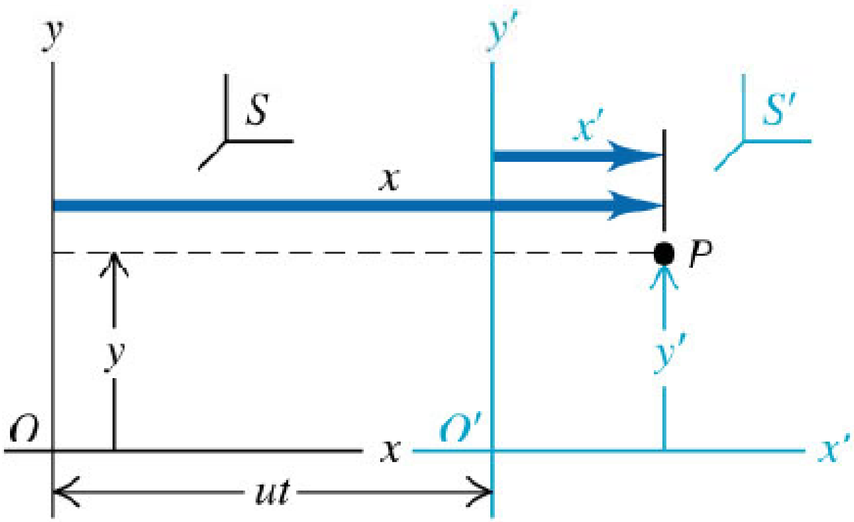
Spesiell relativitetsteori

18.05.2015

Einsteins postulatene

1. Fysikkens lover er de samme i alle inertialsystemer.

2. Lyshastigheten er den samme i alle inertialsystemer, og er uavhengig av observatørens bevegelse.



System *S'* beveger seg relativ til system *S* med hastighet *u*.

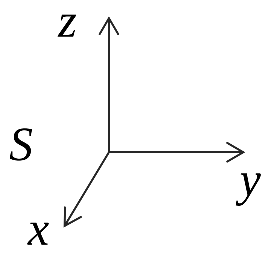
Galileo transformasjon:

$$x = x' + ut \qquad v_x = v'_x + u$$

inkonsistent med Einsteins 2. postulat: $c = c'$

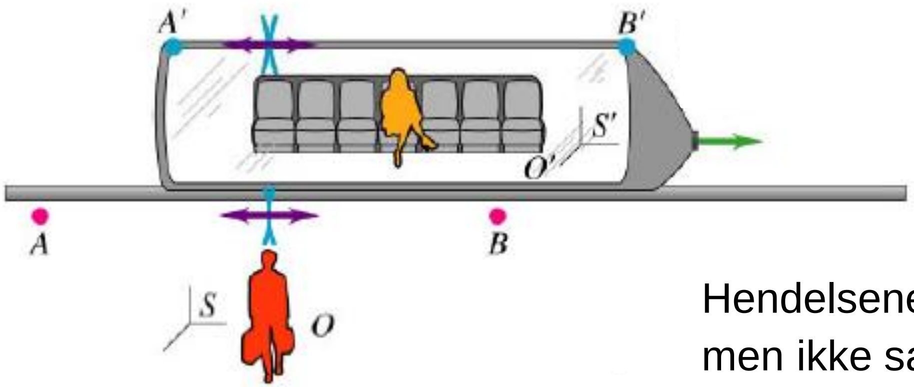
Definisjon av hendelse

En hendelse er en begivenhet (noe) som kan lokaliseres i rom og tid dvs. gis koordinater (x,y,z,t).



Definisjon av samtidighet

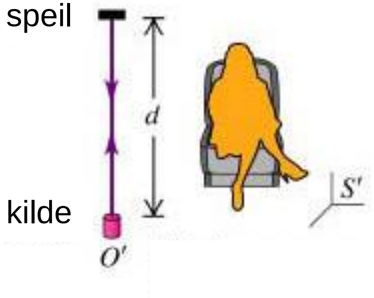
To hendelser er samtidige dersom de inntreffer ved samme tid i ett og samme system S.



Hendelsene samtidig i system S, men ikke samtidig i system S'

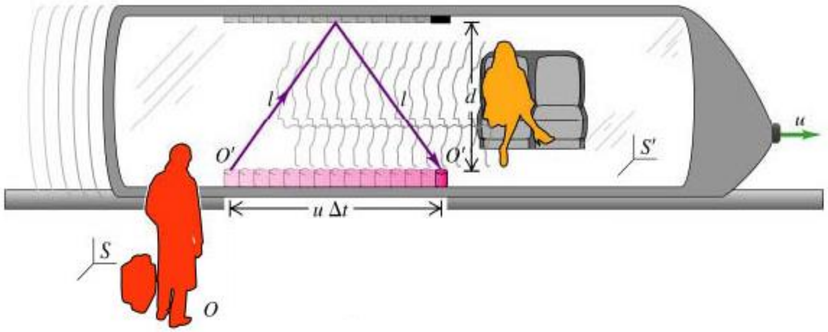
Tidsdilatasjon

Et tidsintervall som er målt mellom to hendelser i et referansesystem der posisjonen er identisk for begge hendelser, kalles ***egentid*** Δt_0.



En annen observatør som beveger seg med konstant fart u relativ til den første måler et tidsintervall:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \gamma\, \Delta t_0$$



tidsdilatsjon: $\Delta t > \Delta t_0$

http://pingo.upb.de/ access number: 8178

En klingon kommandant er på vei til Jorden i sitt romskip med høy hastighet. Han ser på en fotballkamp på Ullevål stadion gjennom et sterk teleskop. Etter sin klokke faller et mål etter 10 minutter. Hvor lenge tar det før målet faller hvis du tar tiden fra tribunen?

