Korrigert løsningsforslag til eksamen i

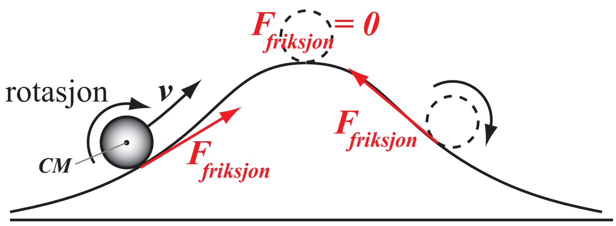
FYS-MEK 1110 - Mekanikk / FYS-MEF 1110 - Mekanikk for MEF / FY-ME100, torsdag 3. juni 2004

1. Forståelsesspørsmål

a) *Kan et legeme som har konstant akselerasjon endre bevegelsesretning? Gi en kort begrunnelse for svaret.*

Ja, siden hastighet er en vektoriell størrelse kan vi ha både positive og negative verdier av en hastighet. En ball som kastes rett oppover vil ha konstant akselerasjon nedover, hvilket betyr at *hastigheten oppover* avtar med et konstant mengde pr sekund. Før eller siden blir *hastigheten oppover* lik null, og siden negativ, hvilket betyr at ballen har nådd sitt høyeste punkt og så vender nedover igjen.

b) *En kule triller oppover en bakke, passerer toppen og triller så nedover en bakke på motsatt side. Skissér hvilken retning friksjonen virker* fra underlaget på kula*, på vei opp, på toppen og på vei ned. Begrunn svaret. Vi antar at vi har ren rulling.*



Retningen til friksjonen fra underlaget på kula er markert med pilene i figuren. På grunn av energibevaring (ingen sluring mot underlaget) må bevegelsesenergi gå over i potensiell energi på veien opp. Kula har ren rulling, hvilket betyr at også rotasjonshastigheten (vinkelhastigheten) må avta på veien oppover. Det betyr at kula har en vinkelakselerasjon om massemiddelpunktet, og at vinkelakselerasjonen fører til at vinkelhastigheten avtar. Da må det være et kraftmoment som gir denne vinkelakselerasjonen om massemiddelpunktet (ifølge spinnsatsen). Det er tre krefter som virker på kula, gravitasjonen, normalkraften fra underlaget, og friksjonen fra underlaget. Virkelinjen til de to første går gjennom massemiddelpunktet, og de kan derfor ikke sette opp noe kraftmoment om dette punktet (eller aksen gjennom massesenteret). Friksjonen er den eneste kraft som har et kraftmoment om aksen gjennom massesenteret. Friksjonen må sette opp et kraftmoment som virker *mot* rotasjonsbevegelsen på vei oppover, og det gir den retningen på friksjonskraften som er indikert.

På toppen har ikke kula noe vinkelakselerasjon (av energimessige årsaker), det vil si at friksjonskraften her er null. På veien nedover blir argumentasjonen som på veien opp, bare med motsatt fortegn, det vil si at friksjonskraften må sette opp et kraftmoment som fører til raskere og raskere rotasjon. Friksjonskraften må da virke som angitt i figuren.

c) *Dersom man kaster en ball rett oppover og ikke kan se bort fra luftmotstanden, vil ballen da bruke samme tid på en bestemt veistrekning på vei oppover som på vei nedover? I fall den ikke* *bruker samme tid på den bestemte veistrekningen, bruker den da lengst tid på vei opp eller på vei ned? Begrunn svaret.*

På vei oppover vil gravitasjonskraften og luftmotstanden virke samme retning, mens de virker motstatt retning på veien ned. Akselerasjonen (tallverdien) oppover er større enn (tallverdien av) akselerasjonen nedover. Følgelig må ballen bruke lenger tid på veien ned enn på veien opp.

d) *En kvinne står på speilblank is (friksjonen tilnærmet lik null). Hun kaster en ball (et vanlig kast litt på skrå oppover). Vil vi ha konservering av bevegelsesmengden for systemet "kvinne pluss ball"? Begrunn svaret.*

