Statikk og likevekt

Elastisitetsteori

11.05.2015

	uke 20	21	22	23
man	11 forelesning: elastisitetsteori gruppe: gravitasjon+likevekt innlev. oblig 10	18 forelesning: spes. relativitet gruppe: spes. relativitet	25 Pinse	1 ingen forelesning orakel 14-16 FØ394
tir	12 gruppe: gravitasjon+likevekt	19 gruppe: spes. relativitet	26 gruppe: repetisjon	2
ons	13 forelesning: spes. relativitet gruppe: gravitasjon+likevekt	20 forelesning: repetisjon gruppe: spes. relativitet	27 ingen forelesning gruppe: repetisjon	3 **EKSAMEN**
tor	14 Himmelfart	21 gruppe: spes. relativitet	28 gruppe: repetisjon	4
fre	15 ingen datalab	22 datalab 11 – 14 FV329	29 datalab 11 – 14 FV329	5

Eksamen: Onsdag, 3. Juni, 14:30 – 18:30

Tillatte hjelpemidler:

- Øgrim og Lian: Størrelser og enheter i fysikk og teknikk eller*
- Angell, Lian, Øgrim: Fysiske størrelser og enheter: Navn og symboler*
- Rottmann: Matematisk formelsamling*
- Elektronisk kalkulator av godkjent type.

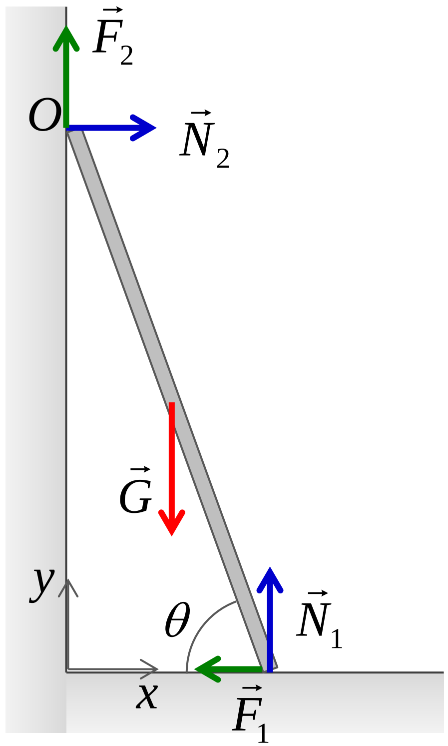
* ikke nødvendig
Formelark er del av oppgaveteksten.

Tidligere eksamensoppgaver:

http://www.uio.no/studier/emner/matnat/fys/FYS-MEK1110/v15/eks/eks.html

Eksempel: stige

krefter:
gravitasjon G
normalkreftene N_1, N_2
friksjonskreftene F_1, F_2



x retning: $N_2 - F_1 = 0$

y retning: $N_1 + F_2 - G = 0$

kraftmoment: $\tau_O = N_1 L \cos\theta - F_1 L \sin\theta - G \frac{L}{2} \cos\theta = 0$

3 ligninger men 4 ukjente: N_1, N_2, F_1, F_2
$\Rightarrow$ problemet er ubestemt

Når begynner stigen å skli?

begge sider må begynne å skli samtidig

Eksempel: stige

stigen sklir når $F_1 = \mu_1 N_1$ og $F_2 = \mu_2 N_2$

x retning: $N_2 = F_1 = \mu_1 N_1$

y retning: $N_1 + F_2 - G = 0$

$$G = N_1 + \mu_2 N_2 = N_1 + \mu_2 \mu_1 N_1$$

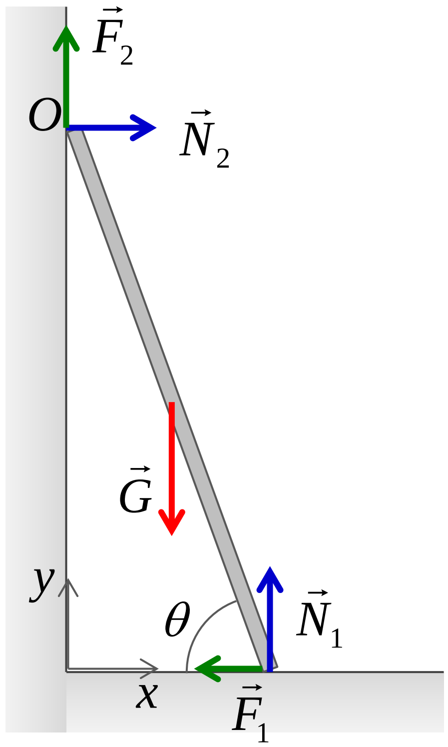
$$N_1 = \frac{G}{1+\mu_1\mu_2}$$

kraftmoment: $N_1 L\cos\theta - F_1 L\sin\theta - G\frac{L}{2}\cos\theta = 0$

$$N_1 - F_1\tan\theta - \frac{G}{2} = 0$$

$$N_1 - \frac{G}{2} = F_1\tan\theta = \mu_1 N_1\tan\theta$$

$$\tan\theta = \frac{1}{\mu_1} - \frac{G}{2\mu_1}\frac{1+\mu_1\mu_2}{G} = \frac{1-\mu_1\mu_2}{2\mu_1}$$



