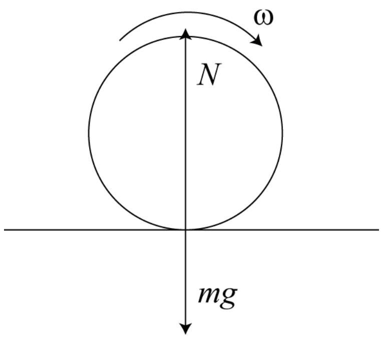
Løsningsforslag

Eksamen i Fys-mek1110/Fys-mef1110 høsten 2007

Oppgave 1

a) *En kule ruller med konstant hastighet bortover et horisontalt bord. Gjør rede for og tegn inn kreftene som virker på kulen.*

Det virker kun to krefter på kulen, normalkraften, N, og gravitasjonskraften, mg. Kulen ruller med konstant hastighet, det er da ingen friksjonskraft eller luftmotstand på kulen.



b) *I den spesielle relativitetsteorien er det viktig å skille mellom hendelser og observasjoner av hendelser. Forklar hvorfor det er viktig å skille mellom observasjoner av hendelser og hendelsene. Gi et eksempel på at to hendelser A og B inntreffer samtidig i referansesystemet S, men observeres til forskjellig tid av to observatører i ro i referansesystemet S. Gi også et eksempel på at to hendelser A og B ikke inntreffer samtidig i referansesystemet S, men observeres til samme tid av to observatører i ro i referansesystemet S.*

Den spesielle relativitetsteori forteller hvordan vi kan relatere hendelser i forskjellige referansesystemer til hverandre. Observasjonene av hendelsene vil være avhengig av en observatørs posisjon i referansesystemet, mens alle observatører i ro i samme referansesystem vil være enige om posisjon og tid for en hendelse i referansesystemet.
Eksempel 1: To vulkaner som ligger 3 km fra hverandre bryter ut samtidig i referansesystem S. Da vil Ole som står i ro midt mellom vulkanene observere at utbruddene inntreffer samtidig, mens Kari som står i ro ved den ene vulkanen vil se utbruddet fra den nærmeste vulkanen før utbruddet fra vulkanen som er lengre unna.
Eksempel 2: To vulkaner bryter ut til forskjellig tid i referansesystem S. La vulkan A bryte ut ved tiden 0s og vulkan B bryter ut ved tiden t. En observator som befinner seg i avstanden x_A fra vulkan A og i avstanden x_B fra vulkan B. Han vil da observere et lyssignal fra vulkan A ved tiden $t_A = x_A / c$ og et lyssignal fra vulkan B ved tiden $t_B = x_B / c + t$. Observasjonen av hendelsene vil være samtidig dersom $t_A = t_B$, dvs. dersom $t = (x_A - x_B)/c$. Det vil være mange punkter som tilfredsstiller denne likheten, det finnes derfor mange mulige posisjoner for observatører som observerer hendelsene samtidig.

c) *En bil kjører med konstant fart v over en bakketopp med krumningsradius R. Finn et uttrykk for ved hvilken hastighet v bilen mister kontakten med underlaget. Tyngdens akselerasjon er g. Beskriv bilens bane etter at den har mistet kontakten med underlaget.*

Bilens bane bestemmes av bilens akselerasjon som bestemmes av kreftene som virker på bilen.

Kreftene som virker normalt på banen er normalkraften N og tyngdekraften mg. Newtons andre lov for bilen i retningen normalt på banen i toppen av bakken gir

$$mg - N = ma\ .$$

For at bilen skal følge en sirkelbane med radius R på toppen av bakken må bilens akselerasjon normalt på banen svare til sentripetalakselerasjonen:

$$a = v^2 / R = g - N / m\ .$$

Dersom akselerasjonen er mindre enn dette vil ikke bilen følge en sirkelbane og vil miste kontakten med underlaget.
Siden normalkraften må være positiv, ser vi at den største hastigheten bilen kan ha og fremdeles beholde kontakten med underlaget inntreffer når normalkraften er null. Det gir

$$v_{\max}^2 / R = g\ .$$

Hastigheten må derfor være mindre eller lik denne maksimale hastigheten

$$v \le v_{\max} = \sqrt{gR}\ .$$

Når bilen mister kontakten med underlaget vil den kun påvirkes av tyngdekraften og luftmotstanden. Bilen vil derfor følge en bane som for skrått kast med luftmotstand.