"Friksjonen er tilnærmet lik null" betyr at det (nesten) ikke virker *horisontale* krefter på kvinnen (+ ball), selv når hun kaster ballen. Når det da ikke er noen *ytre* krefter i horisontal retning for systemet (kvinne + ball), er bevegelsesmengden konservert i denne retningen. I vertikal retning er det imidlertid annerledes. Når kvinnen kaster ballen på *skrå oppover*, vil massesenteret til systemet (kvinne + ball) bli akselerert litt oppover akkurat idet ballen kastes. Dette er slik fordi ballen akselereres oppover, mens kvinnen ikke får en tilsvarende bevegelse nedover pga at isen er hard (hun må sparke litt ekstra ifra idet ballen kastes). Men siden massesenteret til systemet (kvinne + ball) blir akselerert, må det virke en netto ytre kraft på systemet oppover. Da er ikke bevegelsesmengden for systemet bevart i loddrett retning, og dermed er *total* bevegelsesmengde ikke bevart.

e) *En erfaren kokk kan avgjøre om et egg er kokt eller rått ved å trille det nedover et skråplan. Forklar.*

I et hardkokt egg vil hele innmaten bevege seg med samme rotasjonshastighet (vinkelhastighet) som skallet, mens det i et rått egg er mulig å få eggeskallet til å rotere raskere enn innmaten. I et rått egg vil derfor rotasjonsenergien være noe mindre enn for et hardkokt egg for en gitt rotasjonshastighet - og derved en og samme translatoriske bevegelsesenergi (såfremt vi har ren rulling). Energibevaring tilsier da at det rå egget vil rulle fortere enn det hardkokte. For bløtkokt egg vil ikke effekten være fullt så stor, men likevel i samme retning.

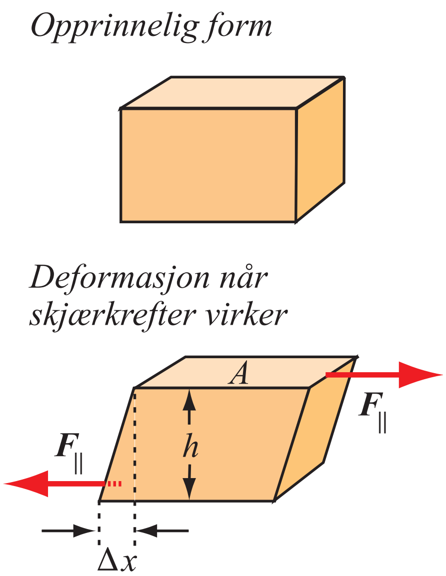
f1) (*Ikke* for FYS-**MEF**1110-studentene) *Når Halleys komet er på vei innover mot Solen er det gravitasjonen som hele tiden trekker kometen mot seg. Men hvorfor vil kometen etter en stund fjerne seg* fra *Solen (etter at perihel er passert) til tross for at gravitasjonskraften fortsatt peker* mot *Solen?*

Dette spørsmålet kan besvares på flere måter, men en enkel forklaring er at mens kometen er på vei innover, får den stadig større hastighet (fart langs banen). Før eller siden blir *farten så stor at gravitasjonskraften ikke er kraftig nok til å gi en krumning på banen som ville føre til at kometen kom enda nærmere Solen*. Da er vi i perihel og hastigheten er vinkelrett på radiusvektor fra Solen til kometen. Banefarten er da *alt for stor* til at kometen f.eks. kunne fortsatt i en sirkulær bane med perihelavstanden som radius. Fra da av vil kometen fare videre i *kraft av sin treghet*. Man kan ikke bremse opp et legeme momentant, og for Halleys komet vil oppbremsingen skje i løpet av de ca 38 årene kometen fjerner seg fra Solen. Når den tid er gått (og vi har nådd aphel) er hastigheten igjen normal på radiusvektor, men kometen har nå en *alt for liten* fart til at man kan fortsette f.eks. i en sirkelbane med radius lik aphel-avstanden til Solen. Kometen vil igjen trekkes innover mot Solen, farten vil på ny øke, og neste runde er i gang.

f2) (Kun for FYS-**MEF**-studentene) *Hva mener vi med "skjærspenning"? Hva forteller denne størrelsen oss om?*

Med skjærspenning menes kraft pr flate:

$$\text{Skjærspenning} = \frac{F_{\|}}{A}$$



når vi forsøker å deformere et stivt legeme på tvers av tverrsnittet gjennom legemet på den måten figuren til høyre indikerer. Kraften virker parallellt med flaten A som inngår i definisjonen ovenfor.