glatt vegg: $\mu_2 = 0$ $\quad \tan\theta = \frac{1}{2\mu_1}$

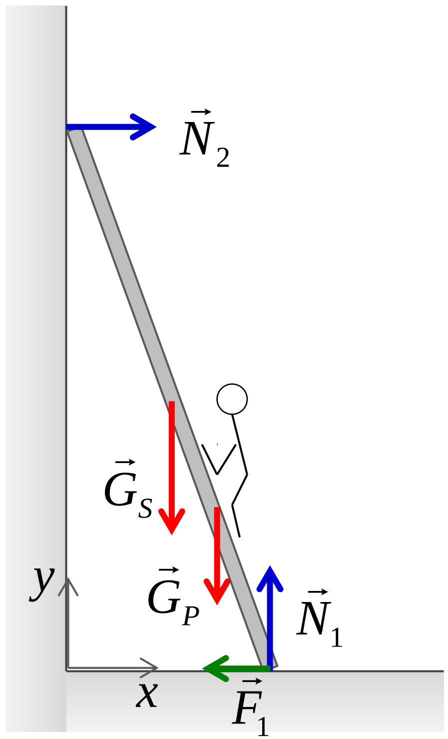
glatt gulv: $\mu_1 = 0$ $\quad \theta = 90°$

hvis vinkelen er mindre begynner stigen å skli
(uavhengig av vekten til stigen)

http://pingo.upb.de/ access number: 8178

En stige (S) med masse M står mot veggen. Friksjon mellom veggen og stigen er neglisjerbar. En person (P) med masse m klatrer opp stigen. Faren for at stigen sklir blir

1. større
2. mindre
3. er det samme



kraftmoment om kontaktpunkt på gulvet:
person klatrer opp

$\Rightarrow$ større kraftmoment fra gravitasjon (positiv)

$\Rightarrow$ trenger større kraftmoment fra $\vec{N}_2$ for at $\sum \tau = 0$

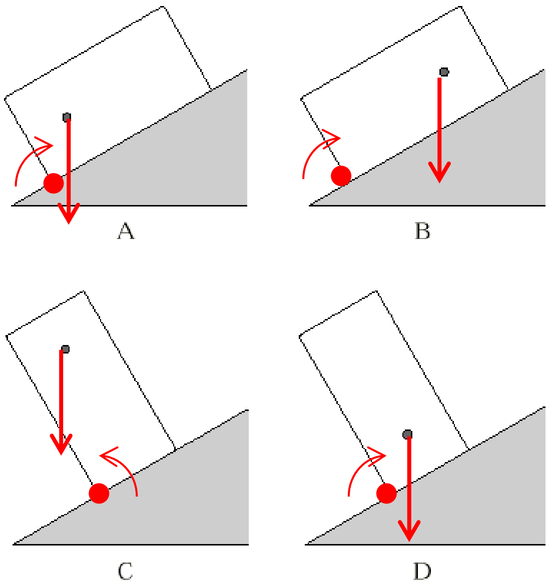
$\Rightarrow$ normalkraften $\vec{N}_2$ fra veggen øker

$\Rightarrow$ friksjonskraften $\vec{F}_1$ øker slik at $\sum F_x = 0$

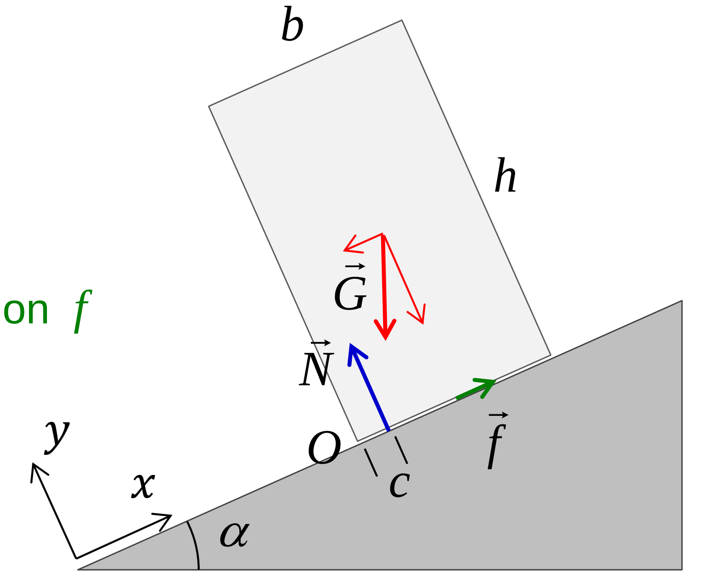
$\Rightarrow$ faren for at stigen sklir øker

En kiste står på et skråplan. Massesenteret er markert med et punkt. I hvilken av de fire tilfeller velter kisten (hvis i det hele tatt)?

1. A
2. B
3. C
4. D
5. A og C
6. C og D
7. alle er stabilt



Eksempel: kiste på skråplan



En homogen kiste med masse *m*, bredde *b* og høyde *h* står på et skråplan med vinkel α. Hva er betingelser for likevekt?

krefter på kisten: gravitasjon G normalkraft N friksjon f

x retning: $f - mg\sin\alpha = 0$

y retning: $N - mg\cos\alpha = 0$

kraftmoment om O:

$$Nc + \frac{h}{2}mg\sin\alpha - \frac{b}{2}mg\cos\alpha = 0$$

$$c + \frac{h}{2}\tan\alpha - \frac{b}{2} = 0$$

$$c = \frac{1}{2}(b - h\tan\alpha)$$

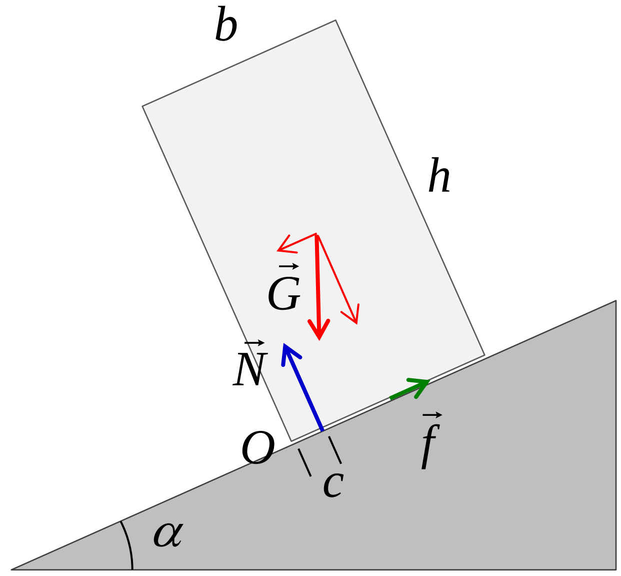
kisten kan enten skli eller velte

hvis den velter er O den eneste kontaktpunkt og $c = 0$

betingelse for at kisten velter:

$$\tan\alpha = \frac{b}{h}$$

Eksempel: kiste på skråplan



$$f = mg\sin\alpha \qquad N = mg\cos\alpha \qquad c = \frac{1}{2}(b - h\tan\alpha)$$

kisten begynner å skli hvis: $f = \mu N$

$$mg\sin\alpha = \mu mg\cos\alpha$$

$\Rightarrow$ kritisk vinkel: $\tan\alpha = \mu$

samtidlig må være: $c > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{b}{h} > \tan\alpha$

ellers har kisten allerede veltet

kisten begynner å velte hvis: $c = 0 \quad \Rightarrow$ kritisk vinkel: $\frac{b}{h} = \tan\alpha$

samtidlig må være: $f < \mu N \quad \Rightarrow \quad \tan\alpha < \mu$

ellers har kisten allerede sklidd

eksempel: $\frac{b}{h} = 0.5$

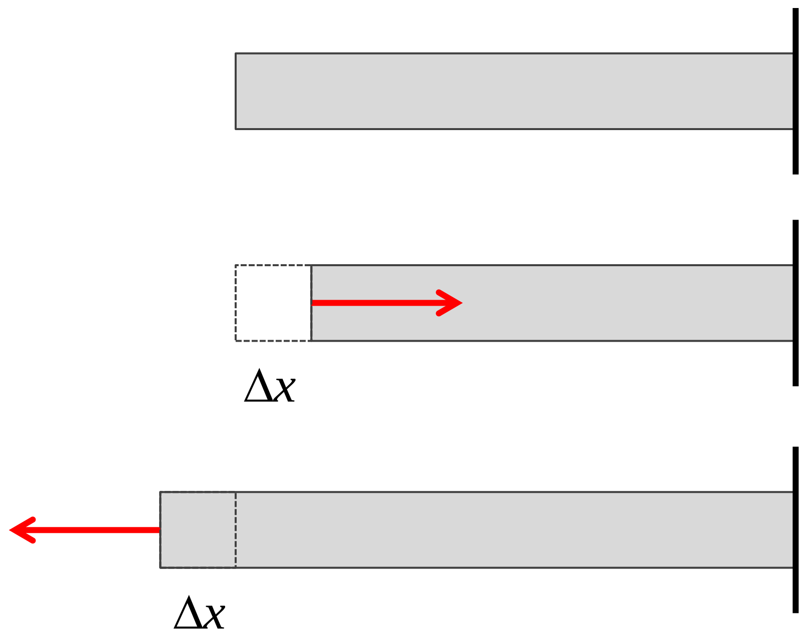
$\mu = 0.4$ kisten sklir ved $a_{\text{crit}} = \arctan(\mu) = 21.8°$

$\mu = 0.6$ kisten velter ved $a_{\text{crit}} = \arctan\left(\frac{b}{h}\right) = 26.6°$

Elastisitetsteori

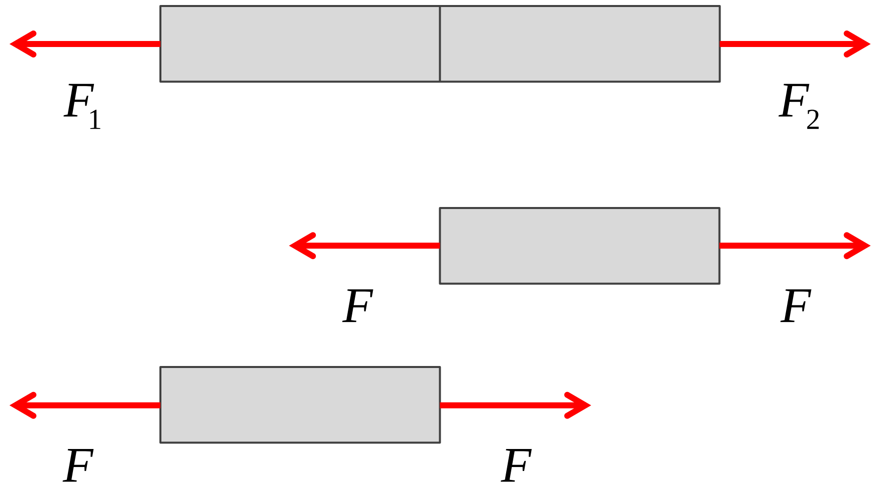
Hvordan blir faste stoffer deformert når de påvirkes av krefter?

