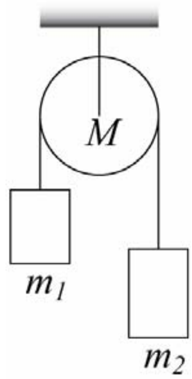
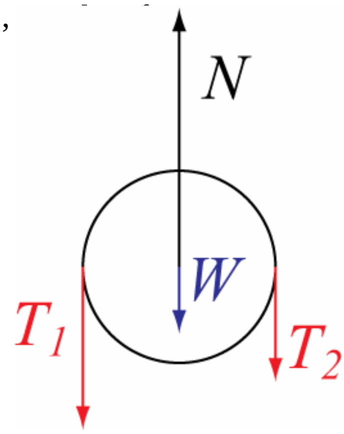
Løsningsforslag

Eksamen i Fys-mek1110 våren 2008

Oppgave 1



a) *Atwoods fallmaskin består av en talje med masse M som henger i en snor fra taket. I en masseløs snor om taljen henger to masser $m_1 > m_2 > M$. Tegn et frilegemediagram for taljen og navngi kreftene. Ranger absoluttverdien av kreftene i snorene.*



Kontaktkrefter: Snordrag fra snor i taket, N, snordrag fra masse 1, T_1, T_2.
Fjernkrefter: Gravitasjonskraft, W.

Siden taljen har en masse, må det et kraftmoment til for å gi den en vinkelakselerasjon. Dette kraftmomentet forårsakes av snordragene. Derfor må $T_1 > T_2$.

Siden taljen ikke akselereres må snordraget fra snoren festet i taket være like stor som summen av de andre kreftene, derfor er N størst: $N > T_1 > T_2$.

b) *Du slipper en ball i gulvet fra en høyde h. I støtet med gulvet reduseres hastigheten til ballen med en faktor r slik at hastigheten v_1 etter støtet er relatert til hastigheten v_0 før støtet ved: $v_1 = -rv_0$. Hvor høyt spretter ballen etter støtet? Se bort fra luftmotstand.*

Vi deler prossessen i tre faser: I fase en faller ballen fra høyden h til gulvet. I fase to inntreffer kollisjonen, og i fase tre spretter ballen opp igjen.
I fase 1 kan vi bruke energibevaring, siden ballen kun er påvirket av gravitasjonskraften. Det gir:

$$E_0 = K_0 + U_0 = \frac{1}{2}m0^2 + mgh = \frac{1}{2}mv_0^2 - mg0$$

$$v_0^2 = 2gh$$

I fase 2 bruker vi den oppgitte relasjonen:

$$v_1 = -rv_0$$

Og i fase 3 bruker vi igjen energibevaring:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = mgh_1$$

Vi setter inn $v_1 = -rv_0$ og får:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}m\left(-rv_0\right)^2 = r^2\frac{1}{2}mv_0^2 = r^2 mgh = mgh_1$$

Og dermed er:

$$h_1 = r^2 h$$

c) *Du kaster en ball horisontalt fra en høyde h slik at den treffer gulvet med hastigheten $\vec{v}_0 = v_{0,x}\hat{i} + v_{0,y}\hat{j}$. I støtet med gulvet reduseres hastigheten til ballen med en faktor r slik at hastigheten $\vec{v}_1$ etter støtet er $\vec{v}_1 = rv_{0,x}\hat{i} - rv_{0,y}\hat{j}$. Hvor høyt spretter ballen etter støtet? Se bort fra luftmotstand.*

I denne oppgaven innser vi at bevegelsen i den horisontale og den vertikale retningen ikke er avhengig av hverandre. For den vertikale bevegelsen blir derfor resultatet det samme som i oppgave b)

d) *En planet befinner seg i posisjonen $\vec{r}$ i et koordinatsystem hvor solen er i origo. For hvilke hastigheter $\vec{v}$ vil planetens bevegelse være en sirkel?*

For at bevegelsen skal være en sirkelbevegelse må kreftene som virker på planeten gi en akselerasjon som svarer til sentripetalakselerasjonen for en sirkelbevegelse.