d) Vi lager en stav av et isotropt elastisk materiale med Youngs modulus E og Poissons forhold ν. Dersom staven strekkes i z-retningen oppfører den seg som en fjær med fjærkonstant k. Hva blir fjærkonstanten k' for strekning i z-retningen for en stav som i forhold til den opprinnelige staven er dobbelt så lang i z-retningen, men halvparten så lang i x-retningen og halvparten så lang i y-retningen?

Fra elastisitetsteorien vet vi at spenningen er relatert til tøyningen:

$$\frac{F}{A} = E\frac{\Delta L}{L}\ .$$

Hvor ΔL er forlengelsen i z-retningen, og L er lengden av staven i z-retningen, og $A = ab$ er arealet av tverrsnittet, som er proporsjonalt med lengden a i x-retningen multiplisert med lengden b i y-retningen.
Ved å skrive om denne likningen ser vi at

$$F = E\frac{A}{L}\Delta L = k\Delta L\ .$$

Det betyr at stangen oppfører seg som en fjær med fjærkonstant k.
Vi lager så en stav med lenden $L' = 2L$ som bredder $a' = a/2$ og $b' = b/2$. For denne staven finner vi fjærkonstanten

$$k' = E\frac{a'b'}{L'} = E\frac{(a/2)(b/2)}{2L} = \frac{1}{8}E\frac{ab}{L} = \frac{1}{8}E\frac{A}{L} = \frac{1}{8}k\ .$$

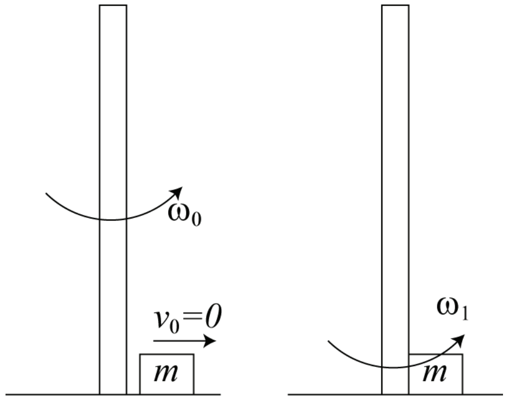
e) Beskriv en prosess som beskrives av følgende likning:

$$I\omega_0 = \left(I + mL^2\right)\omega_1\ .$$

Lag en figur som illustrerer prosessen.

Det finnes mange prosesser som kan beskrives med denne likningen. Vi ser at likningen beskriver bevaring av spinn, f.eks. i en kollisjon. Den kan for eksempel beskrive et legeme som for kollisjonen roterer med vinkelhastighet ω_0. I kollisjonen blir den hengende sammen med et legeme med masse m som er i avstanden L fra rotasjonspunktet.

Et mulig system er en pendel bestående av en stav med lengde L som svinger om en av endene og kolliderer med et stillestående legeme med masse m som henger seg fast i avstanden L fra rotasjonsaksen.



f) Vi har to identiske bokser med mineralvann. Den ene boksen puttes i fryseren til innholdet har frosset til is. Vi antar at formen til boksen ikke endres. Dersom vi triller de to boksene ned det samme skråplanet, hvilken boks vil komme først ned. Begrunn svaret.

