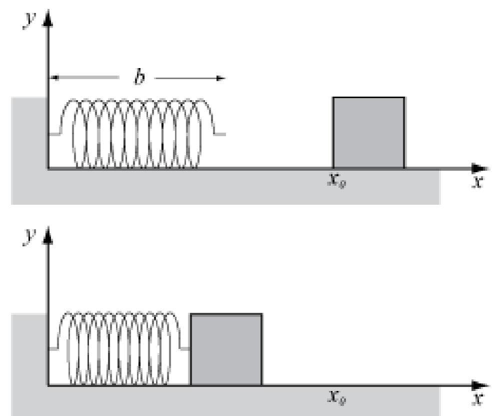
Løsningsforslag

Eksamen i Fys-mek1110 våren 2008

På denne eksamenen skal vi studere en kollisjon mellom to identiske partikler (atomer) som begge påvirkes av krefter fra en massiv, stasjonær partikkel (f.eks. et molekyl). Vi skal gjøre dette i to steg. I oppgave 1 skal vi studere en enkel mekanisk modell som også illustrerer vekselvirkningen mellom en massiv partikkel og et atom, mens i oppgave 2 studerer vi en kollisjonsprosess for partikler i et mer realistisk potensial.

Oppgave 1

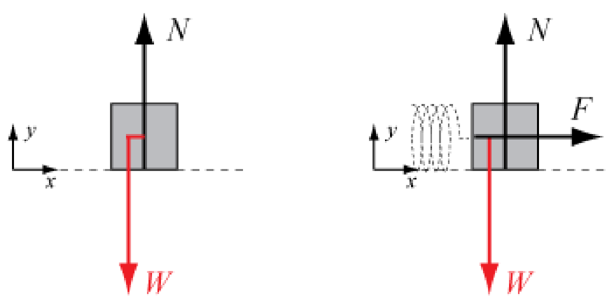
En kloss med masse m sklir på et friksjonsfritt bord som illustrert i figuren. En masseløs fjær med fjærkonstant k og likevektslengde b er festet i veggen ved $x = 0$. I begynnelsen av prosessen ligger fjæren i ro og den har lengden b. I det klossen treffer fjæren fester den seg til fjæren. Klossen starter ved posisjonen $x(t_0) = x_0$ med hastigheten $v(t_0) = -v_0$ ved tiden $t = t_0 = 0$ s. Du kan se bort fra luftmotstand.



a) *Identifiser kreftene på klossen og tegn et frilegemediagram for klossen før den treffer fjæren og etter at den har truffet fjæren.*

Før kontakt med fjær:
Kontaktkrefter: Normalkraften N fra gulvet
Fjernkrefter: Gravitasjonskraften W = mg

Etter kontakt med fjær:
Kontaktkrefter: Normalkraften N fra gulvet og kraften F fra fjæren.
Fjernkrefter: Gravitasjonskraften W = mg



b) *Finn posisjonen $x(t)$ til klossen som funksjon av tiden før klossen treffer fjæren.*

Det er ingen horisontale krefter på klossen. Newtons andre lov i x-retninger gir da: $\sum F = ma = 0$, og hastigheten er derfor konstant. For bevegelsen med konstant hastighet er posisjonen gitt ved: $x(t) = x(t_0) + v(t_0)(t - t_0)$. Her er $v(t_0) = -v_0$ og $t_0 = 0$ som gir: $x(t) = x_0 - v_0 t$.

c) *Klossen treffer fjæren ved tiden $t = t_1$. Finn t_1.*

Klossen treffer fjæren når $x(t_1) = b$ som gir $x_0 - v_0 t_1 = b$. Vi finner $t_1 = \frac{x_0 - b}{v_0}$

d) Vis at akselerasjonen til klossen etter at den har truffet fjæren kan skrives som:
$a = -\frac{k}{m}(x - b)$.