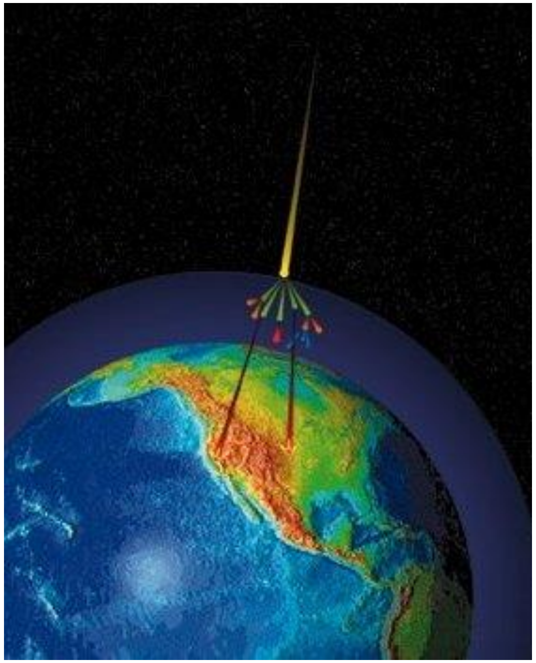
A. mer enn 10 minutter
B. nøyaktig 10 minutter
C. mindre enn 10 minutter

Hendelse 1: kampen begynner
Hendelse 2: målet faller

Vi måler egentid Δt_0 i system «Jorden» hvor begge hendelser skjer på samme sted.

Klingon kommandant måler $\Delta t = \gamma \Delta t_0 > \Delta t_0$ i system «romskip».

Eksempel: myoner



Myoner er elementærpartikler som kan oppstår når høyenergetisk kosmisk stråling treffer på jordens atmosfæren (i ~15 km høyde).

Pga. den høyenergetisk kosmisk stråling har myoner høy hastighet: $v = 0.999\,c$

~150 myoner / (s m²) på bakken

henfall: $\mu^- \rightarrow \nu_\mu + e^- + \bar{\nu}_e$

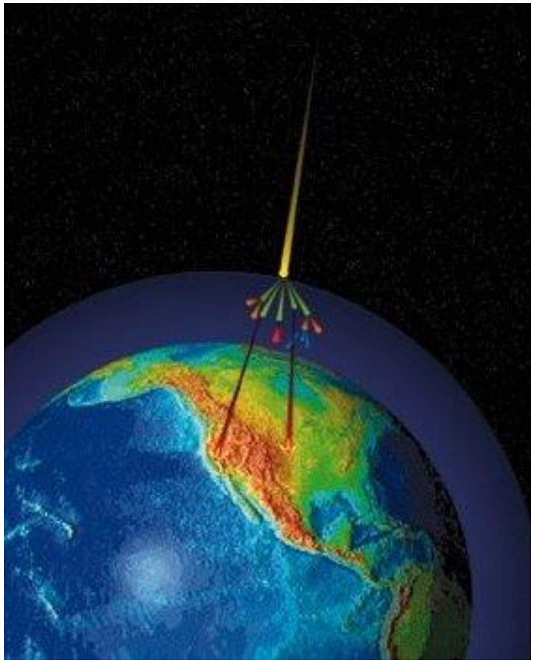
gjennomsnittlig levetid målt i laboratoriet $\tau = 2.2\,\mu\mathrm{s}$

hvor lenge kommer myonet i sin levetid?

$$x = \tau\, v = 2.2 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{s} \cdot 3 \cdot 10^{8}\ \mathrm{m/s} = 660\ \mathrm{m}$$

Hvordan er det mulig at myoner treffer bakken?

Eksempel: myoner



Vi har blandet referansesystemer !

- levetid er målt i referansesystem til myonet
- strekning gjennom atmosfæren er målt i jordens referansesystem

hendelse 1: myon oppstår
hendelse 2: myon henfaller

i system tilknyttet myonet:
begge hendelser inntreffer på samme sted
tidsintervallet er egentid $\Delta t_0 = \tau = 2.2\ \mu$s

Jorden beveger seg med $v = 0.999\ c$ relativ til myonet,
sett fra jorden er levetid til myonet:

$$\Delta t = \gamma\, \Delta t_0 = \frac{2.2\ \mu\text{s}}{\sqrt{1-0.999^2}} = 49\ \mu\text{s}$$

hvor lenge kommer myonet i jordens referansesystem?

$$x = \Delta t\, v = 49 \cdot 10^{-6}\ \text{s} \cdot 3 \cdot 10^{8}\ \text{m/s} = 14.7\ \text{km}$$

Hvordan kan vi måle en lengde?

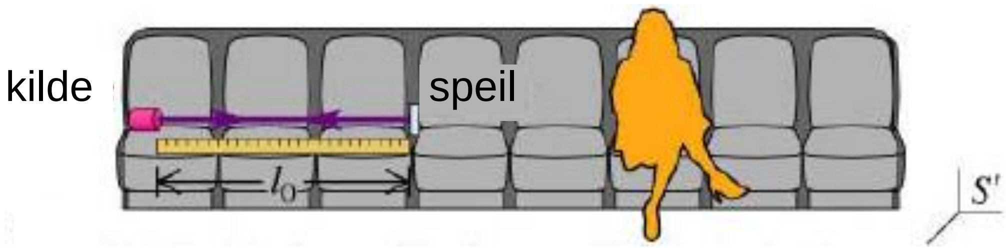
Det er enkelt hvis objektet er i ro:
Vi bestemmer posisjon til begge endene,
og det spiller ingen rolle når vi gjøre det.

Hva hvis vi vil måle lengden
til en bil som kjører?

Vi kan bestemme posisjonen
til begge endene, men vi må
gjøre de **samtidig**.

Problem: to hendelser som er samtidig i ett
referansesystem er ikke samtidig i et annet.