Vi vet at akselerasjonen for et legeme som ruller uten å skli ned et skråplan er gitt som

$$a = g\sin(\theta)\frac{1}{1+I/mR^2}.$$

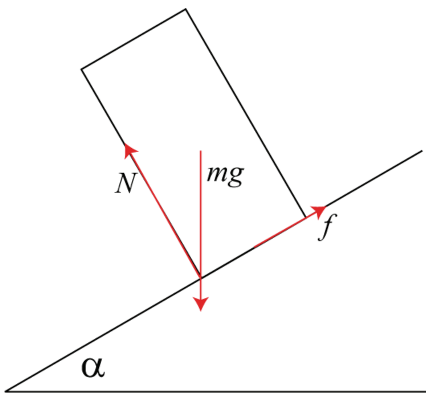
Hvor θ angir vinkelen med horisontalen, g er tyngdens akselerasjon, m er massen til legemet og R er radius til legemet. (Se f.eks. lærebok eller forelesningsnotater). Vi ser av dette at akselerasjonen avtar med treghetsmomentet.
For den frosne boksen vil hele legemet, inkludert væsken, rotere som et stivt legeme, mens for boksen som ikke er frosset vil væsken inne i boksen i begynnelsen ikke helt følge rotasjonen. Treghetsmomentet for denne rotasjonen er derfor større for den frosne enn for den ikke-frosne boksen. Vi forventer derfor at den frosne boksen vil komme sist ned.

Merk at dette ikke er det eneste svaret som ville gitt full uttelling på denne oppgaven. Alle argumenter med gode, fysiske begrunnelser vil gi full uttelling. Et fullgodt alternativ er å bruke energi-argumenter. Her kan man også argumentere for at i boksen med væske vil det være mer tap av energi pga. væskerotasjon enn i den andre, og at det kan bety at den kommer senere ned. Man kan også argumentere for at i flasken med væske vil væsken spinnes ut mot kanten, og den ikke-frosne boksen vil følgelig ha større treghetsmoment om massesenteret, og dermed komme senere ned. Hvordan avgjøre hva som faktisk skjer? Prøv selv!

Oppgave 2

I denne oppgaven skal vi studere en kloss som står på et skråplan. Klossen har masse m, høyde h og bredde b og er laget av et homogent materiale. Skråplanet har vinkelen α med horisontalen. Den statiske friksjonskoeffisienten mellom klossen og skråplanet, μ, er så stor at klossen ikke begynner å skli.

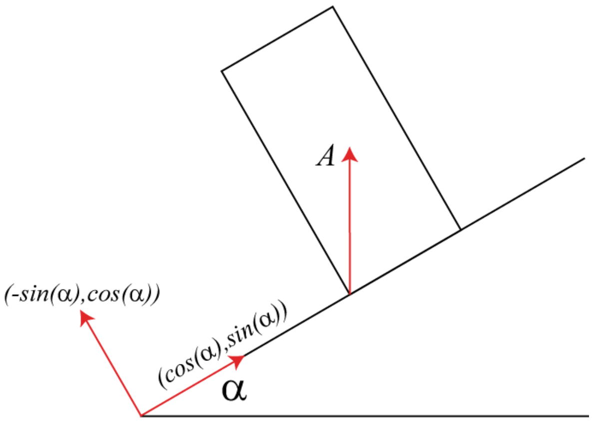
a) Skisser kreftene som virker på klossen rett før den tipper.



I denne oppgaven er det viktig å huske på at vi ikke vet hvordan normalkreftene fra underlaget på klossen fordeler seg langs kontakten mellom klossen og skråplanet. Før klossen tipper vil normalkreftene fordele seg slik at kraftmomentet fra normalkreftene om det nederste kontaktpunktet til klossen vil balansere kraftmomentet fra tyngdekraften om det samme punktet, da netto kraftmoment om et vilkårlig punkt må være null i likevekt.

Idet klossen er i marginal likevekt - det vil si at en vilkårlig liten økning i hellingen vil få klossen til å tippe – vil normalkreftene kun virke i det nederste kontaktpunktet. Vi tegner dem derfor kun inn der i figuren.

b) *Gitt vinkelen α, bredden b og massen m finn ved hvilken høyde h klossen begynner å tippe.*