Etter at klossen treffer fjæren blir den påvirket av en horisontal fjærkraft. For en fjær med likevektslengden b og fjærkonstanten k er fjærkraften på klossen:

$$F(x) = -k(x - b)$$

Newtons andre lov for klossen gir:

$$\sum F = F(x) = ma$$

Vi finner akselerasjonen ved å dele med massen:

$$a = \frac{F(x)}{m} = -\frac{k}{m}(x - b).$$

e) Skisser posisjonen til klossen som funksjon av tiden fra $t = t_0$. Hva er fjærens maksimale kompresjon?

Vi må skille oppførselen før t_1 og etter t_1. Før t_1 har vi funnet oppførselen ovenfor. Etter t_1 vet vi at løsningen av bevegelseslikningen gir en oscillerende bevegelse.

Løsningen er

$$x(t) = \begin{cases} x_0 - v_0 t & t < t_1 \\ b - \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega(t - t_1)) & t > t_1 \end{cases},$$

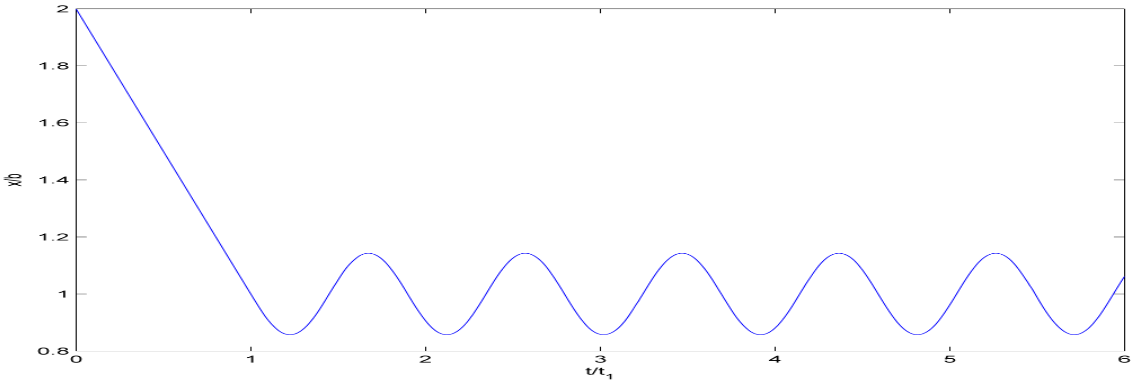
hvor $\omega = \sqrt{k/m}$. Men det var ikke nødvendig å finne løsningen. Det holder med en kvalitativ skisse av løsningen. Et plot av løsningen er vist i figuren under:

Vi finner den maksimale kompresjonen fra energibevaring fordi alle krefter som påvirker klossen er konservative:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}k\Delta x^2$$

som gir:

$$\Delta x = \sqrt{\frac{m}{k}}v_0.$$



Oppgave 2

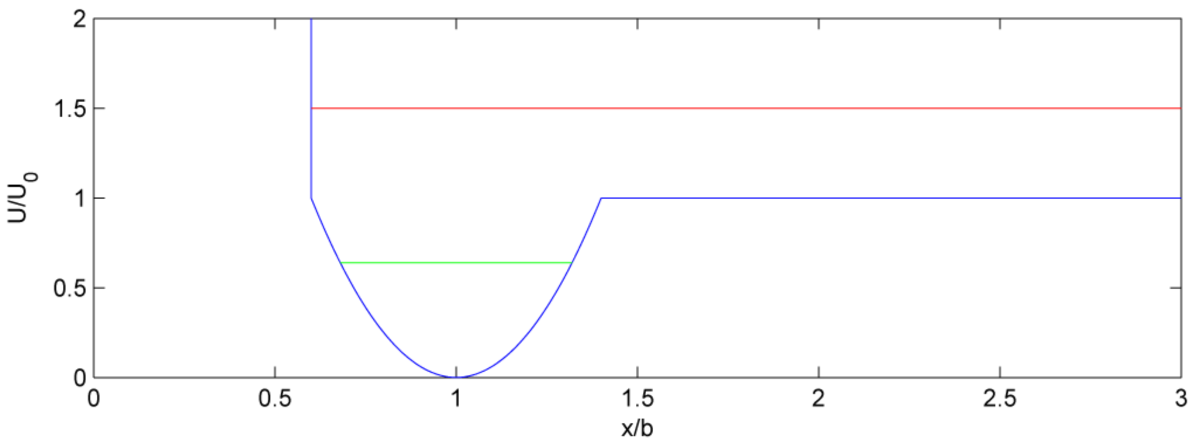
Vi skal i denne oppgaven se på en kollisjon mellom to identiske atomer med masse m som begge er påvirket av krefter fra en massiv partikkel, f.eks. et molekyl.