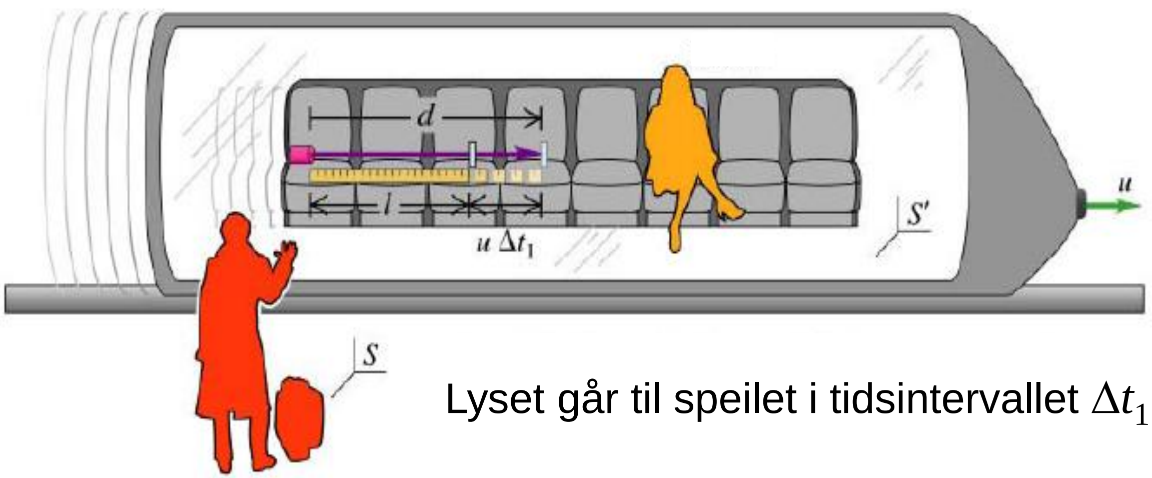
Tankeeksperiment



En lyskilde er festet på venstre enden av en linjal og et speil på høyre enden.

Linjalen er i ro i system S' og har lengden l_0. Lyset går til speilet og tilbake i tidsintervall Δt_0 (egentid).

$$\Delta t_0 = \frac{2l_0}{c}$$



I system S beveger linjalen seg med fart u og en observatør måler lengden l.

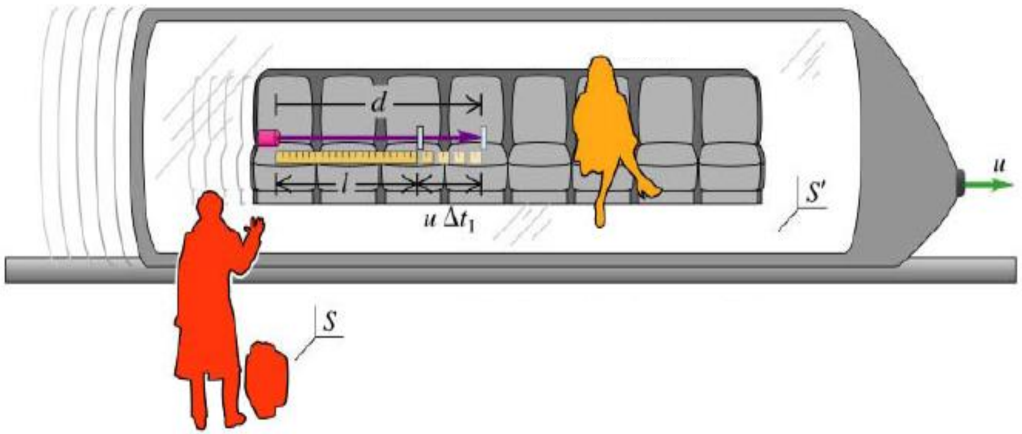
Lyset går til speilet i tidsintervallet Δt_1 og dekker avstanden $d_1 = l + u\Delta t_1$

Lyset beveger seg med hastighet c: $d_1 = c\Delta t_1$

$$c\Delta t_1 = l + u\Delta t_1$$

$$\Delta t_1 = \frac{l}{c-u}$$

(det betyr ikke at lyset beveger seg med hastighet $c - u$)



Lyset går tilbake i tidsintervallet Δt_2 og dekker avstanden:

$$d_2 = l - u\Delta t_2 = c\Delta t_2$$

$$\Delta t_2 = \frac{l}{c+u}$$

tiden lyset bruker for å gå frem og tilbake:

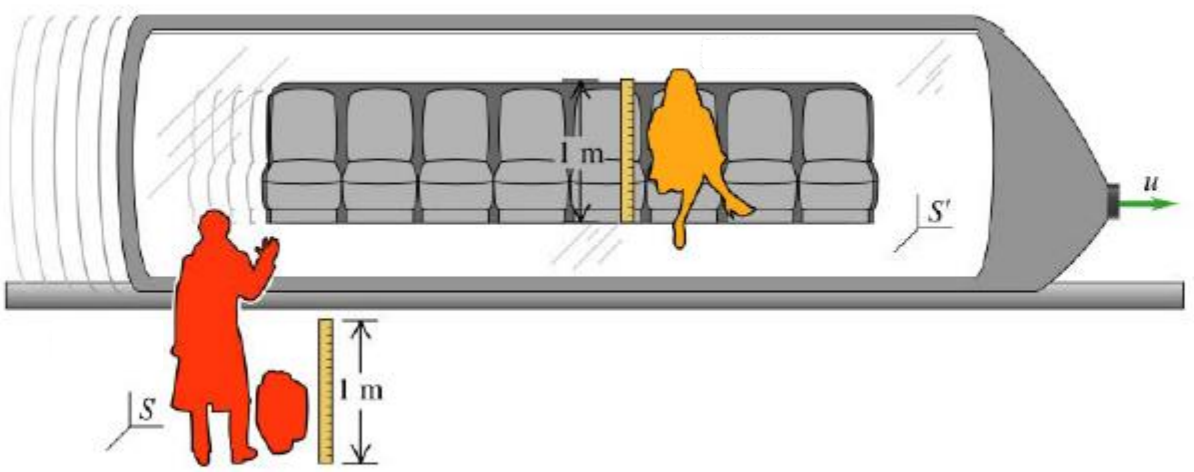
$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \frac{l}{c-u} + \frac{l}{c+u} = \frac{l(c+u)+l(c-u)}{c^2-u^2} = \frac{2l}{c\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)} = \gamma^2\frac{2l}{c}$$

tidsdilatasjon: $\Delta t = \gamma\,\Delta t_0 = \gamma\frac{2l_0}{c} = \gamma^2\frac{2l}{c}$

lengdekontraksjon: $l = \frac{l_0}{\gamma}$

En lengde som måles i et koordinatsystem hvor legemet er i ro kalles **egenlengde**.

Lengden vi måler i et koordinatsystem som beveger seg relativ til legemet er kortere: **lengdekontraksjon**.