Skjærspenningen er en måte å angi "drivkraften" for en skjær-deformasjon på. "Effektmålet" (hvor stor deformasjonen faktisk blir) er gitt ved hjelp av "skjærvinkelen" definert som $\Delta x/h$ (se figur for definisjon av størrelsene), mens materialets evne til å motstå seg en skjær-deformasjon er gitt ved "skjærmodulen" på følgende måte:

$$\text{Skjærmodul} = \frac{\text{Skjærspenning}}{\text{Skjærvinkel}}$$

Vi ser altså at jo større skjærspenning, desto større blir skjærvinkelen (og derved deformasjonen) for et gitt materiale.

g) *Hvilke størrelser må man kjenne for å angi "en hendelse" (eng.: event) i relativitetsteorien? Hvilke krav må innfris for at man skal kunne måle egentid (eng.: proper time) og egenlengde (eng.: proper length)?*

En "hendelse" i relativitetsteorien er alltid angitt ved både tid og posisjon, siden det bare er størrelser hvor tid og posisjon er oppgitt sammen som kan transformeres på en meningsfylt måte fra et inertialsystem til et annet.

Skal man måle egentid mellom to tidspunkt, representert ved to hendelser, må man være i et inertialsystem hvor de to hendelsene måles ved samme posisjon. [Det betyr forøvig at det finnes hendelser som ikke kan tilordnes noe egentid mellom seg (dersom hendelsene bare kan forbindes med overlyshastighet).]

Skal man måle egenlengde mellom to posisjoner, representert ved to hendelser, må man være i et referansesystem hvor posisjonene det er snakk om (f.eks. i hver sin ende av en stav) ligger i ro i dette referansesystemet.

Oppgave 2

Pendelen som ble brukt for å framskaffe de eksperimentelle dataene som var utgangspunkt for prosjektoppgaven i vår, var laget av en homogen stålkule med masse M (= 49.7 g) og radius R (= 23.0 mm), og hang i en tynn tråd (med masse m = 0.385 g). Avstanden mellom opphengningspunktet og midten av kula er L (= 138.5 cm). Pendelens treghetsmoment I_p om opphengningspunktet blir ofte tilnærmet angitt som ML^2.

a) *Bruk parallellakseteoremet for å beregne relativ feil man gjør ved å anta at $I_p = ML^2$ framfor å også ta hensyn til kulas størrelse. Anta i denne deloppgaven at man kan se bort fra massen til snora. (Relativ feil kan f.eks. angis som feil i % dersom man ønsker det.)*

Ifølge parallellakseteoremet skal det totale treghetsmomentet for systemet (når vi ser bort fra massen til snora) være:

$$I_p' = I_{CM} + ML^2$$

Feilen vi gjør ved å sløyfe I_{CM}-leddet er nettopp lik I_{CM}. Den relative feilen blir da I_{CM} dividert med det "riktige" treghetsmomentet. Følgelig får vi (treghetsmomentet for en kule var oppgitt i oppgaveteksten):

$$\text{Relativ feil} = \frac{I_{CM}}{I_{CM} + ML^2} = \frac{\frac{2}{5}MR^2}{\frac{2}{5}MR^2 + ML^2} = \frac{1}{1 + \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{L}{R}\right)^2}$$

Innsatt for oppgitte verdier:

$$\text{Relativ feil} = \frac{1}{1 + \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{138.5}{2.3}\right)^2} = 1.10\text{e-}4$$

Dersom man vil ha resultatet i antall prosent, blir det 0.011 %. Med andre ord, den relative feilen er faktisk ganske liten.

[Dersom noen husker tallene fra prosjektoppgaven, var det faktisk *diameteren* til kula som var 23 millimeter, og ikke radien slik vi her har skrevet. Dersom vi hadde brukt riktig radius, ville feilen blitt enda mindre, nemlig 2.76e-5 (eller 0.0028 %).]

b) *Hva er da forholdet mellom I_{snor} og ML^2 for en akse om opphengningspunktet? (Vi antar at snora her kan anses som et "stivt legeme" så lenge den er strukket ut ved at pendelutslaget er godt under 90 grader.)*

Vi hadde oppgitt at treghetsmomentet for en tynn, homogen stav med masse m og lengde l om *massesenteret* er $\frac{1}{12}ml^2$. Treghetsmomentet om en akse i enden av staven finner vi ved å anvende parallellakseteoremet:

$$I_{snor} = I_{snor,\,CM} + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}ml^2 + \frac{1}{4}ml^2 = \frac{1}{3}ml^2$$

