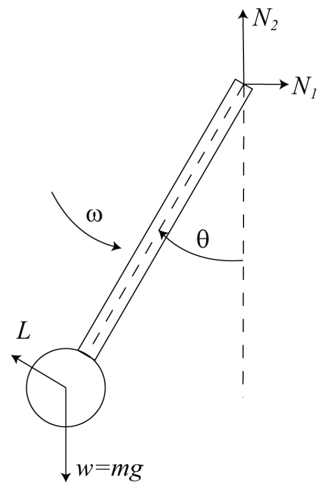
Løsningsforslag

Eksamen i Fys-mek1110/Fys-mef1110 våren 2007

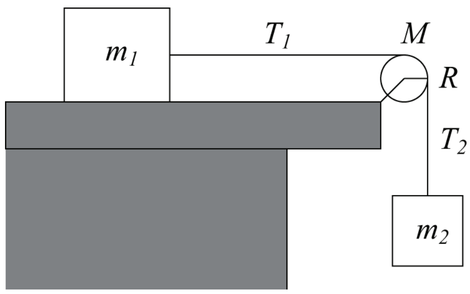
Oppgave 1

a) En pendel består av en stiv, masseløs stav av lengde L med en kule med masse m festet i enden. Den andre enden er festet i et friksjonsfritt hengsel. Gjør rede for og tegn inn kreftene som virker på pendelen når den har et vinkelutslag θ fra vertikalen.



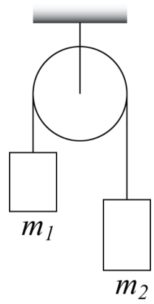
Kreftene er illustrert på figuren. Kreftene er tyngdekraften, $w = mg$, luftmotstanden, L, og de to kreftene N_1 og N_2 som virker på stangen fra hengselet i horisontal og vertikal retning.

b) En kloss med masse m_1 glir på et friksjonsfritt bord. Klossen er festet til et lodd med masse m_2 med en masseløs snor som løper over en trinse uten å gli. Trinsen har masse M og radius R. T_1 er kraften fra snoren på klossen, og T_2 er kraften fra snoren på loddet. Ranger T_1, T_2 og $w_2 = m_2 g$. Begrunn svaret.



Vi ser først at siden klossen ligger på et friksjonsfritt bord vil den begynne å skli, slik at loddet vil akselereres nedover. Derfor er $m_2 g > T_2$. Siden trinsen har endelig masse, vil det være kraftmomentet om trinsens sentrum som gir trinsen dens vinkelakselerasjon. Spinnsatsen om massesenteret til trinsen gir $I\alpha = RT_2 - RT_1 > 0$. Derfor er $T_2 > T_1$. Det gir rangeringen: $m_2 g > T_2 > T_1$.

c) Atwoods fallmaskin består av to lodd festet i en masseløs snor som løper over en masseløs trinse som vist i figuren. Hvordan kan du bruke Atwoods fallmaskin til å måle tyngdens akselerasjon, g? Hvorfor tror du man på Newtons tid brukte Atwoods fallmaskin til å måle g?



La oss se hva som skjer når systemet slippes. La kraften fra snoren på lodd 1 være T_1 og kraften fra snoren på lodd 2 være T_2. Siden trinsen er masseløs er $T_1 = T_2 = T$. Massesentersatsen for hvert av loddene gir da:

$$m_1 a_1 = T - m_1 g \qquad (1)$$

og

$m_2 a_2 = T - m_2 g$. (2)

Dersom snoren ikke strekkes vil $a_1 = -a_2 = a$. Trekker vi likning (2) fra likning (1) får vi:

$(m_1 + m_2)a = (m_2 - m_1)g$

Det gir

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g$$

Ved å velge de to massene svært like vil vi derfor få en liten akselerasjon som vi kan måle med god presisjon selv om vi ikke har veldig presise klokker. Ved å måle akselerasjonen og forholdet mellom massene kan vi bestemme tyngdens akselerasjon med god presisjon selv uten presise klokker.