Vi har så langt modellert deformasjoner med fjærkrefter:



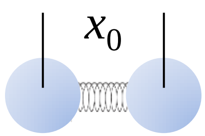
$$F = -k\Delta x$$

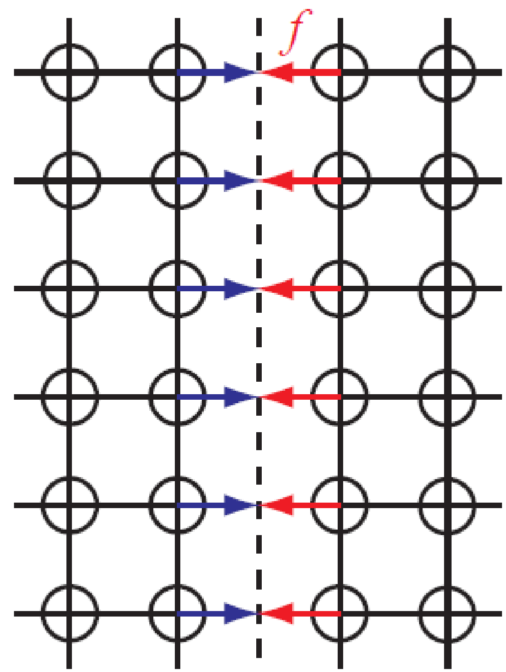
bjelke i likevekt: $F_1 = F_2$



vi tenker oss en
imaginær snittflate

vi tenker oss en snittflate
på en atomær skala



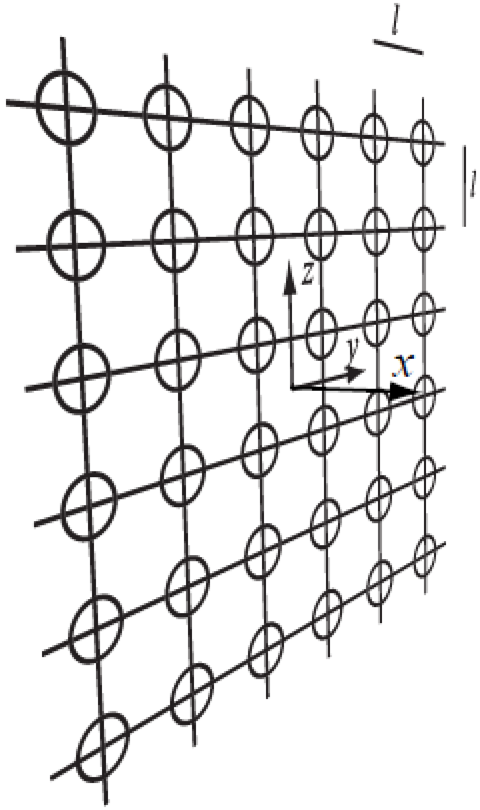


kraft mellom to atomer i x retning:

fjærkraft $F = k(x - x_0)$

bra tilnærming for små Δx

kubisk krystall



kraft på en snittflate med areal $A = N_y l \, N_z l$

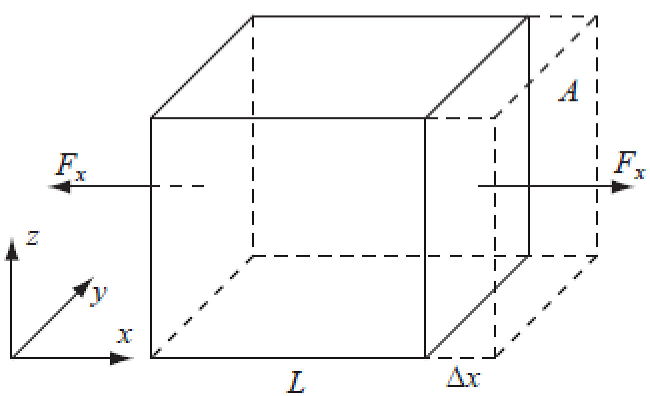
$$F = k(x - x_0) N_y N_z$$

$\sigma = \dfrac{F}{A}$ spenning

$\varepsilon = \dfrac{\Delta x}{l}$ tøyning

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{k}{l}\frac{\Delta x}{l} = \frac{k}{l}\varepsilon$$

$E = \dfrac{k}{l}$ Elastisitetsmodul
Youngs modul



materialegenskap

enhet: $\dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} = \mathrm{Pa}$

$\sigma = E\varepsilon$ Hookes lov

Elastisitetsmodul

eksempler:

stål	$2 \cdot 10^{11}$ Pa = 200 GPa = 200 kN/mm^2
bly	19 GPa
silikon	0.05 GPa

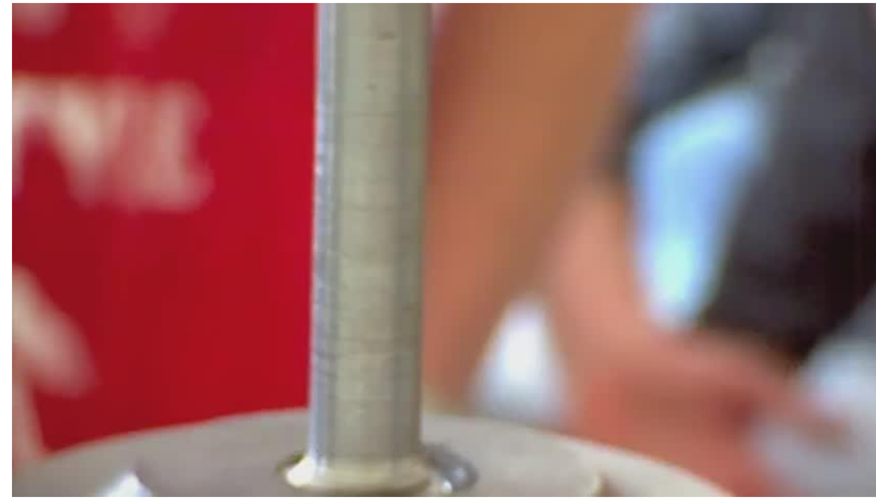
Eksempel Et lodd på 1 kg henger i en ståltråd med 1 mm diameter og lengden 1 m. Hva er forlengelsen av tråden?