Først ser vi på oppførselen til et enkelt atom som er påvirket av krefter fra et molekyl. Den potensielle energien for vekselvirkningen mellom atomet og molekylet er:

$$U(x)=\begin{cases}\infty & \text{når} \quad x<b-d \\ \frac{1}{2}k(x-b)^2 & \text{når} \quad b-d<x<b+d \\ U_0 & \text{når} \quad x>b+d\end{cases}$$

hvor $U_0=\frac{1}{2}kd^2$ *og* x *er posisjonen til atomet. Vi antar at molekylet ligger fast i punktet* $x=0$.
(Atomet kan ikke komme inn i området hvor potensialet er uendelig).

a) *Skisser potensialet. Tegn inn en bevegelse hvor totalenergien er mindre enn U_0 og en bevegelse hvor totalenergien er større enn U_0 og beskriv bevegelsene kort.*



Den grønne linjen viser en bevegelsen hvor energien er mindre enn U_0. Her er atomet bundet til molekylet og det oscillerer frem og tilbake mellom to ytterpunkter, slik vi så for klossen i oppgave 1.

Den røde linjen viser en bevegelse hvor energien er større enn U_0. Her er atomet ikke bundet til molekylet. Det reflekteres fra potensialet der hvor linjen er vertikal, og beveger seg deretter utover uten å stoppe.

b) Finn kraften $F(x)$ på atomet som funksjon av atomets posisjon x

Kraften er gitt som minus den deriverte av potensialet:

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} = -k(x-b)$$

Når $x > b+d$ er potensialet konstant og kraften null.

Atomet kan ikke bevege seg inn i området hvor $x < b-d$.

Vi skal nå studere en kollisjon mellom et atom (B) med masse m som ligger i ro i punktet $x_B = b$ og et identisk atom (A) som starter ved $x_A > b+d$ med en hastighet $-v_{A,0}$. For hvert av atomene kan vekselvirkningen med molekylet uttrykkes ved den potensielle energien $U(x)$, slik at den potensielle energien til atom A er $U(x_A)$ og den potensielle energien til atom B er $U(x_B)$. Det er ingen langtrekkende vekselvirkninger mellom atomene. De vekselvirker kun når de er i samme punkt, $x_A = x_B$, og da kolliderer de. Etter kollisjonen henger atomene sammen. Du kan anta at atomene ikke har beveget seg nevneverdig i løpet av kollisjonen.

c) Finn hastigheten til atom A i punktet $x_A = b$ umiddelbart før kollisjonen.

Atom A er kun påvirket av en konservativ kraft gitt av potensialet $U(x)$. Vi kan derfor benytte bevaring av mekanisk energi til å finne den kinetiske energien til atom A i posisjonen 1 hvor $x = b$.

$$E_0 = K_0 + U_0 = E_1 = K_1 + U_1$$

Hvor den potensielle energien i punktet 1 er 0. Derfor finner vi:

$$\tfrac{1}{2} m v_{A,0}^2 + U_0 = \tfrac{1}{2} m v_{A,1}^2$$

Vi finner farten i punktet 1:

$$v_{A,1} = \sqrt{v_{A,0}^2 + \frac{2U_0}{m}}$$

Hastigheten er rettet mot venstre, slik at hastigheten blir:

$$v_{A,1} = -\sqrt{v_{A,0}^2 + \frac{2U_0}{m}} \, .$$

d) Finn hastighetene til atom A og til atom B umiddelbart etter kollisjonen.