Det er kun gravitasjonskraften fra Solen som virker på planeten. Denne er

$$F = -G\frac{mM}{r^2}\hat{u}_r$$

Newtons andre lov gir oss derfor akselerasjonen som:

$$a = \frac{F}{m} = -G\frac{M}{r^2}$$

rettet inn mot Solen. Sentripetalakselerasjonen for en planet i sirkelbane er:

$$a = \frac{v^2}{r}$$

Planeten beveger seg i en sirkelbane dersom akselerasjonen gitt av kreftene svarer til denne sentripetalakselerasjonen. Det gir:

$$\frac{v^2}{r} = G\frac{M}{r^2}$$

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

Dette er størrelsen av hastigheten. Den må dessuten være tangentiell til enhver tid. Alle hastigheter som er normale til $\vec{r}$ og med denne størrelsen vil derfor gi en sirkelbane.

e) *Kari kjører i et romskip som holder hastigheten $0.5c$ i forhold til Ole. Kari måler romskipet* *til å være 10m langt i fartsretningen. Forklar hvordan Ole og Kari måler lengden av romskipet. Hvilken lengde finner Ole at romskipet har?*

Vi kaller Karis system for S’ og Oles system for S. Systemet S’ beveger seg med hastigheten u målt i systemet S.

I Karis system er romskipet i ro. Hun måler lengen av romskipet ved å finne posisjonene x_1' og x_2' for hver ende av romskipet. Lengden av romskipet er da $L' = x_2' - x_1'$ i Karis system. Det spiller ingen rolle når hun gjør målingene, siden romskipet er i ro i hennes system.

Ole måler lengden av romskipet ved å måle posisjonen av begge endene *til samme tid* i hans system. Dvs. han finner x_1, t_1 og x_2, t_2 hvor $t_1 = t_2$. Lengden han finner er $L = x_2 - x_1$.

Vi kan relatere de to hendelsene 1 og 2 mellom system S og S’ ved hjelp av Lorentz-transformasjonene.

Vi vet da at:

$$x_1' = \gamma\left(x_1 - ut_1\right)$$

Og at

$$x_2' = \gamma\left(x_2 - ut_2\right)$$

Da er

$$L' = x_2' - x_1' = \gamma\left(x_2 - x_1\right) - \gamma u\left(t_2 - t_1\right)$$

Fordi $t_2 = t_1$ er derfor

$$L' = \gamma L$$

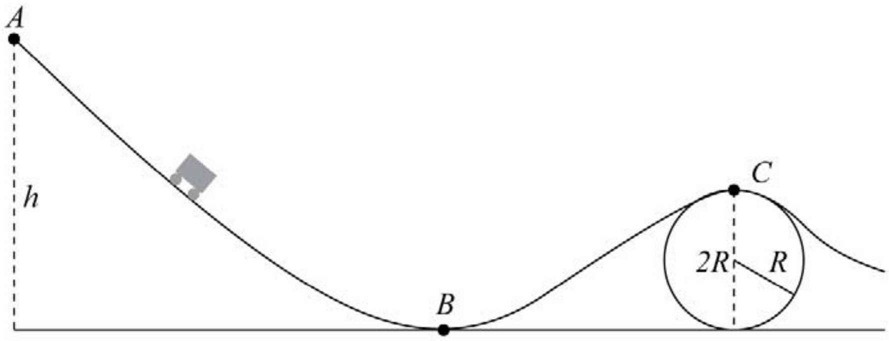
I dette tilfellet er derfor

$$L = \frac{1}{\gamma}L' = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}L' = \sqrt{1 - \frac{1}{4}}L' = \frac{\sqrt{3}}{2}L' = \frac{\sqrt{3}}{2}10m$$

Oppgave 2

I denne oppgaven skal vi studere en vogn med massen m som sklir langs en bane. Du kan se bort fra friksjon og luftmotstand. Tyngdens akselerasjon er g.

Vognen starter i ro i punktet A i høyden h over punktet B, som illustrert i figuren. Vognen sklir ned til punktet B i bunnen av kurven og deretter opp mot punktet C på bakketoppen. I punktet C er krumningsradiusen R. Punktet C ligger en høyde $2R$ over punktet B.



a) Finn hastigheten til vognen i punktet C. Hvor stor må h være for at vognen skal nå punktet C?