Lengden på snora er gitt ved: $l = L - R$. Forholdet mellom I_{snor} og ML^2 for en akse om opphengningspunktet er da:

$$\frac{\frac{1}{3}m(L-R)^2}{ML^2} = \frac{m}{3M}\cdot\left(1-\frac{R}{L}\right)^2$$

Innsatt oppgitte verdier:

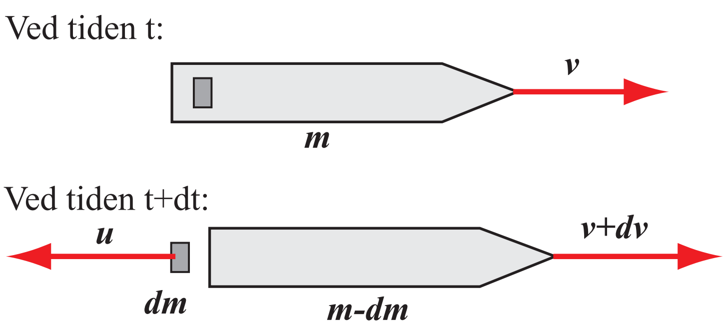
$$\frac{0.385}{3\cdot 49.7}\cdot\left(1-\frac{2.30}{138.5}\right)^2 = 2.50\text{e-}3$$ eller evt. 0.25 %.

Vi ser at treghetsmomentet til snora er lite sammenliknet med det til kula, men det er likevel ikke så stor forskjell her som man kanskje skulle tro.

Oppgave 3

En rakett i verdensrommet har ved tiden t en hastighet v (i forhold til et referansesystem hvor sola ligger i ro), masse m, og slynger ut brenngasser med en hastighet v_b bakover relativt til raketten. I løpet av en tid dt slynges det ut brenngasser med masse dm. Sett opp likning(er) som i prinsippet forbinder systemet ved tiden t og ved tiden t+dt, og bruk disse for å finne akselerasjonen til raketten i det aktuelle tidsrommet. Forklar tankegangen og hvilke fysiske lover som ligger bak likningen(e) du setter opp.

Vi betrakter et system som består av raketten ved tiden t, og samme system vil ved tiden $t+dt$ bestå av raketten med litt endret hastighet og litt mindre masse, pluss brenngassene som flyr av gårde bakover med en hastighet u relativt til et inertialsystem (se figur). Siden det ikke antas å virke ytre krefter på dette systemet, må total bevegelsesmengde være identisk ved tiden $t+dt$ som ved t.



Vi har bare oppgitt hastigheten v_b til brenngassene i forhold til raketten, men når all bevegelse skjer langs samme endimensjonale linjen, får vi den enkle relasjonen: $u = v_b - v$. Her er fortegnene valgt ut fra den retningen som pilene peker i figuren ovenfor.

Under samme forutsetning (fortegn på hastigheter) får vi følgende uttrykk ut fra bevaring av bevegelsesmengde:

$$mv = (m - dm)(v + dv) - dm(v_b - v)$$

Multipliserer ut og ordner ledd:

$$m \cdot v = m \cdot v - dm \cdot v + m \cdot dv - dm \cdot dv - dm \cdot v_b + dm \cdot v$$

$$m \cdot dv = dm \cdot dv + dm \cdot v_b$$

Når dt er en liten størrelse, vil “annenordensleddet” $dm \cdot dv$ bli svært lite i forhold til de to andre leddene, så vi kan se bort fra dette. Vi dividerer så de resterende to leddene med dt, og får:

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{dm}{dt} \cdot v_b$$

Følgelig:

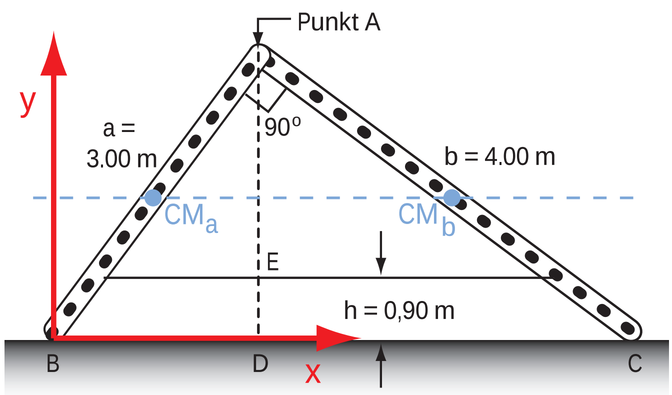
$$\frac{dv}{dt} = a = \frac{v_b}{m} \cdot \frac{dm}{dt}$$

Akselerasjonen til raketten er derfor proporsjonal med hvor mye brennstoff som forbrukes pr sekund, samt relativhastigheten til brenngassen i forhold til raketten.

