Løsningsforslag

Eksamen i Fys-mek1110 våren 2008

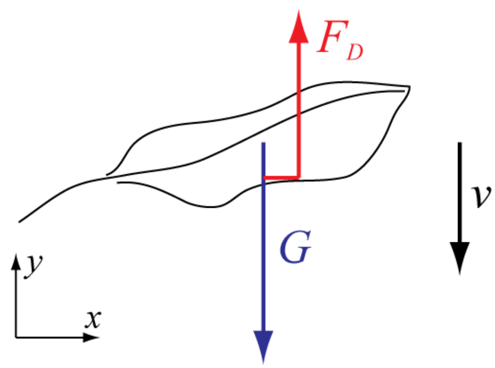
Oppgave 1

Vi skal i denne oppgaven studere bevegelsen til en (fugle-)fjær i en tornado. Vi begynner med å finne ut hvordan vi kan modellere fjæras oppførsel uten vind og utvikler deretter en metode for å finne bevegelsen i et gitt hastighetsfelt.

Først ser vi på bevegelsen til fjæra i et vindstille rom.

a) Identifiser kreftene på fjæra mens den faller og tegn et frilegemediagram for fjæra.

Kontaktkrefter: Luftmotstand F_D
Fjernkrefter: Gravitasjonskraft fra Jorda: G



b) Innfør kraftmodeller for kreftene, og finn et uttrykk for akselerasjonen til fjæra. Du kan anta en kvadratisk lov for luftmotstanden.

Kraftmodell for gravitasjon: $\vec{G} = -mg\hat{j}$
Kraftmodell for luftmotstand: $\vec{F}_D = -Dv\vec{v}$

Vi antar at fjæra beveger seg nedover, slik at luftmotstanden virker oppover, og anvender Newtons andre lov i vertikal retning:

$$\sum F = G + F_D = -mg + Dv^2 = ma$$

Som gir

$$a = -g + \frac{D}{m}v^2$$

c) Hastigheten til fjæra vil gå asymptotisk mot terminalhastigheten. Vis at terminalhastigheten er:

$$v_T = -\sqrt{\frac{mg}{D}}$$

hvor D er konstanten i luftmotstandsmodellen.

Fjæra akselererer nedover frem til akselerasjonen er null. Det inntreffer når fjæra når terminalhastigheten. Det vil si:

$$a = -g + \frac{D}{m}v_T^2 = 0 \Rightarrow v_T^2 = \frac{mg}{D}.$$

Vi vet at fjæra beveger seg nedover, slik at v_T må være negativ:

$$v_T = -\sqrt{\frac{mg}{D}}.$$

d) *Vi slipper fjæra fra en høyde h over gulvet og måler hvor lang tid, t, det tar før den treffer gulvet. Du kan anta at fjæra faller med konstant hastighet lik terminalhastigheten. Vis hvordan du kan bestemme D/mg ved å måle tiden t. Finn D/mg når du slipper fjæra fra en høyde på 2.4m over bakken og det tar 4.8s til den treffer bakken.*

Fjæra faller med konstant hastighet, v_T fra høyden h ved tiden 0s. Posisjonen for bevegelse med konstant hastighet er da:

$$y(t) = h + v_T t,$$

og den treffer bakken når $y(t) = 0$ m, som inntreffer når

$$h + v_T t = 0 \Rightarrow v_T = -\frac{h}{t} = -\sqrt{\frac{mg}{D}}.$$

Vi finner derfor at:

$$\frac{mg}{D} = \left(\frac{h}{t}\right)^2,$$

og at

$$\frac{D}{mg} = \left(\frac{t}{h}\right)^2 = \left(\frac{4.8s}{2.4m}\right)^2 = 4.0s^2m^{-2}.$$

e) *Vi skal nå utvikle en mer presis modell hvor vi ikke antar at hastigheten er konstant. Du* *slipper fjæra fra høyden h ved tiden $t = 0\,s$. Finn likningen du må løse for å finne posisjonen til fjæra som funksjon av tiden. Hva er initialbetingelsene?*