Vognen påvirker av tyngdekraften og normalkraften fra banen. Det er ingen friksjon, og normalkraften gjør ikke noe arbeid. Den mekaniske energien er derfor bevart. Vi benytter at den mekaniske energi i punkt A må være den samme som den mekaniske energien i punkt C:

$$E_A = \frac{1}{2}mv_A^2 + mgh = E_C = \frac{1}{2}mv_C^2 + mg\left(2R\right)$$

$$gh = \frac{1}{2}v_C^2 + 2gR$$

$$2gh - 4gR = v_C^2$$

$$2g\left(h - 2R\right) = v_C^2$$

Denne likningen har kun løsninger dersom $h \geq 2R$. Høyden må derfor minst være så stor for at vognen skal nå punktet C. I dette tilfellet er:

$$v_C = \sqrt{2g\left(h - 2R\right)}$$

b) Hva er betingelsen for at vognen skal beholde bakkekontakten i punktet C? For hvilke høyder h vil vognen miste bakkekontakten i punktet C?

For at vognen skal beholde bakkekontakten, må summen av kreftene gi vognen en akselerasjon som svarer til sentripetalakselerasjonen for kurven. I punktet C har banen krumningsradius R, slik at akselerasjonen må være $a = -\frac{v_C^2}{R}$ (hvor positiv akselerasjon er oppover).

Akselerasjonen blir bestemt av summen av kreftene på vognen. Det er kun gravitasjonen og normalkraften fra banen som virker på vognen i vertikal retning i punktet C. Newtons andre lov gir da:

$$ma = N - mg$$

$$a = \frac{N}{m} - g$$

Normalkraften må være positiv. Den største negative verdien av akselerasjonen inntreffer når normalkraften er null. Vi ser at sentripetalakselerasjonen øker med økende hastighet. Dersom hastigheten blir for stor vil vognen miste bakkekontakten. Dette inntreffer for en hastighet gitt av

$$\frac{v_C^2}{R} > g$$

$$v_C^2 > gR$$

Vi kan relatere hastighen til den initielle høyden h ved resulatet fra oppgave a):

$$v_C^2 = 2g\left(h - 2R\right)$$

Det gir:

$$2g\left(h-2R\right) > gR$$

$$2\left(h-2R\right) > R$$

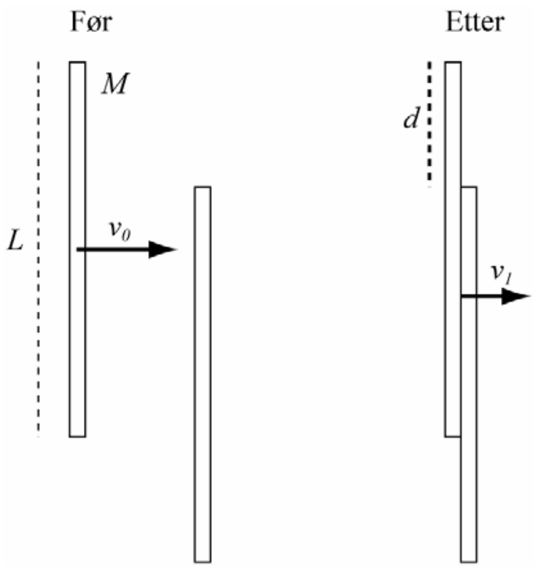
$$h > \frac{5R}{2}$$

Vognen mister bakkekontakten for disse verdiene av høyden.

Oppgave 3

Vi skal i denne oppgaven se på en kollisjon mellom to lange, tynne staver som blir hengende sammen. Dette kan for eksempel være en modell for hvordan to lange, lineære molekyler kolliderer. De to stavene er identiske. Hver stav har masse M og lengde L. For hver stav er treghetsmomentet om dens massesenter $I_0 = ML^2/12$. Stavene glir på en horisontal, friksjonsfri flate som illustrert i figuren.