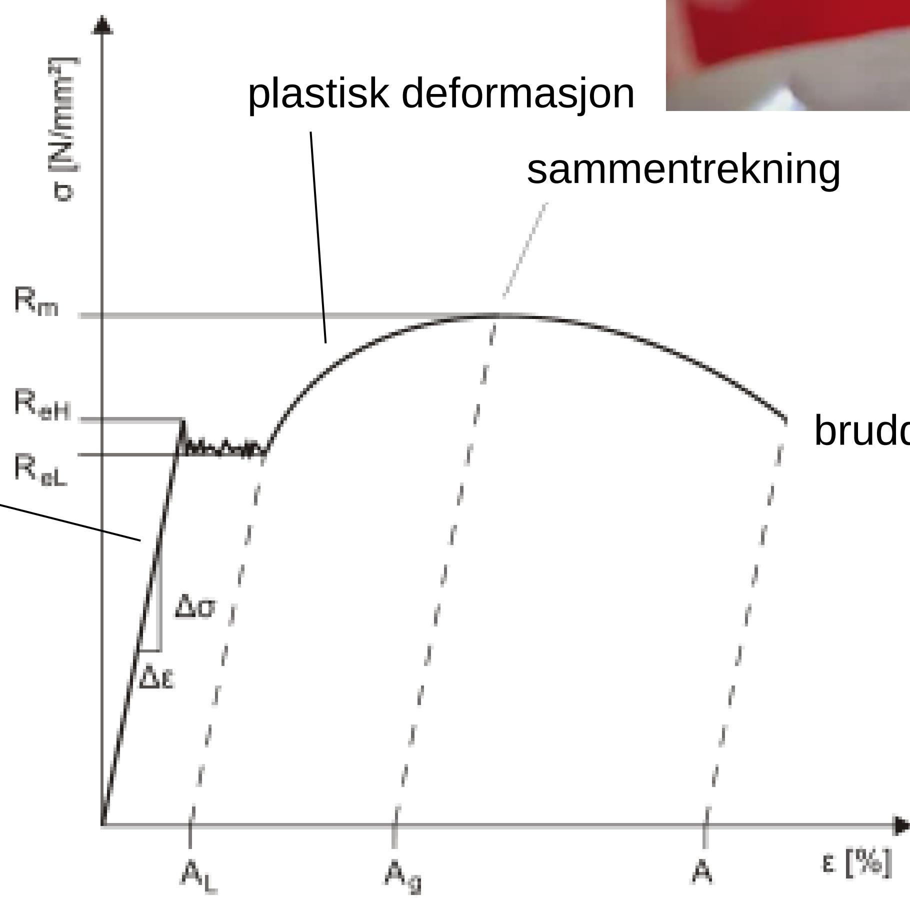
spenning: $$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{mg}{\pi r^2} = \frac{1\,\mathrm{kg} \cdot 9.81\,\mathrm{m/s^2}}{\pi \cdot (5 \cdot 10^{-4})^2\ \mathrm{m}^2} = 1.25 \cdot 10^7\ \mathrm{Pa}$$

$$\sigma = E \frac{\Delta x}{L}$$

$$\Delta x = \frac{\sigma}{E} L = \frac{1.25 \cdot 10^7\ \mathrm{Pa}}{2 \cdot 10^{11}\ \mathrm{Pa}} \cdot 1\,\mathrm{m} = 6.25 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m} = 62.5\ \mu\mathrm{m}$$

Spennings-tøyningskurve



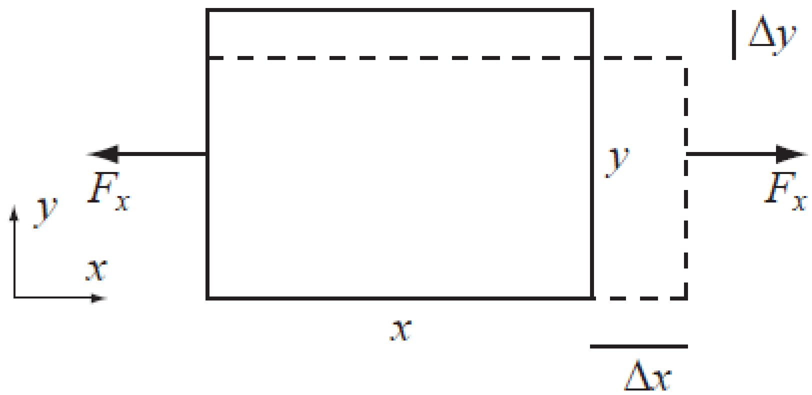


Hookes lov:

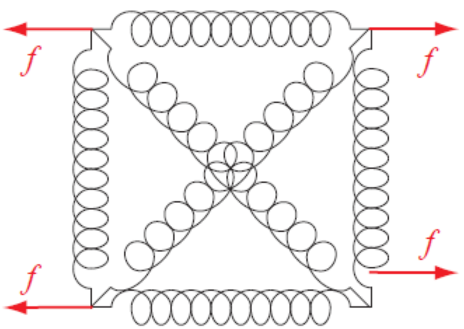
$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