Likningen er gitt av akselerasjonen til fjæra, som vi fant over:

$$a = \frac{d^2 y}{dt^2} = -g - Dv|v|$$

Initialbetingelsene er $y(0s) = h$ og $v(0s) = 0m/s$.

f) (*Denne oppgaven teller dobbelt) Skisser en algoritme for å finne hastigheten og posisjonen til fjæra ved tiden $t + \Delta t$ når du kjenner hastigheten og posisjonen ved tiden t. Skriv et kort program som finner posisjonen og hastigheten til fjæra som funksjon av tiden.*

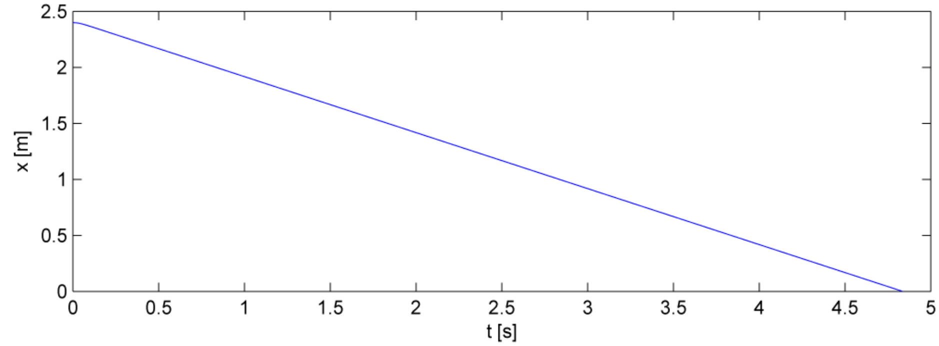
Vi anvender Euler-Cromers metode:

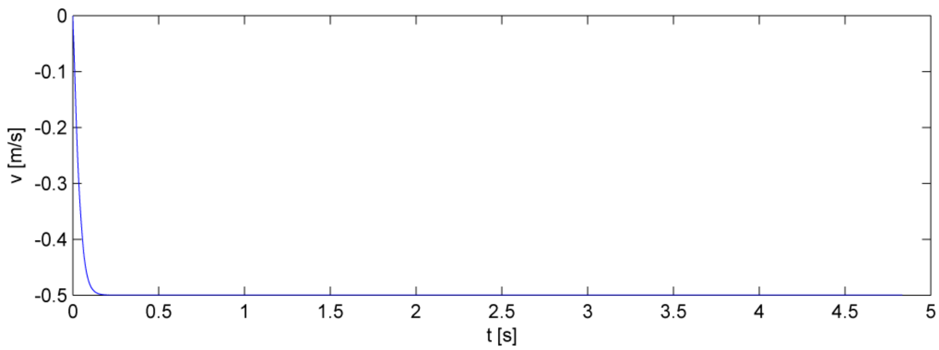
$$v(t+\Delta t) = v(t) + a(t)\Delta t = v(t) + \left(-g - g\frac{D}{mg} v(t)|v(t)| \right)\Delta t$$

$$y(t+\Delta t) = y(t) + v(t+\Delta t)\Delta t$$

Dette er implementert i det følgende programmet:

```
% Program for a falling feather
clear all;
h = 2.4;
Dmg = 4.0;
g = 9.8;
time = 10.0;
dt = 0.001;
n = round(time/dt);
t = zeros(n,1);
x = zeros(n,1);
v = zeros(n,1);
a = zeros(n,1);
x(1) = h;
v(1) = 0.0;
%
i = 1;
while (i<n)&&(x(i)>=0.0)
    a(i) = -g - g*Dmg*v(i)*abs(v(i));
    v(i+1) = v(i) + a(i)*dt;
    x(i+1) = x(i) + v(i+1)*dt;
    t(i+1) = t(i) + dt;
    i = i + 1;
end
%
i = i - 1;
x(i)
t(i)
subplot(2,1,1)
plot(t(1:i),x(1:i))
xlabel('t [s]')
ylabel('x [m]')
subplot(2,1,2)
plot(t(1:i),v(1:i))
xlabel('t [s]');
ylabel('v [m/s]')
```





g) Figuren over viser et resultat fra programmet med parametere slik de ble estimert i oppgave d). Var tilnærmingen i oppgave d) rimelig? Begrunn svaret.