Før kollisjonen er stavene parallelle. En stav ligger i ro, mens den andre staven har hastigheten v_0. Etter kollisjonen blir de hengende sammen som en stav, som illustrert i figuren. Startposisjonen karakteriseres ved forskyvningen d som illustrert i figuren. Du kan se bort fra bredden og høyden av staven.



a) *Vis at treghetsmomentet om massesenteret for det samlede legemet er:*

$$I = \frac{M}{2}\left(d^2 + \frac{L^2}{3}\right)$$

Det samlede legemet består av to identiske deler. Vi bruker superposisjonsprinsippet for treghetsmomenter, og finner treghetsmomentet for en av stavene om massesenteret for det samlede legemet. Treghetsmomentet av en stav om dets massesenter er gitt. Vi ønsker nå å finne treghetsmomentet om en parallell rotasjonsakse gjennom et annet punkt – massesenteret for det samlede objektet. Vi bruker parallell-akse-teoremet. Avstanden fra massesenteret for en av stavene til massesenteret for det samlede legemet er $\frac{d}{2}$. Derfor gir parallell-akse-teoremet treghetsmomentet for en av stavene (stav A):

$$I_A = I_0 + M\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}ML^2 + \frac{1}{4}Md^2 = \frac{M}{4}\left(d^2 + \frac{1}{3}L^2\right)$$

Treghetsmomentet for det samlede legemet som består av stav A og stav B blir da:

$$I = 2I_A = 2\frac{M}{4}\left(d^2 + \frac{1}{3}L^2\right) = \frac{M}{2}\left(d^2 + \frac{1}{3}L^2\right)$$

Anta først at $d = 0$.

b) Finn hastigheten v_1 *til massesenteret til det samlede legemet etter støtet.*

Vi kan løse dette problemet på flere måter. Et alternativ er å innse at siden det ikke virker noen eksterne krefter på systemet gir massesentersatsen at massesenteret ikke er akselert. Hastigheten til massesenteret er derfor den samme til alle tider. Vi finner hastigheten til massesenteret, $v_{cm,0}$, før kollisjone ved:

$$v_{cm,0} = \frac{1}{2M}\left(M\,0 + Mv_0\right) = \frac{1}{2}v_0$$

Dette er det samme som hastigheten til massesenteret etter kollisjonen. Etter kollisjonen henger stavene sammen, slik at hastigheten til massesenteret er det sammen som hastigheten til hver av stavene.

Et annet alternativ er å betrakte prosessen som en kollisjon. Siden det ikke er noen ytre krefter som virker på systemet, vil bevegelsesmengden være bevart. Før støtet er bevegelsesmengden

$$p_0 = Mv_0 + M\,0 = Mv_0$$

Etter støtet beveger begge stavene seg med hastigheten v_1 slik at bevegelsesmengden etter støtet er

$$p_1 = Mv_1 + Mv_1 = 2Mv_1$$

Siden bevegelsesmengden er bevart, er derfor $p_0 = p_1$ som gir

$$v_1 = \frac{1}{2}v_0$$

La oss nå se på det generelle tilfellet, hvor $0 \le d \le L$.

c) Finn hastigheten v_1 *til massesenteret til det samlede legemet etter støtet.*

Resultatet fra oppgave b) blir ikke forandret av at treffpunktet forandres. Hastigheten til massesenteret er uforandret gjennomstøtet siden det ikke virker noen ytre krefter. Den er derfor det samme som i oppgave b):

$$v_1 = \frac{1}{2}v_0$$

d) Finn vinkelhastigheten ω_1 *til det samlede legemet om massesenteret etter støtet.*

Vi merker oss at vi her kan bruke spinnsatsen om massesenteret (den kan vi alltid bruke). Fordi det ikke er noen ytre krefter som virker på systemet, vil spinnet om massesenteret være uforandret. Vi finner derfor spinnet før støtet og spinnet etter støtet.