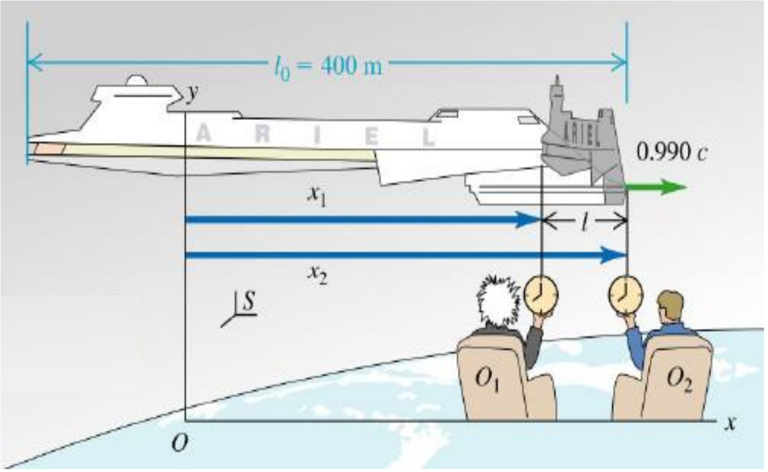


det er ingen lengdekontraksjon
vinkelrett på bevegelsesretningen

http://pingo.upb.de/ access number: 8178

Et romskip flyr forbi jorden med $v = 0.99\ c$. En person i romskipet måler at romskipet er 400 m lang. Hvilken lengde måler en observatør på jorden?

A. 56.4 m
B. 400 m
C. 2.84 km



$l_0 = 400\ \mathrm{m}$ er egenlengden til romskipet

En observatør på jorden beveger seg med hastighet $v = 0.99\ c$ relativ til romskipet.

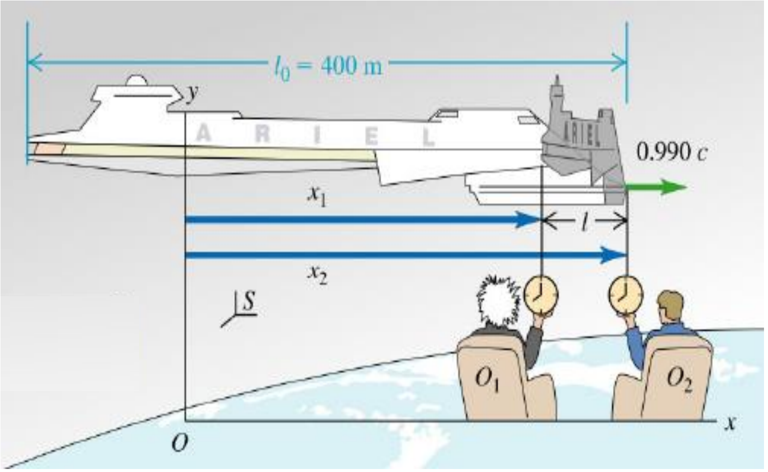
lengdekontraksjon: $l = \frac{l_0}{\gamma}$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = 7.1$$

$$l = \frac{400\,\mathrm{m}}{7.1} = 56.4\,\mathrm{m}$$

http://pingo.upb.de/ access number: 8178

To observatører O_1 og O_2 sitter i avstand 56.4 m på jorden. Hvilken avstand vil mannskapet måle fra et romskip som beveger seg med $v = 0.99\,c$ relativ til jorden?



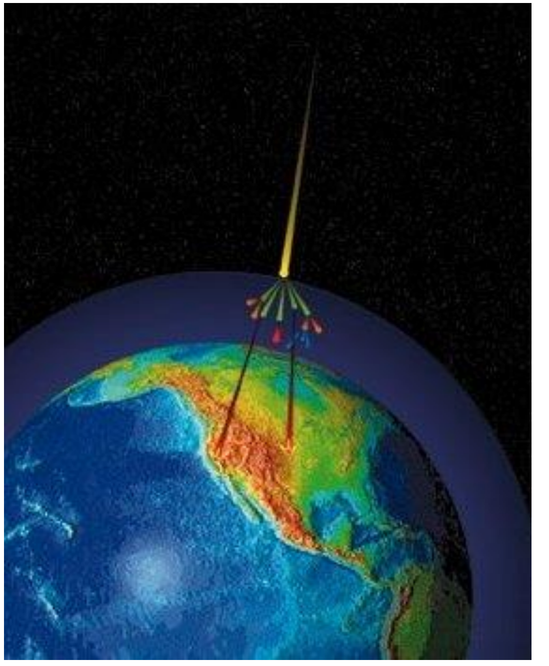
A. 7.96 m
B. 56.4 m
C. 400 m

I system jorden er observatørene i ro.
Avstand mellom de to målt på jorden er egenlengden: $l_0 = 56.4\,\mathrm{m}$

Romskipet beveger seg med hastighet $v = 0.99\,c$ relativ til jorden: $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}} = 7.1$

lengdekontraksjon: $l = \dfrac{l_0}{\gamma} = \dfrac{56.4\,\mathrm{m}}{7.1} = 7.96\,\mathrm{m}$

Eksempel: myon



I systemet hvor myonet er i ro er levetid Δt_0 = 2.2 μs (egentid)

I laboratoriesystemet er levetid lenger på grunn av tidsdilatasjon:
for $v = 0.999\ c$ har vi funnet:

$$\Delta t = \gamma\, \Delta t_0 = 49\,\mu\text{s}$$

Sett fra jorden beveger myonet seg en strekning:

$$l_0 = c\,\Delta t = 14.7\ \text{km}$$

Det er egenlengden siden jeg som observatør måle strekningen i ro.

I myonets system beveger jorden seg,
og myonet ser strekningen kontrahert:

$$l = \frac{l_0}{\gamma} = 653\,\text{m}$$

Det tilsvarer lengden myonet
beveger seg i sin egentid:

$$l = c\,\Delta t_0$$

$v = 0$

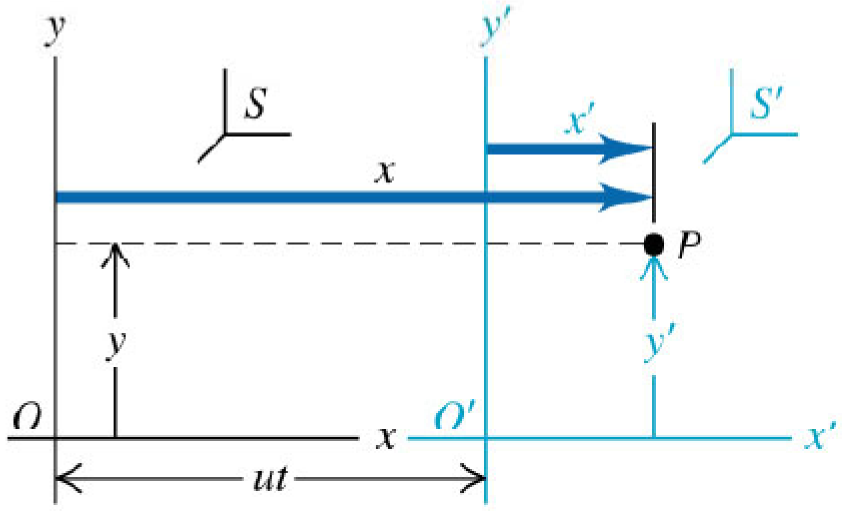
$v = 0.8c$

$v = 0.95c$

$v = 0.99c$

Lorentz transformasjon

system S: (x, y, z, t)
system S': (x', y', z', t')
S' beveger seg med hastighet u relativ til S.