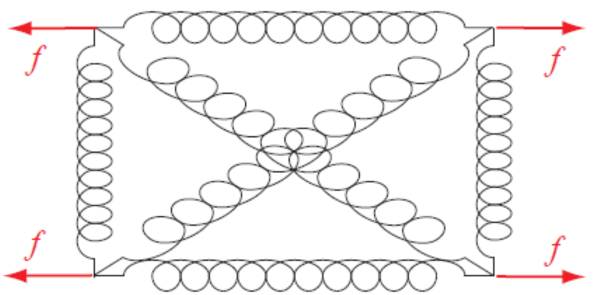
tøyning i x retning: $\varepsilon_x = \dfrac{\Delta x}{x} = \dfrac{\sigma_x}{E}$

tøyning i y retning: $\varepsilon_y = \dfrac{\Delta y}{y} = -\nu \dfrac{\sigma_x}{E} = -\nu \dfrac{\Delta x}{x}$



ν tverrkontraksjonstall
Poissons tall





volumendring:

$$\Delta V = (x+\Delta x)(y+\Delta y)(z+\Delta z) - xyz$$

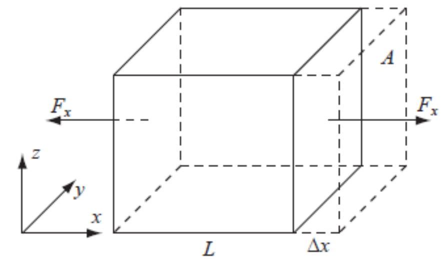
$$\approx xy(\Delta z) + x(\Delta y)z + (\Delta x)yz$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} + \frac{\Delta z}{z} \quad = \frac{\Delta x}{x}(1-2\nu)$$

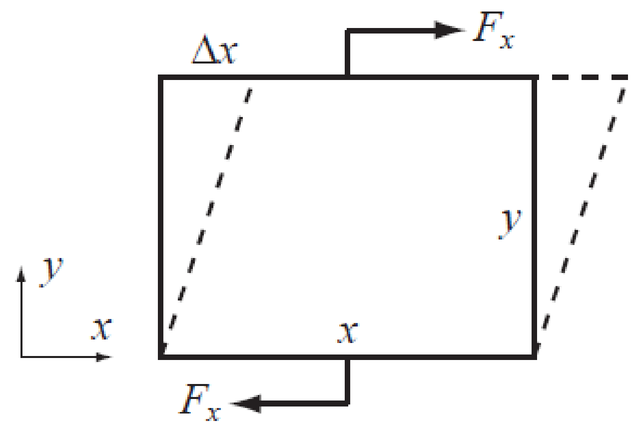
$\nu = 0.5$ volum er konstant

$\nu = 0.2 \ldots 0.3$ for de fleste materialer

Skjærdeformasjon



normalspenning: $$\sigma_{xx} = \frac{F_x}{A_x} = E\frac{\Delta x}{x}$$



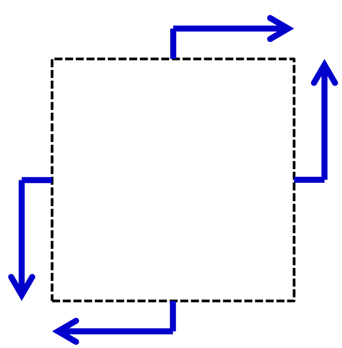
skjærspenning: $$\sigma_{xy} = \frac{F_x}{A_y} = G\frac{\Delta x}{y}$$

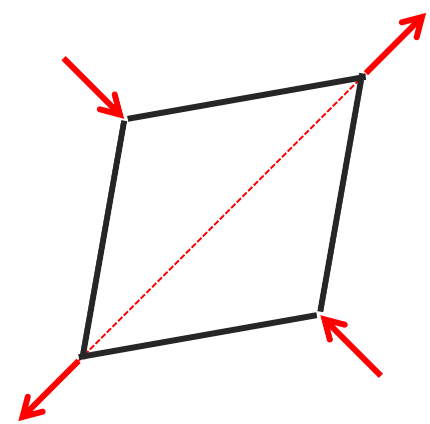
G: skjærmodul

skjærmodulen G er relatert til elastisitetsmodulen E og tverrkontraksjonstallet ν

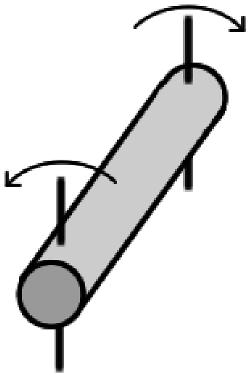
for isotrope materialer:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