d) *Vis at for en punktpartikkel med masse m og hastighet $\vec{v}$ i posisjonen $\vec{r}$ i forhold til punktet P, er kraftmomentet av de ytre kreftene om punktet P lik den tidsderiverte av spinnet, $\vec{L}_P = \vec{r} \times m\vec{v}$.*

$$\frac{d\vec{L}_P}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times m\vec{v}\right) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \frac{d}{dt} m\vec{v} = \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \sum F_i = 0 + \vec{\tau}$$

e) Beskriv en fysisk prosess som kan beskrives av likningen:

$$\frac{1}{2}k(y_1 - y_0)^2 + mgy_1 = mgy_2 + \frac{1}{2}mv_2^2 .$$

Lag en skisse av systemet og forklar symbolene.

Likningen kan beskrive en partikkel med masse m som skytes ut fra en sammenpresset fjær med fjærkonstant k. Venstre side beskriver den mekaniske energien i startposisjonen, hvor høyden til partikkelen er y_1, og likevektsposisjonen til fjæren er y_0. Høyre side beskriver den mekaniske energien idet partikkelen er i høyden y_2 med farten v_2. Partikkelen er da ikke lenger i kontakt med fjæren, slik at fjæren er i likevektsposisjonen, og det er ingen mekanisk energi lagret i fjæren. Likningen uttrykker bevaring av mekanisk energi.

f) *Vulkanene Hekla og Krekla er 3 km fra hverandre. Ole som står midt mellom vulkanene ser at de bryter ut samtidig. Mari flyr i romskipet sitt med farten $v = 0.5c$. Hekla bryter ut idet Mari passerer den på vei mot Krekla. For Mari, bryter Krekla ut før, til samme tid, eller etter Hekla? Begrunn svaret.*

Alle observatører i systemet til Mari vil finne samme tidspunktet for samme hendelse. La oss derfor betrakte en observatør i Maris system som befinner seg rett over Ole idet hendelsene inntreffer i Oles system. Ole vil da observere at hvert utbrudd sender et lysglimt mot Ole. Fordi Mari beveger seg mot Krekla, vil lysglimtet fra Krekla nå Mari før lysglimtet fra Hekla. Mari vil derfor observere utbruddet fra Krekla før utbruddet fra Hekla. Siden lyshastigheten er den samme i Maris system, betyr det at utbruddet ved Krekla inntraff før utbruddet ved Hekla i

Maris system.

Vi kan også finne samme resultat ved Lorentz-transformasjonene. La hendelsene i Oles system være (x_1, t_1) og (x_2, t_2). Hvor $t_1 = t_2$ da hendelsene er samtidige i Oles system. I Maris system er de tilsvarende hendelsene ved Lorentz-transformasjonene

$x_1' = \gamma(x_1 - vt_1)$, $t_1' = \gamma(t_1 - \frac{v}{c^2}x_1)$

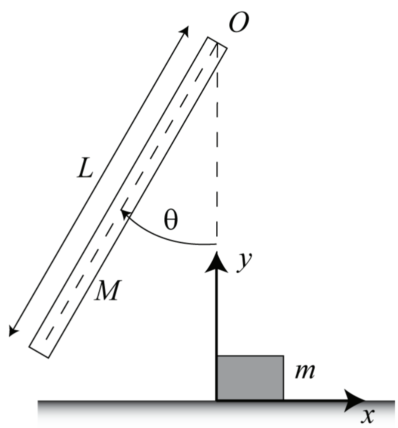
og

$x_2' = \gamma(x_2 - vt_2)$, $t_2' = \gamma(t_2 - \frac{v}{c^2}x_2)$.

Hvis vi setter $t_1 = t_2 = 0$ ser vi at $t_2' < t_1'$. Det betyr at for Mari inntreffer hendelse 2 (utbruddet ved Krekla) før hendelse 1 (utbruddet ved Hekla).