posisjon til O' i system S ved tid t er ut

x' er egenlengde i S',
men kontrahert i S:

$$x = ut + \frac{x'}{\gamma}$$

transformasjon $S \rightarrow S'$

$$x' = \gamma(x - ut) = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

transformasjon $S' \rightarrow S$:

$$x' = -ut' + \frac{x}{\gamma}$$

(motsatt fortegn for relativhastigheten u)

$$\frac{x - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = -ut' + x\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

$$ut' = \frac{x\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) - (x - ut)}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

$$t' = \frac{t - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \gamma\left(t - \frac{u}{c^2}x\right)$$

Lorentz transformasjon

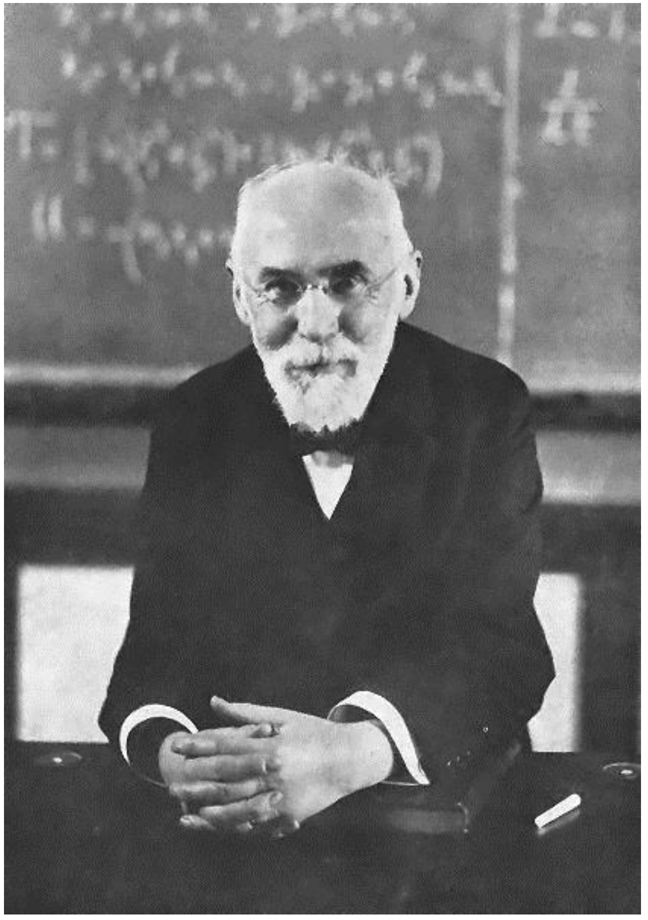
transformasjon tilbake:
omvendt fortegn for u og bytte S og S'

$$x' = \gamma(x - ut) \qquad x = \gamma(x' + ut')$$

$$y' = y \qquad y = y'$$

$$z' = z \qquad z = z'$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{u}{c^2}x\right) \qquad t = \gamma\left(t' + \frac{u}{c^2}x'\right)$$



Hendrik Antoon Lorentz
1853 – 1928

lengdekontraksjon

et legeme i ro i system S' har **egenlengde**: $L' = x_1' - x_2'$

legemet beveger seg i system S
$\Rightarrow$ vi må måle posisjonene x_1 og x_2 **samtidig** ($t_1 = t_2$)

$$L' = x_1' - x_2' = \gamma(x_1 - ut_1) - \gamma(x_2 - ut_2)$$

$$= \gamma(x_1 - x_2) - \gamma u(t_1 - t_2) = \gamma(x_1 - x_2) = \gamma L$$

$$L = \frac{L'}{\gamma}$$

tidsdilatasjon

egentid: vi maler et tidsintervall Δt' på samme sted: $x_1' = x_2'$

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \gamma(t_1' + \frac{u}{c^2}x_1') - \gamma(t_2' + \frac{u}{c^2}x_2')$$

$$= \gamma(t_1' - t_2') + \gamma\frac{u}{c^2}(x_1' - x_2') = \gamma\,\Delta t'$$

Lorentz transformasjon for hastighet

et partikkel beveger seg i system S med hastighet $v_x = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$

og i system S' med hastighet $v_x' = \dfrac{\Delta x'}{\Delta t'}$

Lorentz transformasjon: $\Delta x' = \gamma(\Delta x - u\Delta t)$ $\Delta t' = \gamma(\Delta t - \dfrac{u}{c^2}\Delta x)$