Klossen vil begynne å tippe idet kraftmomentet av tyngdekraften om det nederste kontaktpunktet blir positivt da normalkreftene, som kun kan gi et positivt bidrag til kraftmomentet om dette punktet, ikke lenger vil kunne balansere kraftmomentet fra tyngden. Dette svarer til at massesenteret befinner seg utenfor det nederste kontaktpunktet.
Vi kan løse oppgaven ved å inne enkle geometriske relasjoner eller ved en generell tilnærming som ikke er avhengig av detaljert geometrisk innsikt. Vi velger siste strategi. Vi finner vektoren $\vec{A}$ ved å sette sammen en vektor langs skråplanet med en vektor normalt på skråplanet:

$$\vec{A} = \frac{b}{2}(\cos(\alpha), \sin(\alpha)) + \frac{h}{2}(-\sin(\alpha), \cos(\alpha)).$$

Klossen tipper idet x-komponenten av $\vec{A}$ blir negativ:

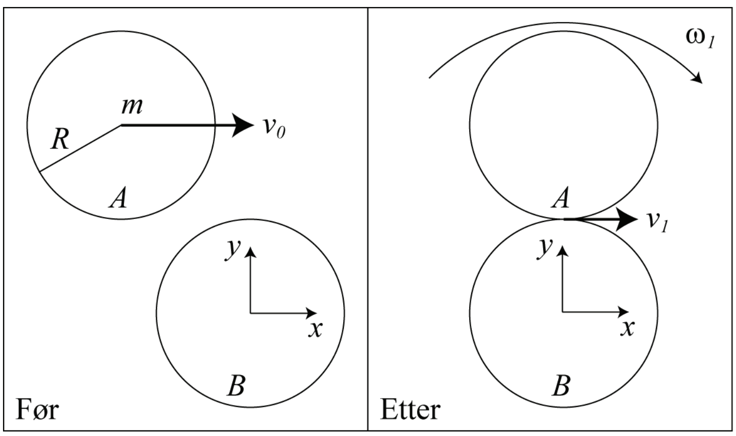
$$\frac{b}{2}\cos(\alpha) - \frac{h}{2}\sin(\alpha) < 0.$$

Betingelsen for h for tipping blir da

$$h > b / \tan(\alpha).$$

Oppgave 3

I denne oppgaven skal vi studere en kollisjon mellom to kuleformede partikler. Vi kan tenke på det som en veldig enkel modell for en kollisjon mellom to atomer som binder seg til hverandre med en sterk (kovalent) binding. Systemet består av to identiske, homogene kuler, kulene A og B. Vi velger vårt referansesystem slik at kule B ligger i ro før



kollisjonen. Vi ser på en kollisjon hvor de to kulene akkurat berører hverandre i kollisjonen, som illustrert i figuren. I berøringspunktet hektes de sammen idet de treffer hverandre, og de fortsetter videre som ett, sammenkoblet legeme. Kulene har radius R og masse m. Kule A har hastigheten v_0 før kollisjonen. Treghetsmomentet til en kule om en akse gjennom massesenteret er $I_c = \frac{2}{5}mR^2$.

a) *Vis at treghetsmomentet om massesenteret for to kuler som er festet sammen i et punkt på randen av kulene er*

$$I = \frac{14}{5}mR^2$$

Treghetsmomentet for to legemer som er festet sammen er summen av treghetsmomentene. Massesenteret til de to sammenfestede kulene vil være i sammenfestingspunktet som er på randen av kulene. Treghetsmomentet for en kule om et punkt på randen av kulen finner vi ved parallell-akse-teoremet. Forflytningen av rotasjonsaksen er i dette tilfellet lik kulens radius:

$$I = I_c + mR^2 = \frac{2}{5}mR^2 + mR^2 = \frac{7}{5}mR^2 .$$

Treghetsmomentet for to slike kuler festet sammen er derfor det dobbelte av dette.

b) *Finn hastigheten til legemet etter støtet.*

Da det ikke virker noen ytre krefter på legemene vil bevegelsesmengden til systemet være bevart i kollisjonen.

$$p_{før} = mv_0 = p_{etter} = (2m)v_1 ,$$

som gir

$$v_1 = v_0 / 2 .$$

c) *Finn vinkelhastigheten om massesenteret til legemet etter støtet.*

Da det ikke virker noen ytre krefter på legemene vil spinnet om massesenteret for systemet være bevart i kollisjonen.

