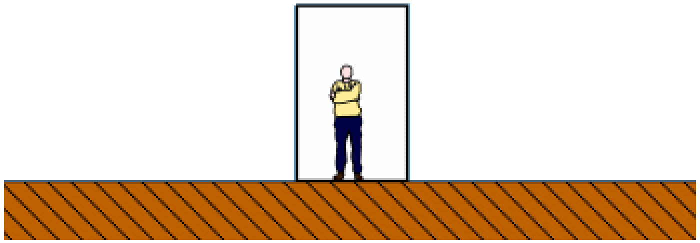
$$\Rightarrow\ a = g$$

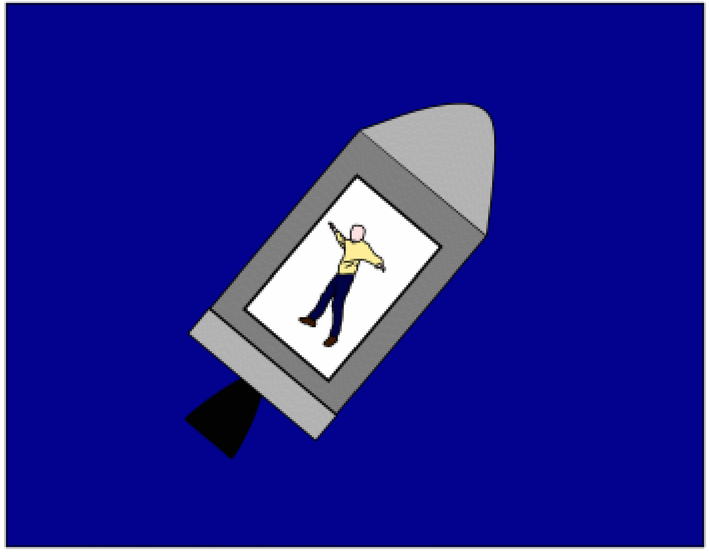
Alle legemer faller like rask i
jordens tyngdefelt (i vakuum).



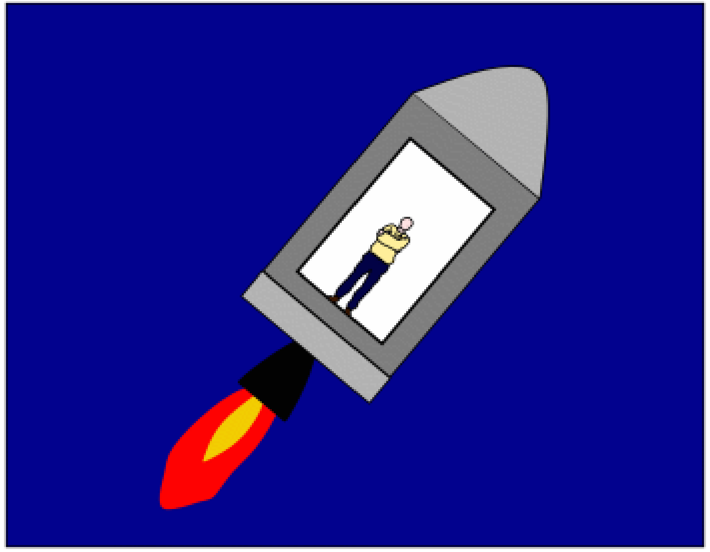
Tankeeksperiment

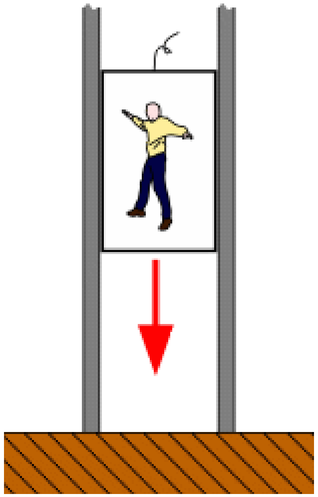
Hvordan vet du at du befinner deg i jordens tyngdefelt?





Hvordan vet du at du at du er vektløs?





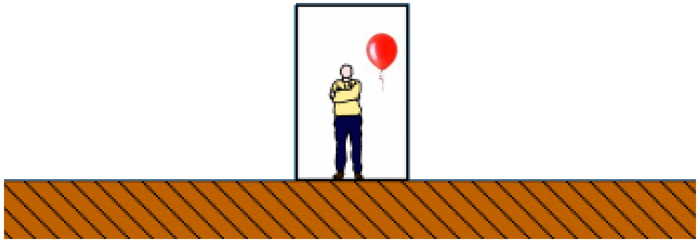
http://pingo.upb.de/ access number: 8178

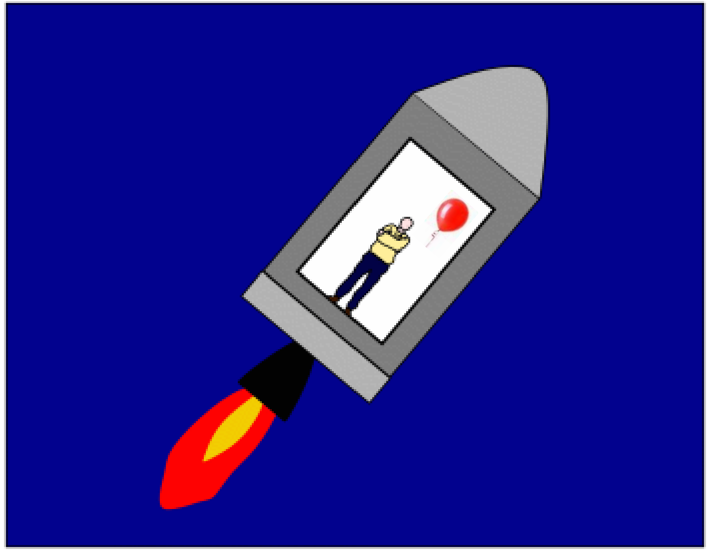
Kan du bruke en heliumballong for å finne ut om du er på jorden eller i en akselerert rakett? I raketten

A. stiger ballongen opp.

B. synker ballongen ned.

C. er ballongen i ro.





https://www.youtube.com/watch?v=y8mzDvpKzfY