Oppgave 2

I denne oppgaven skal vi studere et støt mellom en stang og en liten kloss. Stangen er homogen og har masse M og lengde L. Stangen er festet med et friksjonsfritt hengsel til punktet O slik at det kan rotere som vist i figuren. Klossen er liten sammenliknet med stangen. Klossen har masse m og ligger til å begynne med i ro på et friksjonsfritt underlag. Stangen holdes i ro med vinkelutslaget θ_0 og slippes. Stangen treffer klossen idet stangen henger rett ned, det vil si idet $\theta = 0$. Stangens treghetsmoment om massesenteret er $I_{cm} = \frac{1}{12}ML^2$.



a) *Vis at stangens treghetsmoment om punktet O er*

$$I_O = \frac{1}{3}ML^2$$

Parallell-akse-teoremet gir:

$$I_O = I_{cm} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}ML^2 + \frac{1}{4}ML^2 = \frac{1}{3}ML^2$$

b) *Finn stangens kinetiske energi som funksjon av vinkelen θ. Se bort fra luftmotstand.*

Da hengselet er friksjonsfritt og vi ser bort fra luftmotstand bevares den mekaniske energien i systemet. Stangen roterer om punktet O. Da er den kinetiske energien til stangen gitt ved vinkelhastigheten om *O:*

$$K = \frac{1}{2}I_O\omega^2$$

Energibevaring mellom tilstanden 0 (null) og 1 gir:

$$K_0 + U_0 = K_1 + U_1$$

Den potensielle energien til et stivt legeme i tyngdefeltet er gitt ved høyden til massesenteret. Vi legger nullpunktet for potensiell energi i punktet *O.* Da er den potensielle energien til stangen gitt som

$$U = -Mg\left(\frac{L}{2}\right)\cos(\theta)$$

Vi setter dette inn i likningen for energibevaring og får:

$$K_0 + U_0 = K_1 + U_1$$
$$-Mg\left(\frac{L}{2}\right)\cos(\theta_0) = K_1 - Mg\left(\frac{L}{2}\right)\cos(\theta)$$

som gir

$$K_1 = \frac{1}{2}MgL(\cos(\theta) - \cos(\theta_0))$$

c) *Finn stangens vinkelhastighet,* ω_0*, umiddelbart før den treffer klossen.*

Vi finner vinkelhastigheten fra den kinetiske energien:

$$\frac{1}{2}I_O\omega_0^2 = K = \frac{1}{2}MgL(1 - \cos(\theta_0))$$

som gir

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{L}(1 - \cos(\theta_0)}$$

Anta at støtet er fullstendig elastisk.

d) *(Noe vanskelig) Vis at klossens hastighet umiddelbart etter støtet er*

$$v_1 = \frac{2\omega_0 L}{1 + mL^2 / I_O}$$

I dette støtet er ikke nødvendigvis bevegelsesmengden bevart da summen av ytre krefter ikke nødvendigvis er null, men spinnet om punktet *O* er bevart fordi kraftmomentet av de ytre kreftene om punktet er null. Normalkraften på klossen har ikke noe kraftmoment om *O* og kreftene som virker i hengselet har ikke noe kraftmoment om *O* da avstanden til punktet er null. Det er ingen friksjonskrefter på klossen. Vi finner spinnet like før og like etter støtet:

$$L_0 = I_O \omega_0$$

$$L_1 = I_O \omega_1 + Lmv_1$$

Spinnet etter støtet har to ledd. Et ledd som er spinnet til staven, og et ledd som er spinnet til klossen. Klossen har hastigheten v_1 like etter støtet, slik at spinnet til klossen like etter støtet er Lmv_1.