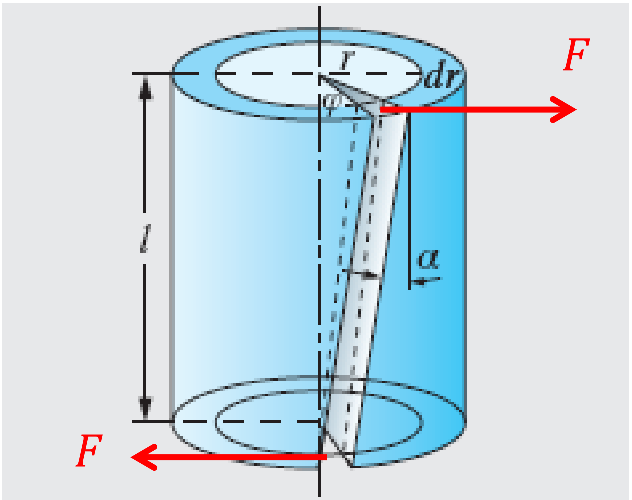




Vridning



to motsatte kraftmomenter τ
vrir en tråd om en vinkel φ



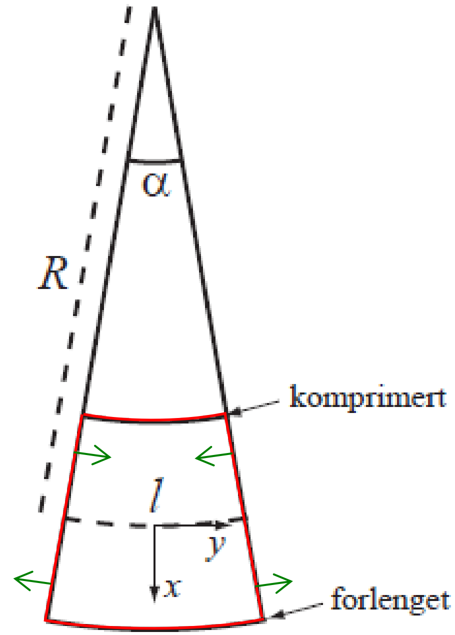
torsjonsmodul: $$D_r = \frac{\tau}{\varphi}$$

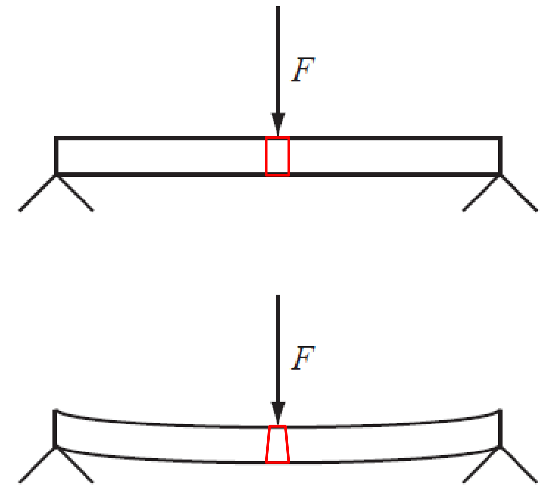
relatert til skjærdeformasjon

$$D_r = \frac{\pi G R^4}{2l}$$

G: skjærmodul

Bøying av en bjelke





midtlinjen: den nøytrale linjen
ovenfor komprimeres bjelken
nedenfor forlenges bjelken

forlengelsen Δl i avstand x fra den nøytrale linjen:

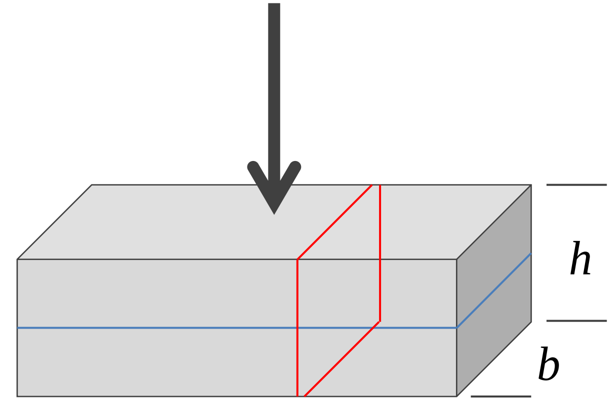
$$\Delta l = (R + x)\alpha - R\alpha = x\alpha = x\frac{l}{R}$$

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{x}{R}$$

Hookes lov: $\sigma(x) = E\frac{\Delta l}{l} = E\frac{x}{R}$

spenning i bjelken

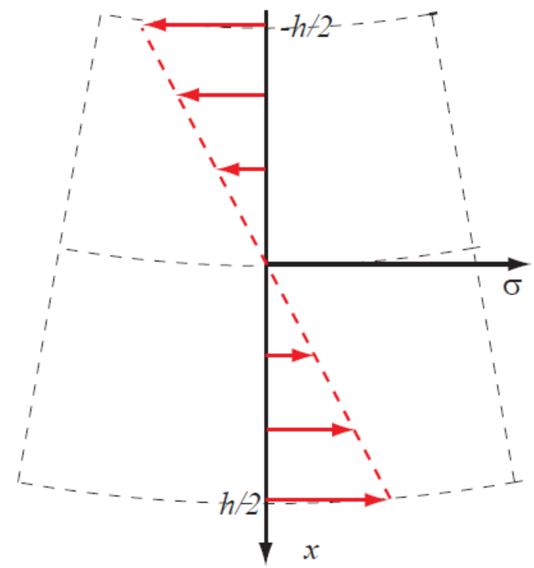
en bjelke med høyde h og bredde b:



nettokraft er null, men
det virker et kraftmoment om O

$$\tau = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \int \vec{r} \times d\vec{F}$$

$$= \int_A x\sigma(x)dA = \frac{E}{R}\int_A x^2 dA = \frac{E}{R} I_A$$



$$I_A = \int_A x^2 dA$$ flatetreghetsmoment

bøyningen er gitt ved: $\dfrac{1}{R} = \dfrac{\tau}{I_A E}$

$$\sigma(x) = E\frac{\Delta l}{l} = E\frac{x}{R}$$

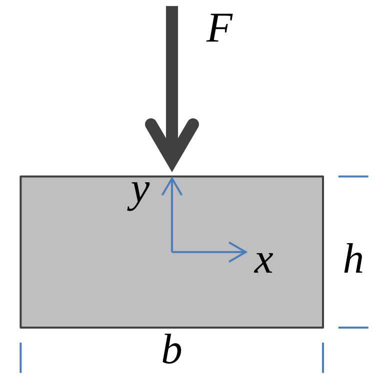
τ: kraftmoment fra ytre krefter
E: materialegenskap
I_A: geometrisk

jo større flatetreghetsmoment,
jo større motstand mot bøyning

x: avstand fra nøytral linje

Eksempel: flatetreghetsmoment for en 2×4 cm trevirke:

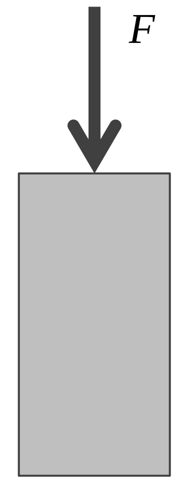
$$I_A = \int_A y^2 dA = b \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dy = b\left(\frac{1}{3}\frac{h^3}{8} + \frac{1}{3}\frac{h^3}{8} \right) = \frac{bh^3}{12}$$



to orienteringer:

$$I_1 = \frac{4 \cdot 2^3}{12}\,\mathrm{cm}^4 = \frac{8}{3}\,\mathrm{cm}^4$$

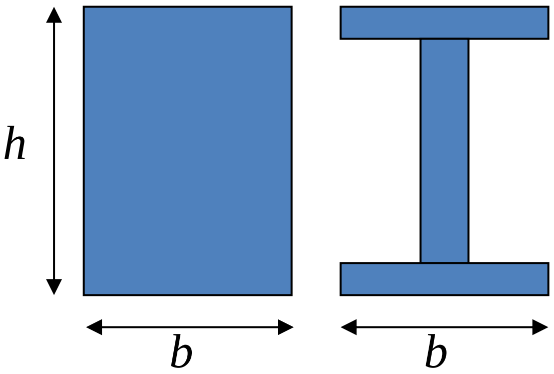
$$I_2 = \frac{2 \cdot 4^3}{12}\,\mathrm{cm}^4 = \frac{32}{3}\,\mathrm{cm}^4 = 4I_1$$



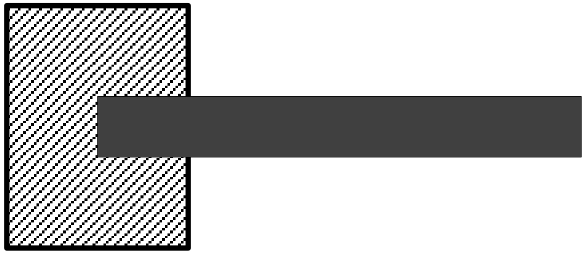
http://pingo.upb.de/ access number: 8178

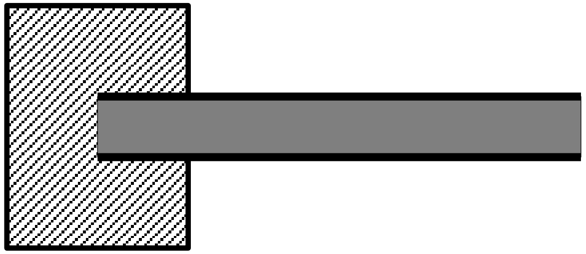
En massiv bjelke og en I-bjelke av samme material og dimensjon er innspent i den ene enden og den andre enden er fri. Hvilen bjelke bøyes mest?

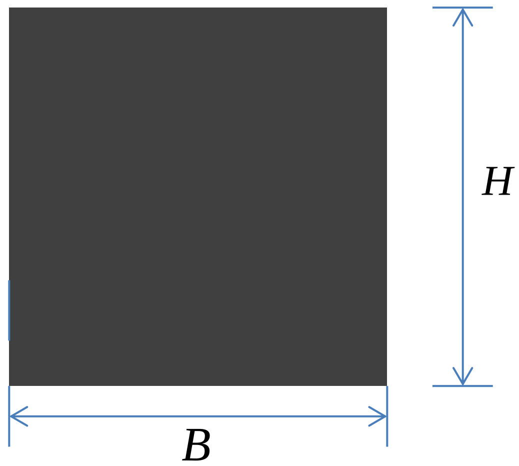
tverrsnitt av bjelkene

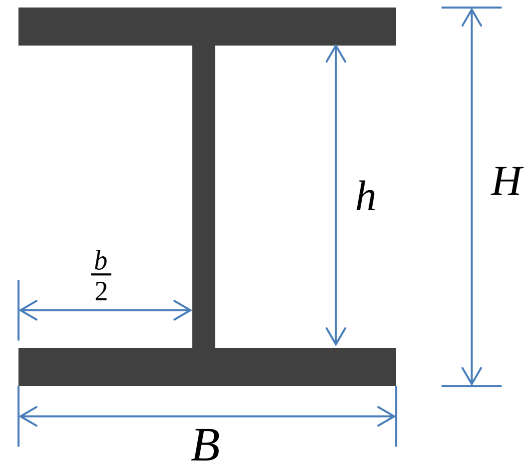


1. massiv bjelke
2. I-bjelke
3. det samme for begge









$$I_A = \frac{1}{12} BH^3$$

$$I_A = \frac{1}{12}(BH^3 - bh^3)$$

$$B = H = 10\,\mathrm{cm}$$

$$b = 9.4\,\mathrm{cm}$$

$$h = 8\,\mathrm{cm}$$

$$I_A = 833\,\mathrm{cm}^4$$

$$A = 100\,\mathrm{cm}^2$$

$$I_A = 432\,\mathrm{cm}^4$$

$$A = 24.8\,\mathrm{cm}^2$$

$$\frac{1}{R} = \frac{\tau}{I_A E}$$