Før støtet er spinnet om massesenteret gitt som:

$$\vec{L}_{cm,0} = \vec{r}_{cm,A} \times M\vec{v}_{cm,A} + \vec{r}_{cm,B} \times M\vec{v}_{cm,B}$$

Hvor posisjonen er posisjonen til hver av stavene i forhold til massesenteret, og hastighetenen er hastighetene i forhold til massesenteret.

Vi finner hastighetene til hver av stavene i forhold til massesenteret. Vi kaller staven som beveger seg for stav A og staven som er i ro for stav B. Hastigheten til massesenteret er $\vec{v}_{cm.0} = \frac{1}{2} v_0 \hat{i}$. Da er:

$$\vec{v}_{cm,A,0} = \vec{v}_0 - \vec{v}_{cm,0} = \frac{1}{2} v_0 \hat{i}$$

og

$$\vec{v}_{cm,B,0} = 0 - \vec{v}_{cm,0} = -\frac{1}{2} v_0 \hat{i}$$

Avstanden fra massesenteret for det samlede legemet og ut til massesenteret for stav A er $\vec{r}_{cm,A} = \frac{d}{2}\hat{j}$ og for stav B er den $\vec{r}_{cm,B} = -\frac{d}{2}\hat{j}$. Da er spinnet:

$$\vec{L}_{cm,0} = \vec{r}_{cm,A} \times M\vec{v}_{cm,A} + \vec{r}_{cm,B} \times M\vec{v}_{cm,B} = M\left(\frac{d}{2}\hat{j}\right) \times \left(\frac{v_0}{2}\hat{i}\right) + M\left(-\frac{d}{2}\hat{j}\right) \times \left(-\frac{v_0}{2}\hat{i}\right) = -\frac{dMv_0}{2}\hat{k}$$

Etter støtet roterer hele legemet med vinkelhastigheten $\vec{\omega}_1$. Spinnet er da $\vec{L}_1 = I\vec{\omega}_1$. Fra dette finner vi:

$$\vec{\omega}_1 = \frac{\vec{L}_1}{I} = \frac{\vec{L}_0}{I} = -\frac{dMv_0}{2I}\hat{k} = -\frac{dMv_0}{M\left(d^2 + \frac{L^2}{3}\right)}\hat{k} = -\frac{dv_0}{\left(d^2 + \frac{L^2}{3}\right)}\hat{k}$$

e) Hva er tapet i energi i støtet? For hvilken d blir tapet minst? Kommenter resultatet.

Før støtet er den kinetiske energien:

$$K_0 = \frac{1}{2} M v_0^2$$

Etter støtet er den kinetiske energien:

$$K_1 = \frac{1}{2}(2M)v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I \omega_1^2 = M\left(\frac{v_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{M}{2}\left(d^2 + \frac{L^2}{3}\right)(dv_0)^2\left(d^2 + \frac{L^2}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{4} M v_0^2 \left[1 + \frac{d^2}{d^2 + \frac{L^2}{3}}\right]$$

Forskjellen blir derfor:

$$K_0 - K_1 = \frac{1}{4} M v_0^2 \left[1 - \frac{d^2}{d^2 + \frac{L^2}{3}}\right]$$

Tapet blir størst når $d = 0$. Tapet blir minst når $d = L$. Det er ikke så rart, da den kinetiske energien til massesenteret er den samme i alle tilfeller, men vinkelhastigheten for rotasjonen etter støtet blir størst når d er størst.

f) Beskriv bevegelsen etter støtet.

Etter støtet fortsetter det samlede legemet med samme hastighet og samme vinkelhastighet da det ikke er noen ytre krefter som påvirker systemet.

Oppgave 4

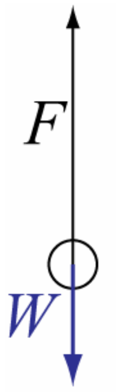
I denne oppgaven skal vi studere en person som hopper strikk. Strikken oppfører seg som en ideell fjær med fjærstivhet k når den blir strukket, men den har ingen styrke når den blir dyttet sammen. Strikkens likevektslengde er d. Det er også en viss demping i strikken som vi modellerer som en kraft som er avhengig av hastigheten strikken deformeres med. Når strikken er strukket til en lengde x, og strikken strekkes med den momentane hastigheten v, er kraften fra strikken gitt som:

$$F(x,v) = \begin{cases} -k(x-d) - c_v v & x > d \\ 0 & x \le d \end{cases},$$

Her er c_v en konstant som beskriver dempingen i tauet, og k er fjærstivheten.