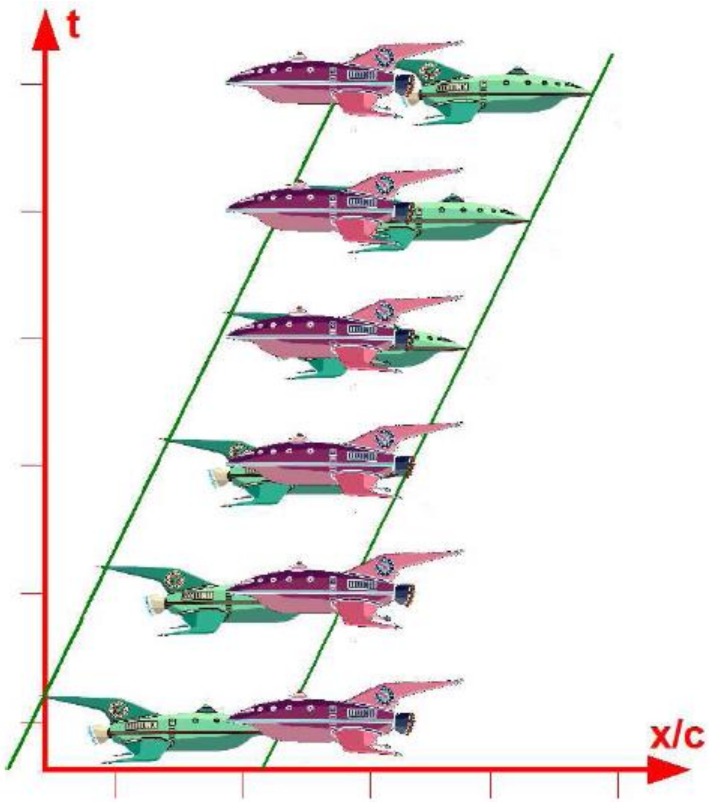
$$v_x' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\Delta x - u\Delta t}{\Delta t - \frac{u}{c^2}\Delta x} = \frac{\frac{\Delta x}{\Delta t} - u}{1 - \frac{u}{c^2}\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{v_x - u}{1 - \frac{u}{c^2}v_x}$$

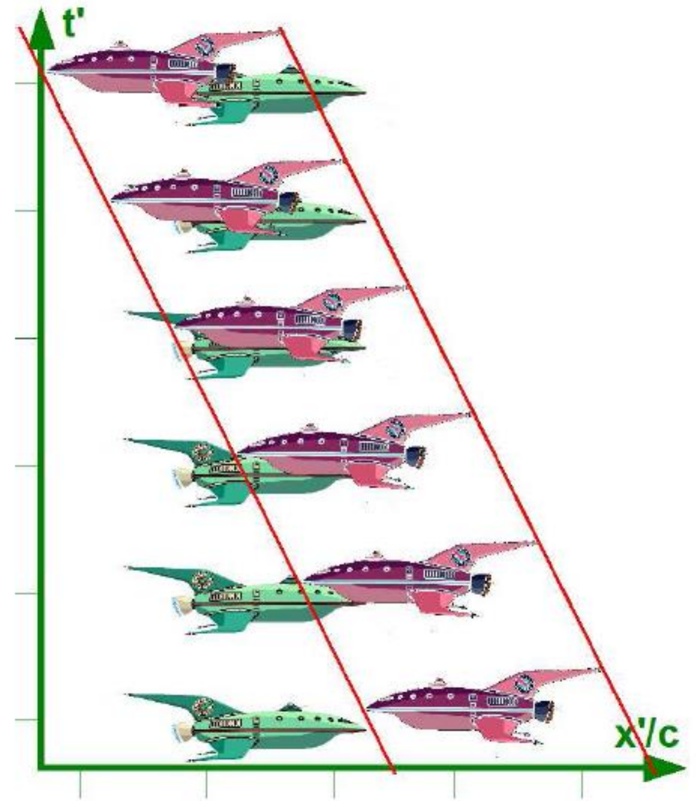
hvis $u << c$: $v_x' = v_x - u$ $\Rightarrow$ Galileo transformasjon

hvis: $v_x = c$ $v_x' = \dfrac{c-u}{1 - \frac{u}{c^2}c} = \dfrac{c\left(1 - \frac{u}{c}\right)}{1 - \frac{u}{c}} = c$ $\Rightarrow$ Einsteins 2. postulat

Minkowski diagrammer

to romskip passerer hverandre





system S hvor romskip 1 er i ro

stigning gir hastighet til romskip 2

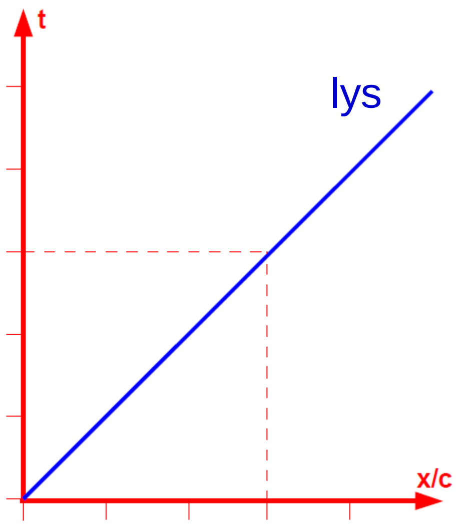
$$v_2 = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