Figuren viser at hastigheten er tilnærmet konstant etter kun en meget kort transientperiode i begynnelsen av bevegelsen. Ved å anta en konstant hastighet lik terminalhastigheten, og bruke verdiene fra dette til å estimere D/mg vil vi derfor finne at det i simuleringen tar litt lengre tid for fjæra å nå bakken enn det vi har målt. Vi bør i stedet bruke programmet vårt (eller en eksakt løsning av dette problemet),til å bestemme D/mg , men feilen vi gjør vil være ganske liten. Tilnærmingen vi gjorde er derfor overraskende god.

Vi har nå funnet en modell som kan brukes til å finne bevegelsen til fjæra. Vi skal nå finne bevegelsen til fjæra i tre dimensjoner når det blåser. Vinden har hastigheten $\vec{w}$ i posisjonen $\vec{r}$: $\vec{w} = \vec{w}(\vec{r})$.

h) Finn et uttrykk for akselerasjonen til fjæra uttrykt ved bl.a. $\vec{w}(\vec{r})$. La z -aksen være den vertikale aksen.

Kreftene er i dette tilfellet de samme som tidligere, men vi må nå ta hensyn til at det er hastigheten til fjæra i forhold til vindhastigheten som inngår i kraftmodellen for luftmotstand. Newtons andre lov gir da:

$$\sum \vec{F} = \vec{G} + \vec{F}_D = -mg\hat{k} - D(\vec{v} - \vec{w})|\vec{v} - \vec{w}| = m\vec{a} \text{ ,}$$

som gir

$$\vec{a} = -g\hat{k} - g\frac{D}{mg}(\vec{v} - \vec{w})|\vec{v} - \vec{w}|$$

i) *Anta at fjæra tilnærmet beveger seg i et horisontalt plan – dvs. at den vertikale akselerasjonen er ubetydelig. Hvordan må vindhastigheten være for at fjæra skal bevege seg med konstant fart* v_0 *i en sirkelbane med radius* r_0 *?*

Vi vet at dersom fjæra skal bevege seg i en sirkelbane må akselerasjonen til fjæra være sentripetalakselerasjonen for bevegelse i en sirkelbane:

$$\vec{a} = \frac{v_0^2}{r_0}\hat{u}_N \text{ ,}$$

hvor $\hat{u}_N$ er en enhetsvektor som peker inn mot sentrum i sirkelbanen. Men hastigheten til fjæra er: $\vec{v} = v_0\hat{u}_T$, hvor $\hat{u}_T$ er tangential til banen. Hvis vi skriver vindens hastighet med disse enhetsvektorene, samt med enhetsvektoren $\hat{k}$ som er normal til planet, blir den:

$$\vec{w} = w_T\hat{u}_T + w_N\hat{u}_N + w_z\hat{k} \text{ ,}$$

og akselerasjonen er da:

$$\vec{a} = -g\hat{k} - g\frac{D}{mg}(\vec{v} - \vec{w})|\vec{v} - \vec{w}| \approx -g\frac{D}{mg}(\vec{v} - \vec{w})|\vec{v} - \vec{w}| \text{ ,}$$

siden vi kan se bort fra vertikalbevegelsen. Vi setter inn for $\vec{w}$ og finner:

$$\vec{a} \approx -g\frac{D}{mg}(v_T\hat{u}_T - w_T\hat{u}_T - w_N\hat{u}_N)|\vec{v} - \vec{w}| \text{ .}$$