Vi legger nullpunktet for høyden der strikken er festet og regner positiv retning nedover. En person med masse m fester strikken om livet og hopper fra punktet hvor strikken er festet. Han starter med null hastighet. Du kan se bort fra luftmotstanden og du kan anta at strikken er masseløs. Bevegelsen er kun vertikal. Tyngens akselerasjon er g.

a) Tegn et frilegemediagram for personen når strikken er stram. Navngi alle kreftene.



Kontaktkrefter: Kraft fra strikk på mann: F
Fjernkrefter: Tyngdekraften, W

b) I hvilken høyde blir personen hengende når bevegelsen har stanset?

Når bevegelsen er stanset er hastigheten til personen og hastigheten som strikken deformeres med null. Newtons andre lov i vertikal retning gir da

$$\sum F = F + W = ma = 0$$

Merk at F slik den er oppgitt i oppgaven har positiv retning nedover. Derfor er

$$F = W = mg = k(x-d)$$

og

$$x - d = \frac{mg}{k}$$

og dermed

$$x = d + \frac{mg}{k}$$

Som er høyden personen blir hengende i til slutt.

c) *Skisser en numerisk algoritme som finner posisjonen og hastigheten til personen ved tiden $t + \Delta t$ gitt posisjonen og hastigheten ved tiden t, hvor Δt er et lite tidsintervall. Du kan gjøre dette i Python, matlab eller pseudo-kode. Med pseudo-kode mener vi her at du skisserer algoritmestegene på et vis som gjør metoden tydelig.*

Vi fnnner posisjonen og hastigheten til personen ved å anvende Euler-Cromers metode med en akselerasjon gitt fra Newtons andre lov for personen.
La F være kraften fra strikken på personen og $W = mg$ være tyngekraften. Da er summen av kreftene på personen gitt som
$F_{netto} = F + W = F + mg$
Ved tiden t er posisjonen $x(t)$ og hastigheten $v(t)$. Vi finner hastigheten og posisjonen ved tiden $t + \Delta t$ ved Euler-Cromers metode. Merk at når vi regner ut kraften må vi ta hensyn til at uttrykket er forskjellig avhengig av om x er større eller mindre enn d :

```
if x(t)>d:
    Fnet = -k*(x(t)-d)-cv*v(t)+m*g
else:
    Fnet = m*g
a(t) = Fnet/m
v(t+dt) = v(t) + a(t)*dt
x(t+dt) = x(t) + v(t+dt)*dt
```

d) *Figur 1 nedenfor viser resultatet av en simulering av et strikkhopp med denne modellen for en strikk med lengden $d = 20\,m$. Forklar resultatet. Gi et estimat for fjærkonstanten k brukt i simuleringen vist i figur 1.*