system S' hvor romskip 2 er i ro

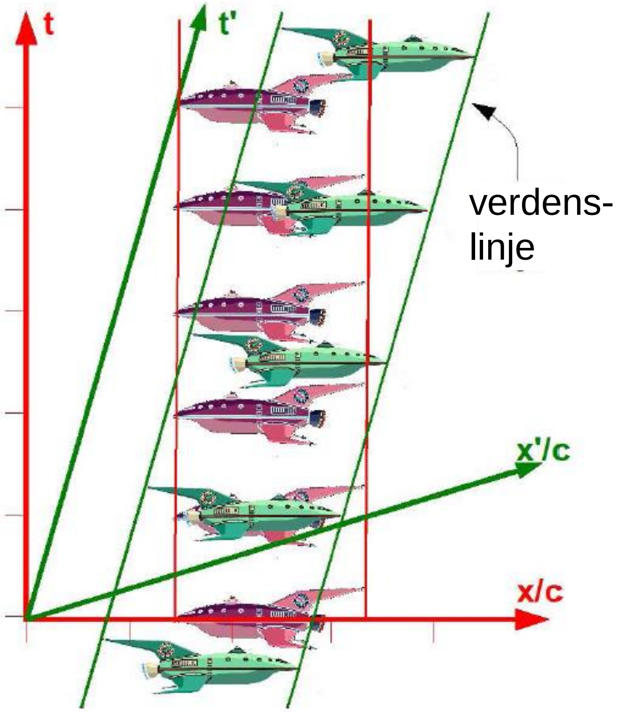
stigning gir hastighet til romskip 1

$$v_1' = \frac{\Delta s'}{\Delta t'}$$

Minkowski diagrammer



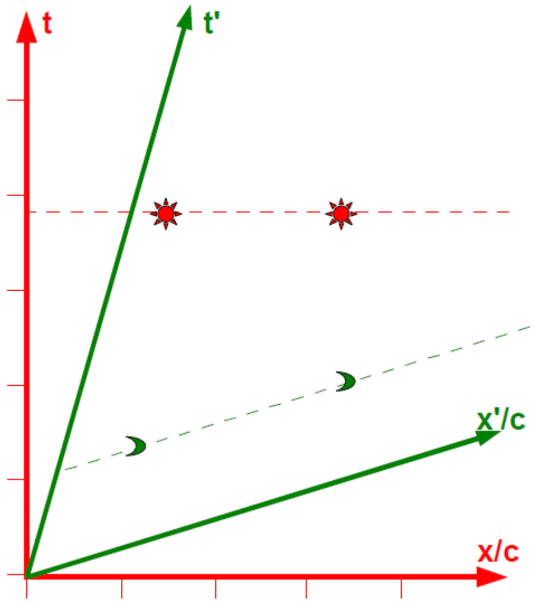
Hermann Minkowski
1864 – 1909



vi tegner begge systemer i ett diagram:

jo fortere S' beveger seg relativ til S, jo mindre er vinkelen for S'.

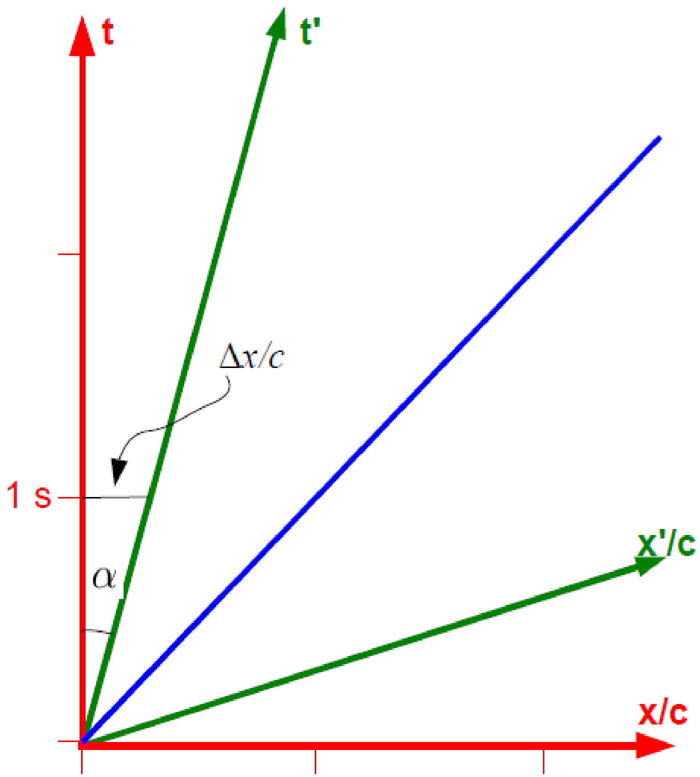
Objekter beveger seg langs verdenslinjer gjennom tiden.



to hendelser som er samtidig i romskip 1

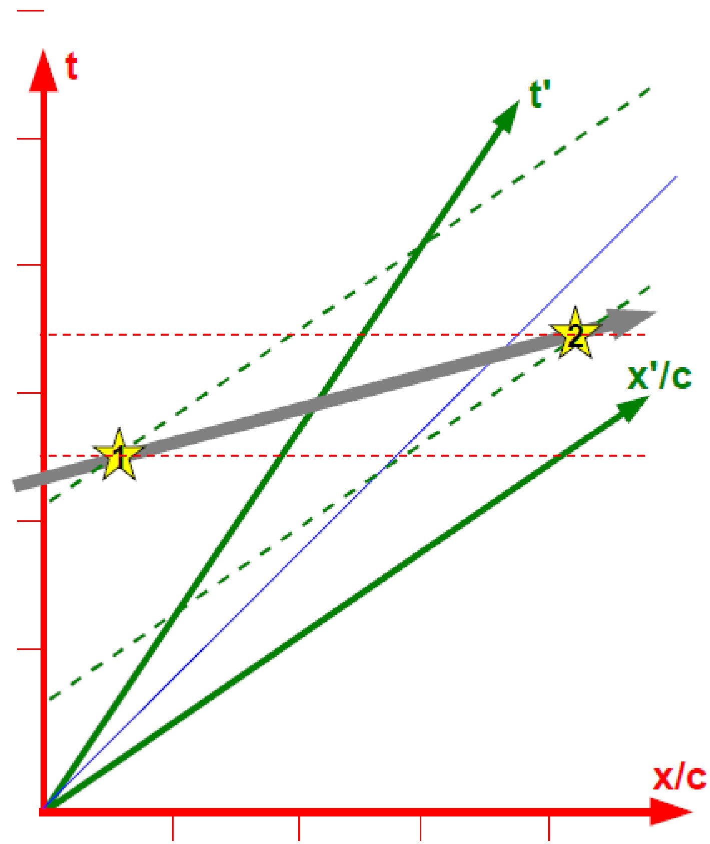
to hendelser som er samtidig i romskip 2

Minkowski diagrammer



$$\tan\alpha = \frac{\Delta x / c}{\Delta t} = \frac{v}{c}$$

warp drive?



hvis et romskip kunne bevege seg med $v > c$:

hendelse 1 før hendelse 2 i system S
hendelse 2 før hendelse 1 i system S'

http://pingo.upb.de/ access number: 8178

Luke er astronaut og tar en tur til planeten Dagobah og tilbake.
Hans tvillingsøster Leia forblir hvor hun er.