Vi ser derfor at for at akselerasjonen skal være rettet inn mot sentrum i banen, må vindhastigheten være slik at den kansellerer den tangentielle hastigheten til fjæra:

$$w_T = v_T = v_0$$

Dessuten, må akselerasjonen inn mot sentrum i banen svare til sentripetalakselerasjonen:

$$\vec{a} \approx g\frac{D}{mg}(w_N\hat{u}_N)|w_N\hat{u}_N| = \frac{Dw_N^2}{m} = \frac{v_0^2}{r_0} \text{ ,}$$

som gir

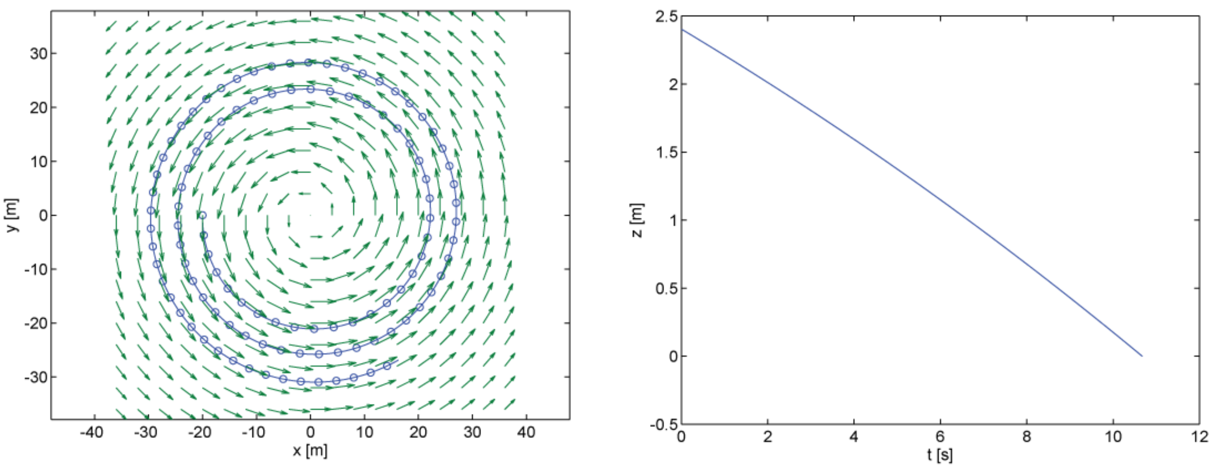
$$w_N = \sqrt{\frac{m}{Dr_0}} v_0$$

Vindens hastighet må derfor ha både en tangentiell og en normal komponent for at fjæra skal kunne gå i en sirkelbane

For en tornado med sentrum i origo er vindhastigheten:

$$\vec{w}(\vec{r}) = u_0 r e^{-r/R} \hat{u}_n = u_0 (-y, x, 0) e^{-r/R}$$

Hvor u_0 er en karakteristisk hastighet for vinden, R er radius for tornadoen, og $\hat{u}_n$ er en tangentiell enhetsvektor i det horisontale planet. ($\hat{u}_n$ er normal til $\vec{r}$). Her er $\vec{r} = (x, y, z)$ og $r = |\vec{r}|$. Hastighetsfeltet er vist i figuren under.



j) Kan man med et passende valg av initialbetingelser få fjæra til å bevege seg i en sirkelbane i tornadoen? Begrunn svaret ditt.

Nei. For at fjæra skal kunne gå i en sirkelbane må det (i det minste) være en akselerasjon inn mot sentrum i banen. Siden vindhastigheten er rent radiell, er det ingen krefter inn mot sentrum i banen når fjæra også beveger seg i tangentiell retning. Det er også tydelig fra svaret i oppgaven over.

k) Skriv et program som finner posisjon og hastighet til fjæra som funksjon av tiden. (Det er tilstrekkelig å ta med den delen av programmet som viser hvordan du finner nye hastighets- og posisjonsvektorer fra de foregående verdiene).