Fordi kollisjonen skjer i punktet $x = b$ hvor kraften fra potensialet er null, er det ingen ytre krefter som virker på atomene under kollisjonen. Bevegelsesmengden er derfor bevart.

$$mv_{A,1} + mv_{B,1} = mv_{A,2} + mv_{B,2}$$

Atom B er i ro før kollisjonen, slik at $v_{B,1} = 0$. Atomene henger sammen etter kollisjonen, slik at $v_{A,2} = v_{B,2} = v_2$. Vi finner da hastigheten etter kollisjonen:

$$mv_{A,1} = mv_2 + mv_2 = 2mv_2$$

Og dermed

$$v_2 = \frac{1}{2} v_{A,1}$$

Som er hastigheten til begge atomene. Denne er negativ siden $v_{A,1} < 0$.

e) Hvor stor må $v_{0,A}$ være for at atom B skal løsrive seg fra molekylet etter kollisjonen? (Atomet er løsrevet hvis det kan bevege seg vilkårlig langt vekk fra molekylet.)

Atom B løsriver seg dersom den totale energien er større eller lik U_0. Den totale energien etter kollisjonen er:

$$E_{B,2} = \frac{1}{2} m v_{B,2}^2 + U(b) = \frac{1}{2} m \left(\frac{1}{2} v_{A,1} \right)^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} m v_{A,1}^2 \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} m v_0^2 + U_0 \right)$$

Hvor vi har benyttet resultatet fra oppgave c)

Vi finner hastigheten atom A må ha før kollisjonen ved:

$$E_{B,2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}mv_0^2 + U_0\right) = U_0$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + U_0 = 4U_0$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = 3U_0$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{6U_0}{m}}$$

Hastigheten må være større enn dette for at atom B skal løsrive seg.

(Dersom du her har regnet med at atom A og B henger sammen bør du strengt tatt også ha tatt hensyn til at potensialet også er dobbelt så stort, fordi hvert atom har den potensielle energien $U(x)$. Hvis du derfor har fått en faktor 2 (eller ½) feil kommer vi ikke til å trekke for det.)

Vi skal nå studere den samme prosessen, men i to dimensjoner. Det massive molekylet ligger i ro i origo, og den potensielle energien til et atom har samme formen som ovenfor, men er nå en funksjon av atomets avstand, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ *, til origo:*

$$U(r) = \begin{cases} \infty & \text{når} \quad r < b - d \\ \frac{1}{2}k(r-b)^2 & \text{når} \quad b - d < r < b + d \\ U_0 & \text{når} \quad r > b + d \end{cases}$$

f) *Vis at kraften på atomet kan skrives som* $\vec{F}(\vec{r}) = -k(r-b)\frac{\vec{r}}{r}$ *når* $b - d < r < b + d$.

Vi finner kraften ved potensialet ved å bruke: $\vec{F} = -\nabla U$. Vi ser på x-komponenten:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}k(r-b)^2\right) = -k(r-b)\frac{\partial}{\partial x}(r-b) = -k(r-b)\frac{\partial}{\partial x}r$$

$$= -k(r-b)\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)^{1/2} = -k(r-b)\frac{1}{2}2x(x^2+y^2)^{-1/2} = -k(r-b)\frac{x}{r}$$