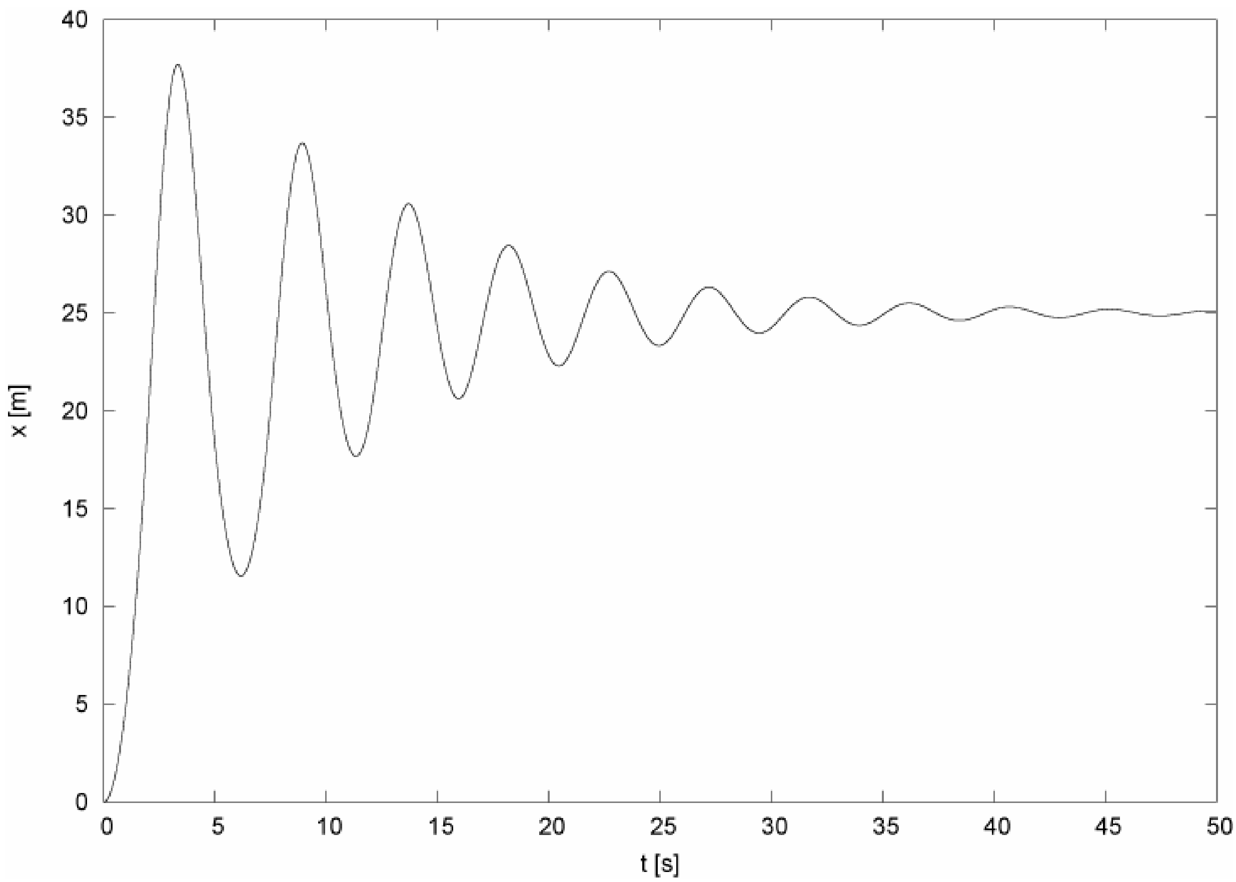
Personen hopper ut. I første del av prosessen faller personen kun påvirket av tyngden. Idet han har falt en avstand d begynner strikken å strekke i ham, og fallet bremses. Han bremses og strikken strekker seg. Han spretter opp igjen, og strikken blir igjen slakk. Etter hvert vil dempningen i strikken føre til at svingningene blir mindre og mindre, og han henger til slutt (etter ca. 50 sekunder) nærmest stille.
Vi kan lese av omtrent ved hvilken posisjon han blir hengende. Det er ved: $x = 25m$. Vi finner da fra oppgave b) at $x = d + \frac{mg}{k}$, siden vi kjenner d kan vi nå estimere k hvis vi kjenner m .

Det gjør vi ikke, men vi antar at en person veier omtrent $70kg$. I så fall er $\frac{mg}{k} = d$ og vi finner k fra:

$$k = \frac{mg}{d} = \frac{70kg\,9.81m/s^2}{5m} \approx 137N/m$$

e) Er systemet konservativt gjennom hele bevegelsen, i deler av bevegelsen, eller ikke i det hele tatt? Begrunn svaret.

Når personen faller med slakk strikk er bevegelsen konservativ, mens idet strikken er stram og han har en endelig hastighet, er det et ledd i kraften som er avhengig av hastigheten, og systemet er derfor ikke konservativt. Systemet er konservativt i de delene av bevegelsen i figur 1 hvor $x < 20m$.



Figur 1: Resultat av simulering av strikkhopp.

****

Dette er siste ark i oppgavesettet. Lykke til med oppgavene!