Det sentrale i dette programmet er å vise hvordan man behandler hastighetsfeltet til vinden, samt å vise at man kan behandle både vektorer og skalarer i programmet. Et eksempel på implementasjon er gitt under:

```
clear all;
Dmg = 4.0;
R = 20.0; % Size in meters
U = 100.0; % Velocity in m/s
g = 9.8;
time = 15.0;
dt = 0.001;
n = round(time/dt);
t = zeros(n,1);
r = zeros(n,3);
v = zeros(n,3);
a = zeros(n,3);
%
t(1) = 0.0;
r(1,:) = [-1.0*R 0.0 2.4];
v(1,:) = [0.0 0.0 0.0];
%
i = 1;
while ((r(i,3)>=0.0)&&(i<n-1))
    rr = norm(r(i,:));
    u = U*[-r(i,2) r(i,1) 0.0]*exp(-rr/R)/R;
    vrel = v(i,:) - u;
    aa = -g*[0 0 1] - g*Dmg*norm(vrel)*vrel;
    a(i,:) = aa;
    v(i+1,:) = v(i,:) + aa*dt;
    r(i+1,:) = r(i,:) + v(i+1,:)*dt;
    t(i+1) = t(i) + dt;
    i = i + 1;
end
imax = i;
% Plot trajectory with wind velocity field
dx = 4.0;
[x,y] = meshgrid(-1.8*R:dx:1.8*R,-1.8*R:dx:1.8*R);
rr = sqrt(x.*x+y.*y);
ux = -U*y.*exp(-rr/R)/R;
uy = U*x.*exp(-rr/R)/R;
i = (1:imax);
plot(r(i,1),r(i,2));
i = (1:100:imax);
hold on
plot(r(i,1),r(i,2),'o');
quiver(x,y,ux,uy);
hold off
axis equal
```

l) *Figuren over viser banen til fjæra når den slippes med null hastighet i en høyde av 2.4m. Sammenlikn med resultatet i oppgave h). Hvorfor bruker fjæra nå lengre tid på å nå bakken?*

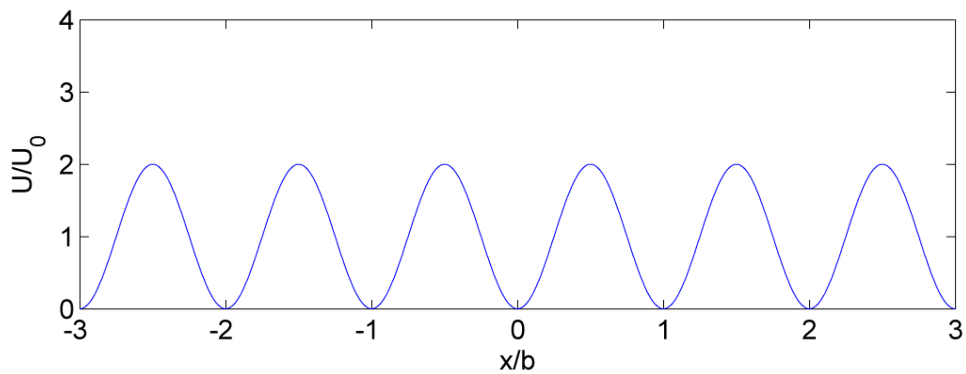
For bevegelsen med luftmotstand er ikke bevegelsene i horisontal og vertikal retning uavhengige slik de er for fall uten luftmotstand. Den vertikal akselerasjonen er avhengig av den horisontale hastigheten relativt til vindhastigheten. Luftmotstanden blir større når den relative hastigheten er større, slik at den vertikale akselerasjonen blir mindre. Fjæra bruker derfor (mye) lengre tid på å falle en til overflaten.