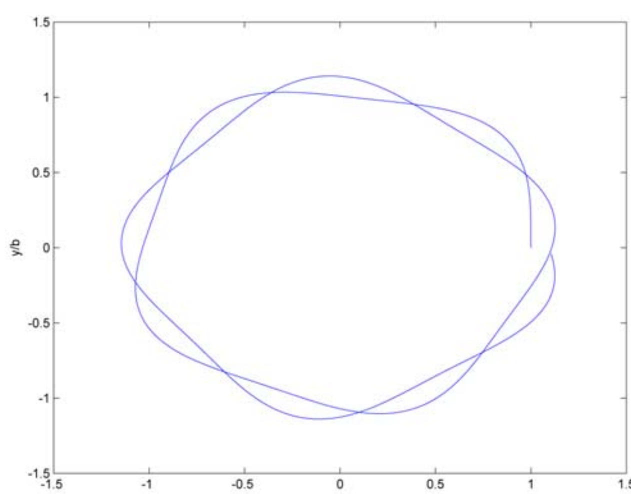
Og tilsvarende for y-komponenten.

g) *(Denne deloppgaven teller som 4 deloppgaver) Atomet starter med hastigheten* $\vec{v}_0$ *i posisjonen* $\vec{r}_0$ *ved tiden* $t = 0$. *Skriv et program som finner posisjonen til atomet som funksjon av tiden. Bruk fortrinnsvis Matlab eller Python og gjør det klart hvordan du representerer vektorer. Vis også hvordan du plotter banen til atomet.*

```
k = 100.0;
m = 1.0;
b = 1.0;
d = 0.5;
r0 = [1.0 0.0];
v0 = [0.0 2.8];
time = 5.0;
dt = 0.001;
%
n = round(time/dt);
t = zeros(n,1);
r = zeros(n,2);
v = zeros(n,2);
a = zeros(n,2);
v(1,:) = v0;
r(1,:) = r0;
for i = 1:n-1
       rr = norm(r(i,:));
       if (rr>b+d)
              F = [0.0 0.0];
       elseif (rr>b-d)
              F = -k*(rr-b)*r(i,:)/rr;
       else % Collision - reverse velocity in radial direction
              ur = r(i,:)/rr;
              vprojur = dot(v(i,:),ur);
              v(i,:) = v(i,:) - vprojur*ur + abs(vprojur)*ur;
       end
       a(i,:) = F/m;
       v(i+1,:) = v(i,:) + a(i,:)*dt;
       r(i+1,:) = r(i,:) + v(i,:)*dt;
       t(i+1) = t(i) + dt;
end
plot(r(:,1),r(:,2));
xlabel('x/b')
ylabel('y/b')
```

Merk at det her er lagt inn en del som tar hånd om hva som skjer når atomet prøver å gå inn i den harde kjernen. Vi har ikke trukket noe dersom denne delen ikke var med i koden. Men dere må her vise: (1) at dere kan bruke vektorer, og (2) at kraften har forskjellige verdier forskjellige steder i rommet, og at det trengs en test for å sette riktig kraft.

h) *Vi bruker programmet til å gjøre en simulering hvor $\vec{r}_0 = (b, 0)$ og $\vec{v}_0 = (0, v_0)$. Du ser resultatet i figuren til høyre. Forklar resultatet. Hvordan vil du gå fram for å måle periodetiden for denne bevegelsen i programmet ditt? (Her behøver du kun forklare hvordan det kan gjøres, du behøver ikke skrive koden).*



Figuren viser banen til atomet. Det går ikke i en sirkelbane, men svinger frem og tilbake rundt en sirkelbane. Dette skyldes at potensialet virker som en fjærkraft slik at hvis atomet beveger seg litt utenfor en sirkelbane vil det virke en kraft som trekker den tilbake igjen – atomet overskyter at sirkelbanen litt. Bevegelsen er i et horisontalt kutt gjennom potensialflaten gitt av den potensielle energien. Her er atomet bundet til molekylet.