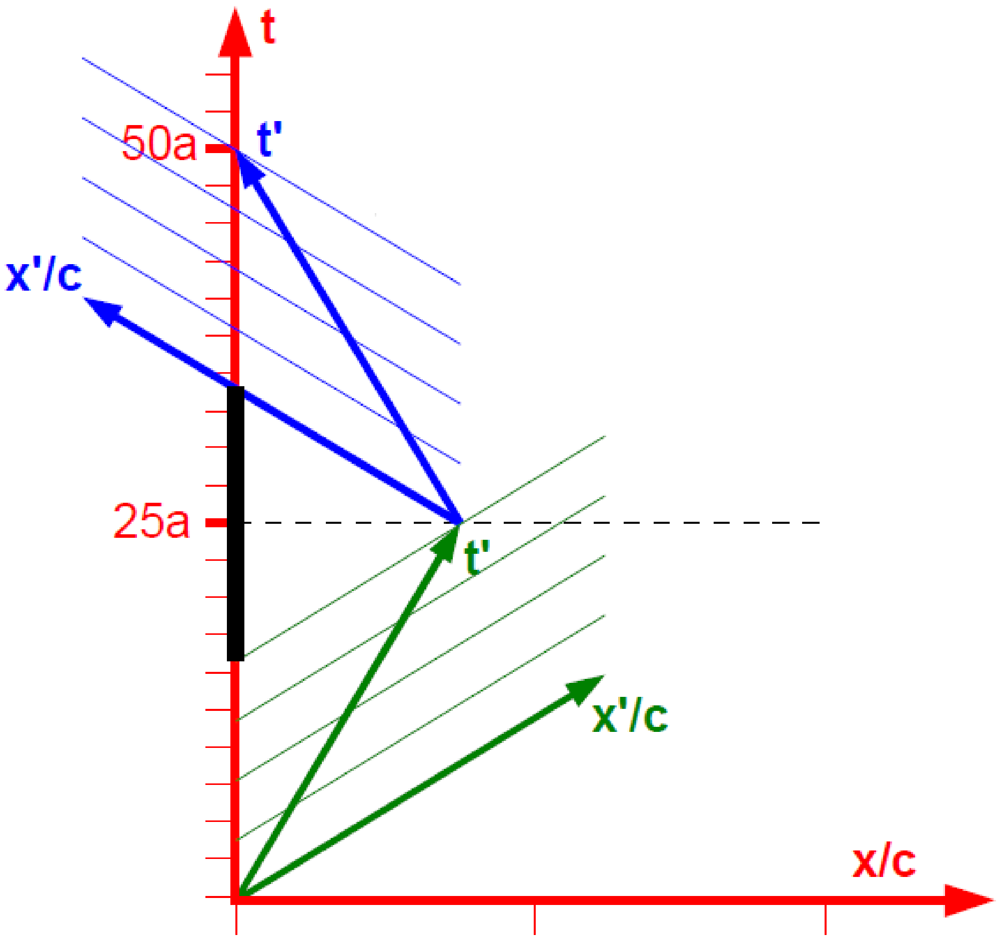
Pga. hans høy hastighet går tiden saktere for Luke (tidsdilatasjon) og han er yngre enn Leia når han kommer tilbake.

Sett fra Lukes synspunkt i romskipet beveger Leia seg med høy hastighet, så tiden går saktere for Leia og Luke er eldre når han kommer tilbake.

Når Luke kommer tilbake:

1. er Luke yngre enn Leia
2. er begge like gammelt
3. er Luke eldre enn Leia
4. dette er et paradoks og det finnes ingen svar

Tvillingparadokset



Leia forbli it et inertialsystem, men Luke trenger en akselerasjon for å snu retningen og returnere til jorden.

På veien tilbake befinner Luke seg i et annet inertialsystem.

Horisontale linjer tilsvarer hendelser som Leia oppfatter som samtidig.

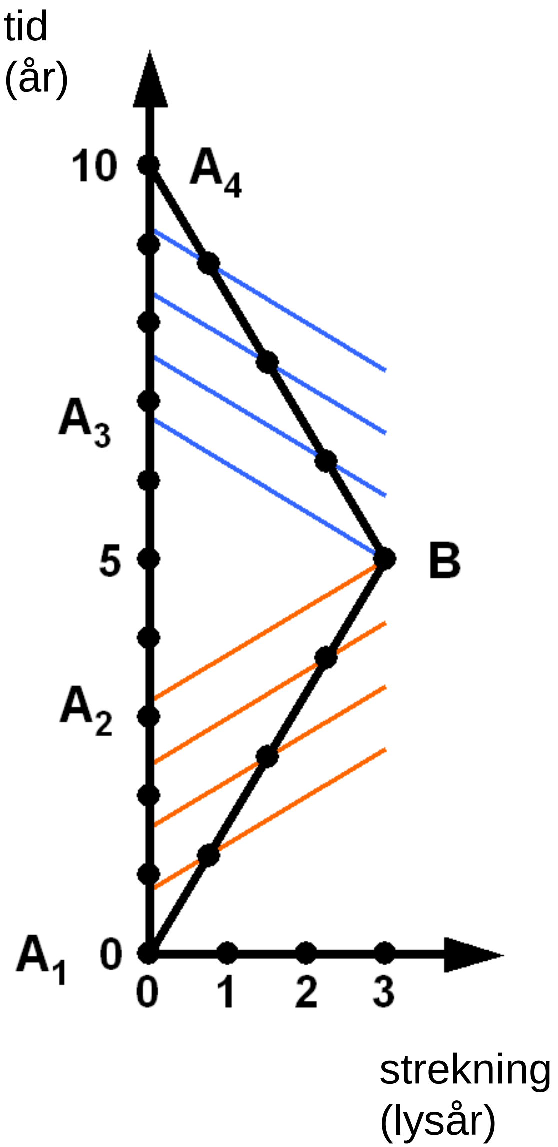
På veien bort oppfatter Luke hendelser på de grønne linjene som samtidig, mens på veien tilbake oppfatter Luke hendelser på de blå linjene som samtidig.

Luke oppfatter at Leia eldes meget rask mens han snu retningen.

Leia ser at Luke beveger seg hele tiden, og tiden går alltid saktere for Luke.

$\Rightarrow$ Luke er yngre enn Leia nor han kommer tilbake til jorden.

Tvillingparadokset



Luke reiser med $v = 0.6\,c$ fra A til B og tilbake

Leias perspektiv:

- strekning er 3 lysår (egenlengde)
- Luke trenger 5 år fram og 5 år tilbake

Lukes perspektiv:

- strekningen er bare $\Delta x' = \frac{\Delta x}{\gamma} = 2.4$ lysår
- han blir 4 år eldre
- bare 3.2 år har gått på jorden

mens Luke snur:

- bytter han kontinuerlig referansesystemet.
- Går 3.6 år på jorden

veien tilbake fra Lukes perspektiv:

- han reiser 2.4 lysår og blir 4 år eldre
- på jorden går det 3.2 år

Også fra Lukes perspektiv
har det gått 10 år på jorden,
mens han aldret bare 8 år.