Oppgave 2

Vi skal i denne oppgaven studere bevegelsen til et atom nær en overflate. Vi beskriver bevegelsen til atomet kun i en dimensjon, langs x-aksen. Atomet er kun påvirket av en kraft: kraften fra overflaten på atomet. Den potensielle energien til atomet er da:

$$U(x) = U_0\left(1 - \cos\frac{2\pi}{b}x\right)$$

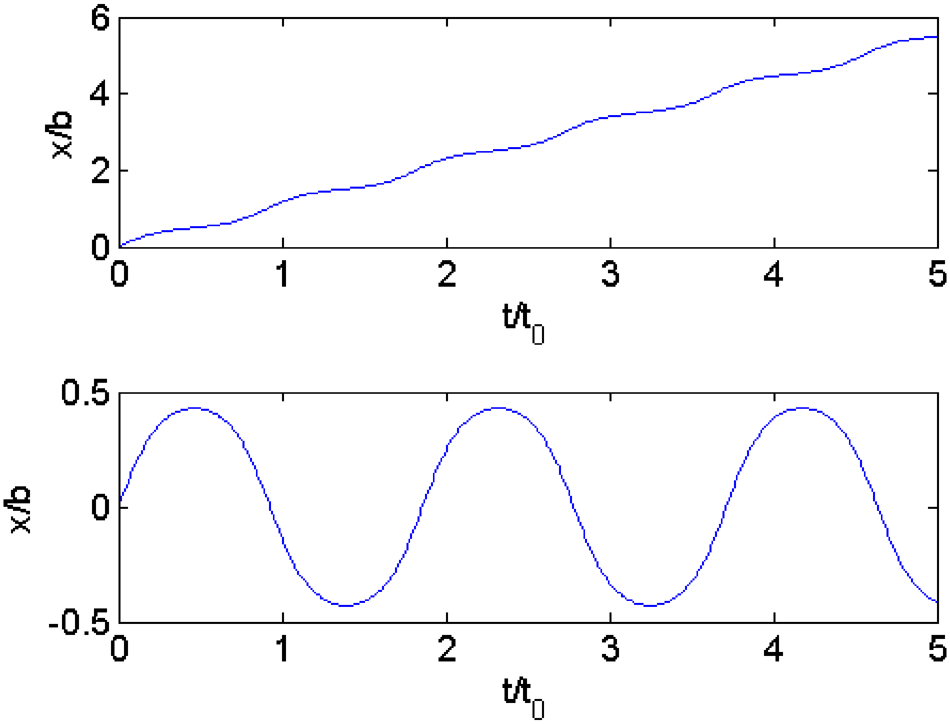
hvor U_0 *er en konstant med enhet energi, og* b *er en lengde som typisk er rundt en nanometer. Atomets masse er* m. *Den potensielle energien er vist i figuren under:*



a) *Finn likevektspunkter for potensialet og karakteriser disse. Tegn inn en bevegelse hvor totalenergien er mindre enn* $2U_0$ *og en bevegelse hvor totalenergien er større enn* $2U_0$, *og skisser* $x(t)$ *for bevegelsene.*

Likevektspunktet finner vi hvor den deriverte av potensialet er null. Fra figuren ser vi at potensialet er minimalt når $x = i \cdot b$ hvor i er et heltall. Dette er stabile likevektspunkter. Vi ser at potensialet er maksimalt når $x = \frac{2i+1}{2} \cdot b$ hvor i er et heltall, og her er ustabile likevektspunkter. Dette kan vi også finne ved å se på den deriverte av potensialet.

La oss se på en bevegelse som starter i $x = 0$, hvor potensialet er null, med hastighet i positiv x-retning. Dersom den totale energien er mindre enn $2U_0$ vil atomet bevege seg i positiv x-retning, inntil den kinetiske energien blir null, og atomet snur. Slik vil det fortsette å oscillere frem og tilbake. Det er ingen andre krefter, så bevegelsen til atomet vil ikke være dempet. Dersom den totale energien er større en $2U_0$ vil atomet bevege seg i positiv x-retning hele tiden, men hastigheten vil variere i størrelse pga. vekselvirkningen med underlaget. Skisser for bevegelser er vist i figuren under:



b) Finn kraften $F(x)$ på atomet fra overflaten. Er denne kraften konservativ? Begrunn svaret.