Vi kan måle periodetiden ved å se hvor lang tid det tar før atomet skjærer aksen $y = 0$ på vei i positiv y-retning. Vi får bedre resultat dersom vi måler tiden det tar atomet å passere N ganger og så dele på N.

i) *Du ønsker at atomet skal gå i en sirkelbane om molekylet med farten v. Hvilke initialbetingelser må du velge for å få dette til? Kan du få dette til for enhver fart v? Begrunn svaret.*

Vi ser at kraften fra molekylet er avhengig av r. For å få dette til må kraften som virker på atomet gi en akselerasjon som er identisk med den akselerasjonen atomet må ha for å gå i en sirkelbane. Dvs:

$$a = \frac{F(r)}{m} = \frac{v^2}{r}$$

Vi setter inn for kraften, og finner:

$$\frac{k(r-b)}{m} = \frac{v^2}{r}$$

Som gir

$$r(r-b) = \frac{m}{k} v^2$$

Dette er en annengradslikning:

$$r^2 - rb - \frac{m}{k} v^2 = 0 \, .$$

Løsningen av denne likningen er:

$$r = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + 4mv^2 / k}}{2} = \frac{b}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4mv^2}{kb^2}}\right)$$

Hvor vi kun ser på den positive løsningen (siden r må være positiv). Merk at løsningen må være innenfor $b - d < r < b + d$, hvilket vi ikke får til dersom hastigheten blir så stor. Det er ikke så rart, fordi vi vet jo at den totale energien må være mindre enn U_0 for at atomet skal være bundet. Dersom hastigheten blir stor, vil den kinetiske energien bli stor, og atomet vil ikke lenger være bundet.

Vi antar at atom A, som vi følger bevegelsen til, kolliderer med atom B som ligger i ro i avstanden $r_B = b$. *Atom B er plassert slik at kollisjonen inntreffer idet* $r_A = r_B = b$. *Kollisjonen kan modelleres som et sentralt støt, og atomene henger sammen etter støtet.*

j) *Hvordan vil du modifisere programmet ditt for å modellere bevegelsen til atomet A før og etter kollisjonen?*

(Her er det nok å forklare hvordan du vil endre koden, du behøver ikke skrive ny kode.)

Programmet over finner banen til atom A. I det atomet har avstanden $r = b$ inntreffer kollisjonen. Siden kollisjonen er sentral, og atomene blir hengende sammen etter kollisjonen, har vi allerede funnet hastigheten til atom A og B etter kollisjonen i oppgave d). Vi modifiserer koden slik at (første gangen) atom A når $r = b$ endrer vi hastigheten til atom A slik vi fant i d). Deretter fortsette programmet som før. Den enest endringen for partikkelen er at den får en ny hastighet etter kollisjonen. Hastighetens retning endres ikke. (Dette gir full uttelling i oppgaven. Du behøver derfor ikke å ha løst oppgave d) riktig for å få full uttelling her.)

k) Atom A starter med hastigheten $\vec{v}_0$ *i posisjonen* $\vec{r}_0$ *ved tiden* $t = t_0$ *og kolliderer med atom B ved tiden* $t = t_1$. *Hva må til for at atom B skal løsrive seg fra molekylet etter støtet?*

Problemstillingen er den samme som i oppgave e). Selv om bevegelsen nå er to-dimensjonal blir energi-betraktningen den samme, og dermed blir også betingelsen den samme.

l) Hvordan må du velge $\vec{v}_0$ *og* $\vec{r}_0$ *for at atom B skal gå i en sirkelbane etter støtet?*

Det er ikke mulig å velge hastighet slik at banen blir en sirkelbane. (Du kan her bruke forskjellige argumenter for dette. For eksempel kan du bruke likningen $r(r-b) = \frac{m}{k}v^2$ som viser at når $r = b$ må hastigheten være null i en sirkelbane – og da har vi ingen sirkelbane.)

****

Dette er siste ark i oppgavesettet. Lykke til med oppgavene!