$$L_{før} = mv_0R = I\omega_1 ,$$

som gir

$$\omega_1 = \frac{mR}{I}v_0 = \frac{mR}{14mR^2/5}v_0 = \frac{5}{14}\frac{v_0}{R} .$$

d) *Vis at endringen i kinetisk energi for systemet pga. kollisjonen er $\Delta K = K_1 - K_0 = -\frac{1}{14}mv_0^2$.*

Kinetisk energi før støtet er

$$K_0 = \frac{1}{2} m v_0^2 .$$

Kinetisk energi etter støtet er

$$K_1 = \frac{1}{2}(2m)v_1^2 + \frac{1}{2} I \omega_1^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2}\frac{14}{5} mR^2 (\frac{5}{14}\frac{v_0}{R})^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{14}\right) = \frac{1}{2} m v_0^2 \frac{12}{14} .$$

Endringen i kinetisk energi blir derfor

$$\Delta K = K_1 - K_0 = \frac{1}{2} m v_0^2 \frac{12}{14} - \frac{1}{2} m v_0^2 = -\frac{1}{14} m v_0^2 .$$

Vi antar nå at kule B er festet i sitt massesenter slik at kulen kan rotere om festepunktet uten friksjon, men kulen B kan ikke forflytte seg translatorisk.

e) Finn vinkelhastigheten til legemet om massesenteret til kule B etter støtet.

I dette tilfellet vil det virke ytre krefter på systemet fra festet. Vi kan derfor ikke bruke bevaring av bevegelsesmengden. Men kraftmomentet av disse kreftene om festepunktet vil være null, siden kreftene angriper i festepunktet. Spinnet om festepunktet vil derfor være bevart gjennom kollisjonen. Vi bruker dette til å finne vinkelhastigheten etter til legemet etter støtet.

$$L_{før} = m v_0 (2R) = L_{etter} = I_B \omega_2 .$$

Legemet roterer nå om massesenteret til kule B og ikke om massesenteret til legemet som ovenfor. Vi må derfor finne treghetsmomentet til legemet om dette punktet ved parallel-akse-teoremet:

$$I_B = I + (2m)R^2 = \frac{14}{5} mR^2 + 2mR^2 = \frac{24}{5} mR^2 .$$

Vi finner da vinkelhastigheten

$$\omega_2 = \frac{2 m v_0 R}{I_B} = \frac{2 m v_0 R}{24 mR^2 / 5} = \frac{5}{12}\frac{v_0}{R} .$$

f) Finn endringen i kinetisk energi for systemet pga. kollisjonen.

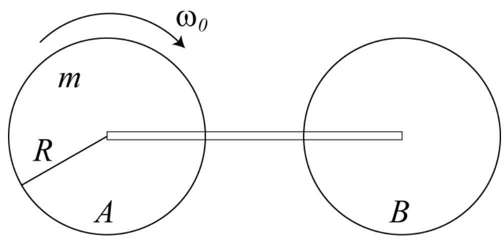
Kinetisk energi før støtet er som i oppgave d). Kinetisk energi etter støtet er nå:

$$K_1 = \frac{1}{2} I_B \omega_2^2 = \frac{1}{2}\frac{24}{5} mR^2 (\frac{5}{12}\frac{v_0}{R})^2 = \frac{5}{12} m v_0^2 .$$

Endringen i kinetisk energi blir da

$$\Delta K = K_1 - K_0 = \frac{5}{12}mv_0^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -\frac{1}{12}mv_0^2 .$$

Oppgave 4



Vi skal i denne oppgaven se på en enkel modell for en lekebil. Bilen består av to store, identiske hjul med masse m og radius R festet sammen med en masseløs stang som illustrert i figuren. Hjulene kan rotere friksjonsfritt om festene i stangen. Til å begynne med gis det bakerste hjulet (hjul A) en vinkelhastighet ω_0 med positiv retning med klokken som illustrert i figuren. Det forreste hjulet (hjul B) holdes i ro. Bilen settes så ned på et flatt, horisontalt underlag og slippes. Vi antar at i begynnelsen vil det bakerste hjulet (hjul A) skli mot underlaget, mens det forreste hjulet (hjul B) vil rulle uten å skli. Du kan også anta at bilen forblir horisontal gjennom hele bevegelsen.