Kraften er gitt som:

$$F = -\frac{dU}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(U_0\left(1-\cos\frac{2\pi x}{b}\right)\right) = -\frac{2\pi U_0}{b}\sin\frac{2\pi x}{b}$$

Kraften er konservativ da den er avledet av et potensiale.

c) Finn arbeidet utført av kraften $F(x)$ på atomet når det beveger seg fra $x=0$ til $x=b/2$.

Arbeidet utført av kraften $F(x)$ er:

$$W = \int_0^{b/2} F(x)dx = U(0) - U(b/2) = 0 - 2U_0 = -2U_0 \,.$$

d) *Hvor stor hastighet v_0 må atomet ha i punktet $x = 0$ for at det skal ha null hastighet i punktet $x = b/4$?*

Siden atomet kun er påvirket av den konservative kraften $F(x)$ er den totale energien bevart. Bevaring av mekanisk energi gir da:

$$E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 + U(0) = E_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 + U(\frac{b}{4}) = \frac{1}{2}m0^2 + U_0 = U_0$$

Vi setter inn $U(0) = 0$ og får:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = U_0 \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2U_0}{m}}$$

La oss anta at atomet også påvirkes av en konstant ytre kraft F_0 i x-retningen.

e) *Finn arbeidet utført av kraften F_0 på atomet når det beveger seg fra $x = 0$ til punktet x.*

Arbeidet utført av kraften F_0 er:

$$W = \int_0^x F_0 dx = F_0 x = -\left(U_F(x) - U_F(0)\right)$$

Hvor vi har innført den potensielle energien $U_F(x)$ for kraften F_0.

f) *Finn et uttrykk for den totale potensielle energien til atomet, $U_{TOT}(x)$.*

Den totale potensielle energien er summen av de potensielle energiene for hver av vekselvirkningene:

$$U_{TOT} = U(x) + U_F(x) = U(x) - F_0 x$$

Hvor vi nå har valgt at den potensielle energien er null når $x = 0$, mens du står fritt til å velge et annet nullpunkt.

g) *Anta at atomet har total mekanisk energi U_0 før den ytre kraften F_0 skrus på. Hvor stor må F_0 være for at atomet skal bli trukket fri fra overflaten når kraften skrus på? Vi sier at atomet er fri fra overflaten dersom det vil kunne bevege seg uendelig langt bort langs x-aksen.*

Vi plasserer atomet i punktet $x = 0$. Da er den totale mekaniske energien U_0 kun kinetisk energi. Vi skrur så på den ytre kraften F_0. Dette endrer ikke den totale mekaniske energien til atomet. Atomet er fritt dersom det kan bevege seg uendelig langt bort langs x-aksen. Det kan det gjøre dersom det passerer den første lokale toppen i den totale potensialet, og det gjør atomet dersom den kinetiske energien er større enn null i punktet $x = b/2$. Den totale potensielle energien i punktet $x = b/2$ er:

$$U_{TOT}(b/2) = U(b/2) + U_F(b/2) = 2U_0 - F_0(b/2).$$

Den totale mekaniske energien er bevart for bevegelsen, og er lik U_0, slik at:

$$U_{TOT}(b/2) + K(b/2) = U_0,$$

hvor vi setter $K(b/2) = 0$ og finner F_0 som gjør at vi akkurat når denne verdien:

$$U_{TOT}(b/2) = 2U_0 - F_0(b/2) = U_0,$$

og

$$F_0 = \frac{2U_0}{b}.$$

Dette er derfor den marginale verdien. Dersom kraften er større enn dette, blir atomet fritt.