Spinnbevaring gir:

$$I_O \omega_0 = I_O \omega_1 + Lmv_1 \qquad (3)$$

Siden støtet er elastisk er også den mekaniske energien bevart gjennom støtet.

$$\frac{1}{2} I_O \omega_0^2 = \frac{1}{2} I_O \omega_1^2 + \frac{1}{2} mv_1^2 \quad (4)$$

Vi setter $\omega_1 = (\omega_0 - Lmv_1 / I_O)$ fra likning (3) inn i likning (4) og finner:

$$\frac{1}{2} I_O \omega_0^2 = \frac{1}{2} I_O \left(\omega_0 - \frac{Lmv_1}{I_O} \right)^2 + \frac{1}{2} mv_1^2 = \frac{1}{2} I_O \left(\omega_0^2 - 2\omega_0 \frac{Lmv_1}{I_O} + \frac{L^2 m^2 v_1^2}{I_O^2} \right) + \frac{1}{2} mv_1^2$$
$$= \frac{1}{2} I_O \omega_0^2 - \omega_0 Lmv_1 + \frac{L^2 m^2 v_1^2}{2I_O} + \frac{1}{2} mv_1^2$$

som gir

$$\omega_0 Lmv_1 = \frac{L^2 m^2 v_1^2}{2I_O} + \frac{1}{2} mv_1^2$$

Vi deler på mv_1 på begge sider og får:

$$\omega_0 L = \frac{L^2 mv_1}{2I_O} + \frac{1}{2} v_1 = \frac{1}{2} v_1 \left(\frac{mL^2}{I_O} + 1 \right)$$

Dermed har vi

$$v_1 = \frac{2\omega_0 L}{\left(\frac{mL^2}{I_O} + 1 \right)}$$

e) *Vis at stangens vinkelhastighet umiddelbart etter støtet er*

$$\omega_1 = \omega_0 \left(1 - \frac{2}{1 + I_O / mL^2} \right)$$

Vi finner ω_1 ved å sette uttrykket for v_1 inn i likning (3) over. Det gir:

$$I_O \omega_0 = I_O \omega_1 + Lmv_1 = I_O \omega_1 + \frac{2\omega_0 mL^2}{1 + mL^2 / I_O}$$

Vi deler på I_O og løser for ω_1 og får

$$\omega_1 = \omega_0 - \frac{2\omega_0 mL^2 / I_O}{1 + mL^2 / I_O} = \omega_0 \left(1 - \frac{2}{I_O / mL^2 + 1} \right)$$

f) Diskuter bevegelsen til klossen og stangen etter støtet for tilfellene $m \ll M$ og $m \gg M$. Hva skjer når $m = M/3$?

Vi setter inn $I_O = ML^2/3$ og finner

$$v_1 = \frac{2\omega_0 L}{1 + \frac{mL^2}{mL^2/3}} = \frac{2\omega_0 L}{1 + 3\frac{m}{M}} \text{ og}$$

$$\omega_1 = \omega_0 (1 - \frac{2}{1 + M/3m})$$

For tilfellet $m \ll M$ ser vi at

$$v_1 = 2\omega_0 L \text{ og } \omega_1 = \omega_0$$

Stangen fortsetter med samme vinkelhastighet, og klossen skytes ut med en vinkelhastighet som er dobbelt så stor som stangens. Oppførselen er den samme som for en ball som kolliderer med en vegg og reverserer sin hastighet, hvilket vi ser ved å betrakte prosessen i et system som følger enden til staven. I dette systemet har klossen hastigheten $-v' = \omega_0 L$ før støtet og $v' = \omega_0 L$ etter støtet.

For tilfellet $m \gg M$ blir $v_1 = 0$ og $\omega_1 = -\omega_0$. Stangen spretter tilbake med samme vinkelhastighet, og klossen blir ikke påvirket.

For tilfellet $m = M/3$ blir $v_1 = \omega_0 L$ og $\omega_1 = 0$. Stangen stanser, og klossen får hastigheten som enden av stangen hadde rett før kollisjonen – på samme måte som en kollisjon mellom to identiske kuler.