Den dynamiske friksjonskoeffisienten mellom hjul A og underlaget er μ, tyngdens akselerasjon er g og treghetsmomentet om massesenteret for hvert av hjulene er I.

a) *Tegn et frilegemediagram for hvert av de tre legemene (hjul A, hjul B og stangen) som viser kreftene som virker på hvert legeme.*

b) *(Vanskelig. Teller som to deloppgaver) Vis at akselerasjonen til bilen i det den settes ned på underlaget er:*

$$a = \frac{\mu}{2+c}g, \quad hvor \quad c = \frac{I}{mR^2}$$

Vi tar utgangspunkt i massesentersatsen (Newtons andre lov) for hvert av legemene, samt i spinnsatsen om massesenteret for hjul A.

Massesentersatsen i y -retningen for hvert av hjulene gir at normalkraften N er den samme for begge hjulene: $N = mg$. Siden hjul A til å begynne med vil skli mot underlaget vil friksjonskraften være gitt av den dynamiske friksjonen: $f = \mu N = \mu mg$.

Massesentersatsen i x -retningen for legemene gir da

$$ma_A = f - F = \mu mg - F$$
$$ma_B = F - f'$$

Vi merker oss at siden stangen ikke deformeres vil akselerasjonene være de samme for hjul A og B: $a_A = a_B = a$.

For hjul B kan vi bruke spinnsatsen om massesenteret:

$$\tau = f'R = I\alpha$$

Siden hjul B ruller uten å skli betyr det at det er en relasjon mellom akselerasjonen og vinkelakselerasjonen for hjul B: $a = \alpha R$. Dermed har vi tre likninger:

$$ma = \mu mg - F$$
$$ma = F - f'$$
$$Ia / R = f'R$$

Og vi har tre ukjente, a , F og f'. Vi legger sammen de to første likningene og setter inn for f' fra den siste likningen og får

$$2ma = \mu mg - f' = \mu mg - ma(\frac{I}{mR^2}) = \mu mg - cma .$$

Det gir så

$$(2 + c)a = \mu g .$$

Og dermed

$$a = \frac{\mu}{2 + c} g .$$

c) *Finn vinkelhastigheten til hjul A som funksjon av tiden. (Uttrykket vil kun være gyldig frem til det bakerste hjulet begynner å rulle uten å skli.*

Vi bruker spinnsatsen om massesenteret for hjul A til å finne vinkelakselerasjonen og derfra vinkelhastigheten:

$$I\alpha = -fR = -\mu mgR\ .$$

$$\alpha = -\frac{\mu gmR}{I} = -\mu\frac{g}{R}\frac{mR^2}{I} = -\mu\frac{g}{R}\frac{1}{c}\ .$$

Vinkelhastigheten finner vi ved å integrere bevegelseslikningen:

$$\omega - \omega_0 = \int_0^t \alpha dt = -\mu\frac{g}{Rc}t\ ,$$

og dermed

$$\omega = \omega_0 - \mu\frac{g}{Rc}t\ .$$

d) Finn hvor lang tid det tar før begge hjulene ruller uten å skli. Beskriv bevegelsen til bilen deretter.

Hjul B vil hele tiden rulle uten å skli. Det bakre hjulet ruller uten å skli idet det oppfyller rullebetingelsen, det vil si idet $v = \omega R$. Vi finner hastigheten fra akselerasjonen, og finner tiden når rullebetingelsen blir oppfylt:

$$v = at = \frac{\mu}{2+c}gt = \omega R = (\omega_0 - \frac{\mu g}{cR}t)R = \omega_0 R - \frac{\mu}{c}gt\ .$$

Vi løser for tiden og finner:

$$t = \frac{\omega_0 R}{\mu g}\frac{1}{\frac{1}{2+c}+\frac{1}{c}}$$

***

Dette er siste ark i oppgavesettet. Lykke til med oppgavene!