Anta nå at støtet er fullstendig uelastisk

g) *Finn vinkelhastigheten til stangen og hastigheten til klossen umiddelbart etter støtet.*

For et uelastisk støt er spinnet fremdeles bevart gjennom prosessen. Etter støtet beveger stangen og klossen seg som ett legeme, med treghetsmoment gitt som summen av treghetsmomentet til stangen om O og treghetsmomentet til klossen om O, $I_1 = I_O + mL^2$. Spinnbevaring gir da:

$$I_O\omega_0 = I_1\omega_1 = (I_O + mL^2)\omega_1$$

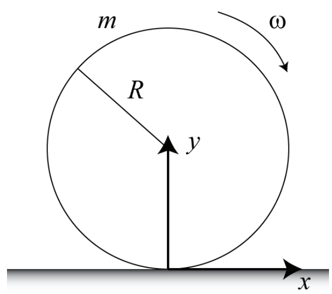
som gir

$$\omega_1 = \frac{I_O\omega_0}{I_O + mL^2} = \frac{\omega_0}{1 + mL^2 / I_O}$$

og

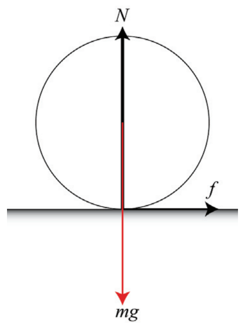
$$v_1 = L\omega_1 = \frac{\omega_0 L}{1 + mL^2 / I_O}$$

Oppgave 3



I denne oppgaven skal vi studere oppførselen til et spinnende hjul som settes ned på et plant, horisontalt underlag. Hjulet har masse m, radius R og treghetsmomentet om massesenteret er I. Vi lar x-aksen være parallell med underlaget og velger positiv rotasjonsretning med klokken, som illustrert i figuren. Den dynamiske friksjonskoeffisienten mellom underlaget og hjulet er μ. Tyngdens akselerasjon er g. Hjulet settes på underlaget ved tiden $t = 0\,s$ i posisjonen $x(0) = x_0 = 0$. Den initielle hastigheten til hjulet er $v(0) = v_0 = 0$, og den initielle vinkelhastigheten til hjulet er ω_0.

a) *Tegn et frilegemediagram for hjulet. Finn alle kreftene uttrykt ved m, g og μ.*



Massesentersatsen i y-retningen gir
$ma_y = 0 = N - mg \Rightarrow N = mg$

Så lenge hjulet glir mot underlaget er det dynamisk friksjon, slik at friksjonskraften er gitt som
$f = \mu N = \mu mg$

b) Finn posisjonen til hjulet som funksjon av tiden frem til bevegelsen blir ren rulling.

Massesentersatsen i x-retningen gir:

$$ma_x = f = \mu mg$$

og dermed

$$a_x = \mu g$$

Vi finner hastigheten og posisjonen ved å integrere:

$$v(t) = \mu gt$$

og

$$x(t) = \frac{1}{2}\mu gt^2 .$$

Denne løsningen gjelder frem til bevegelsen blir ren rulling.

c) Finn vinkelhastigheten til hjulet som funksjon av tiden frem til bevegelsen blir rulling.

Vi finner vinkelakselerasjonen fra spinnsatsen om massesenteret:

$$I\alpha = -fR = -\mu mgR$$

som gir

$$\alpha = -\mu \frac{mgR}{I}$$

Vi integrerer med hensyn på tiden og finner:

$$\omega(t) - \omega_0 = \int_0^t \alpha dt = -\mu \frac{mgR}{I} t$$

Og dermed

$$\omega(t) = \omega_0 - \mu \frac{mgR}{I} t$$

d) Vis at tiden det tar til bevegelsen blir ren rulling er gitt ved

$$t = \frac{\omega_0 R}{\mu g} \frac{1}{(1 + mR^2 / I)}$$

Ren rulling oppnås idet $v = \omega R$. Vi setter inn uttrykkene over for å finne tiden:

$$v(t) = \mu g t = \omega R = (\omega_0 - \mu \frac{mgR}{I} t)R$$

som gir

$$\omega_0 R = \mu g t + \mu \frac{mgR^2}{I} t = \mu g \left(1 + \frac{mR^2}{I}\right) t$$

Og dermed er

$$t = \frac{\omega_0 R}{\mu g} \frac{1}{(1 + mR^2 / I)}$$

I resten av oppgaven antar vi at underlaget er dekket av vann. Hjulet blir da ikke påvirket av en friksjonskraft, men blir i stedet utsatt for en viskøs kraft, f, som avhenger av hastigheten, v_s, til den delen av hjulet som er i kontakt med underlaget:

$$f = -kv_s$$

e) *Finn v_s uttrykt ved hjulets hastighet, v, og vinkelhastighet, ω.*

Hjulet roterer om massesenteret og massesenteret beveger seg med en hastighet. Hastigheten til et punkt i avstanden $\vec{r}$ i forhold til massesenteret er derfor summen av hastigheten til massesenteret og hastigheten i punktet pga. rotasjonen om massesenteret:

$$\vec{v}_s = \vec{v}_{cm} + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

I kontaktpunktet peker $\vec{\omega} \times \vec{r}$ i negativ x-retning, slik at hastigheten i kontaktpunktet blir

$$v_s = v - \omega R$$

f) *(Noe vanskelig) Vis at bevegelseslikningen for v_s kan skrives som*

$$\frac{dv_s}{dt} = -\frac{kv_s}{m}\left(1 + \frac{mR^2}{I}\right)$$

Vi finner bevegelseslikningen for v_s ved å se på likningene for v og ω, som vi finner fra massesentersatsen i x-retningen og spinnsatsen om massesenteret:

$$ma = m\frac{dv}{dt} = f = -kv_s$$

som gir

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}v_s \qquad (5)$$

Og

$$I\alpha = I\frac{d\omega}{dt} = -Rf = Rkv_s$$

Som gir

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{Rk}{I}v_s \qquad (6)$$

Ved å derivere $v_s = v - \omega R$ får vi:

$$\frac{dv_s}{dt} = \frac{dv}{dt} - \frac{d\omega}{dt}R$$

Vi setter inn for dv/dt og $d\omega/dt$ fra likning (5) og (6) og får:

$$\frac{dv_s}{dt} = \frac{dv}{dt} - \frac{d\omega}{dt}R = -\frac{k}{m}v_s - \frac{kR}{I}v_sR = -\frac{k}{m}\left(1 + \frac{mR^2}{I}\right)v_s \qquad (7)$$

g) *Finn tidsutviklingen til v_s og tolk resultatet. Når vil bevegelsen til hjulet bli ren rulling i dette tilfellet?*

Vi finner tidsutviklingen ved å løse differensiallikningen i (7). Vi kjenner initialbetingelsene, da

$v_s(0) = v(0) - \omega(0)R = -\omega_0 R$

Løsningen av likning (7) er en eksponentialfunksjon:

$$v_s(t) = v_s(0)e^{-\frac{k}{m}\left(1+\frac{mR^2}{I}\right)t} = -\omega_0 R e^{-\frac{t}{t^*}}$$

Hvor den karakteristiske tiden er

$$t^* = \frac{m}{k}\left(\frac{1}{1+\dfrac{mR^2}{I}}\right)$$

Ren rulling svarer til tilfellet hvor $v = \omega R$, det vil si at $v_s = 0$. Dette oppnås aldri i dette tilfellet, men oppførselen vil være veldig nær ren rulling etter en tid tilsvarende den karakteristiske tiden.

Kommentar: Vi kan også se på oppførselen til hjulet ved å se på hastigheten til hjulet som funksjon av tiden, ved å integrere akselerasjonen. Vi har at

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}v_s = \frac{k}{m}\omega_0 R e^{-t/t^*}$$

Dermed er

$$v(t) - v(0) = \int_0^t \frac{k}{m}\omega_0 R e^{-t/t^*}\,dt = -\frac{k}{m}t^*\omega_0 R(e^{-t/t^*} - 1)$$
$$= \frac{\omega_0 R}{1+\dfrac{mR^2}{I}}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}\left(1+\frac{mR^2}{I}\right)t}\right)$$

som går mot en konstant verdi når $t \to \infty$. Hjulet vil derfor ikke stoppe opp, men etter hvert bevege seg med konstant hastighet, og en konstant vinkelhastighet, hvilket tilsvarer ren rulling.

***

Dette er siste ark i oppgavesettet. Lykke til med oppgavene!