Det er flere mulige varianter av uttrykket ovenfor som kan være helt ok, bare man har forklart hva man har gjort og fysiske lover er overholdt. Eksempelvis kan man gjerne få et minustegn dersom man regner dm som negativ (slik det er gjort i læreboka) eller at man regner v_b som negativ.

Oppgave 4

To stiger, 3.00 m og 4.00 m lange, er hengslet sammen (gjennom en rett vinkel) i et punkt A og bundet sammen med en horisontal snor 0.90 m over gulvet (se figur). Stigene veier henholdsvis 390 N og 520 N, og massesenteret ligger i sentrum for hver av dem. Anta at gulvet er nybonet og nærmest friksjonsløst.



a) *Finn massesenteret til systemet som består av begge stigene.*

Vi trenger å ha noe å referere til når posisjoner skal angis. Jeg har valgt et origo som antydet på figuren. Videre trenger vi å gjøre noen forhåndsberegninger. Avstanden BC ser vi umiddelbart er 5.00 m (fås fra Pythagoras for en rettvinklet trekant med de to korteste sidene lik hhv 3 og 4 meter).

Videre får vi at trekant DBA er likeformet med trekant ABC. Følgelig er:

$$\frac{BD}{AB} = \frac{AB}{BC}$$

Følgelig er:

$$BD = \frac{3.00^2}{5.00} = 1.80 \text{ m}$$

Det vil også si at:

$$DC = (5.00 - 1.80) \text{ m} = 3.20 \text{ m}$$

Høyden AD kan f.eks. finnes ved å sette opp to uttrykk for samme areal:

$$\frac{ab}{2} = \frac{AD \cdot BC}{2}$$

Følgelig:

$$AD = \frac{a \cdot b}{BC} = \frac{12.00}{5.00} \text{ m} = 2.40 \text{ m}$$

Da har vi stort sett alle avstander som trengs for videre beregninger.

Massesenteret.

Her kan vi ta utgangspunkt i massesenterne til de to del-stigene, og bruker standardrelasjonen:

$$\boldsymbol{r}_{cm} = \frac{\sum_i \boldsymbol{r}_i \cdot m_i}{\sum_i m_i}$$

Når uttrykket for posisjonsvektor for massesenteret anvendes for vårt system, og vi nå tar komponenter i x og y-retning samtidig (vha ulike enhetsvektorer), får vi:

$$\boldsymbol{r}_{cm} = \frac{(BD/2) \cdot m_a + (BD + DC/2) \cdot m_b}{m_a + m_b} \cdot \boldsymbol{u}_x + \frac{(AD/2) \cdot m_a + (AD/2) \cdot m_b}{m_a + m_b} \cdot \boldsymbol{u}_y$$

Her er det benyttet at massesenteret til hver av stigene *a* og *b* ligger midt i stigene. I uttrykket vi nettopp fant inngår massene til hver del vi summerer over. I vår oppgave er det bare vekten (W=*mg*) som er oppgitt. Vi kan gjøre om uttrykket slik at vekten inngår i stedet for massene, ved å multiplisere massene med tyngdens akselerasjon. Vi multipliserer både teller og nevner i første ledd (x-komponenten) med g, og da endres ikke uttrykket. I annet ledd forkorter vi en felles faktor $(m_a + m_b)$ i teller og nevner, og får:

$$\boldsymbol{r}_{cm} = \frac{(BD/2)\cdot w_a + (BD + DC/2)\cdot w_b}{w_a + w_b}\cdot \boldsymbol{u}_x + (AD/2)\cdot \boldsymbol{u}_y$$

Innsatte verdier:

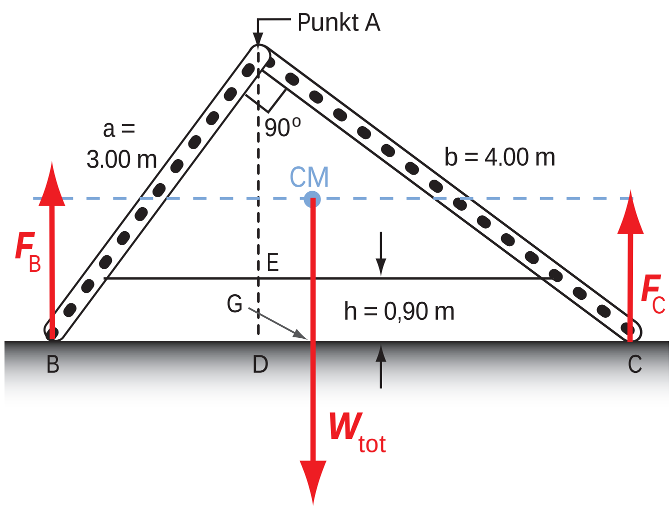
$$\boldsymbol{r}_{cm} = \frac{(1.80/2)\cdot 390 + (1.80 + 3.20/2)\cdot 520}{390 + 520}\cdot \boldsymbol{u}_x + (2.40/2)\cdot \boldsymbol{u}_y$$

$$\boldsymbol{r}_{cm} = 2.33\cdot \boldsymbol{u}_x + 1.20\cdot \boldsymbol{u}_y$$

Massesenteret vil altså høydemessig ligge halveis mellom grunnlinjen og toppunktet, og sidemessig 4 cm til venstre fra loddlinjen AD.

b) *Finn kraften som virker fra gulvet på hver av stigene.*

I figuren til høyre er det vist hvilke *ytre* krefter som virker på systemet “begge stigene”, nemlig tyngden (total tyngde) som virker gjennom tyngdepunktet, samt en vertikal kraft fra underlaget mot stigene i hvert av punktene B og C. De siste kreftene er vertikale fordi det er oppgitt at det ikke er (nevneverdig) friksjon mellom underlaget og stigene.



Summen av kreftene må være lik null siden stigene står i ro, og videre må kraftmomentet om enhver akse være lik null siden det ikke er noen rotasjon av systemet.

Vi kan velge f.eks. punkt C som tenkt akse og anvende spinnsatsen om dette punktet. Da vet vi at summen av kraftmomentene må være lik null, følgelig (kraftmoment = kraft * arm):

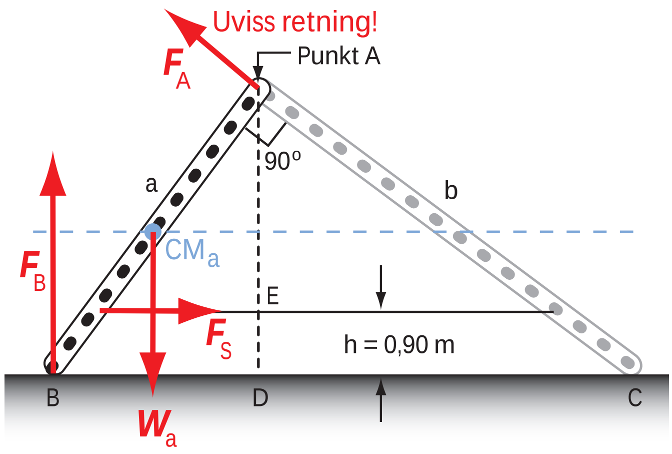
$$W_{tot}\cdot CG - F_B\cdot BC + F_C\cdot 0 = 0$$

$$F_B = \frac{CG}{BC}\cdot W_{tot} = \frac{2.67}{5.00}\cdot(390 + 520)\ \text{N} = 486\ \text{N}$$

Vi kunne brukt spinnsatsen omkring f.eks. punkt B for å finne den siste kraften, men den kan lettest finnes ut fra Newtons 2. lov:

$$F_C = W_{tot} - F_B = (910 - 486)\ \text{N} = 424\ \text{N}$$

c) *Finn snordraget.*



Her kan det lønne seg å betrakte bare delsystemet *a* og anvende spinnsatsen på dette om en tenkt akse i punktet A. Kreftene som da virker på dette (del)systemet er indikert i figuren til høyre, nemlig tyngde (bare for del a), snorkraft (som nå er en ytre kraft i forhold til systemet a alene), kraft fra underlaget mot stigen i punkt B, og til sist en kraft fra stige b på stige a. Den siste kraften kjenner vi ikke, så det er hovedgrunnen til at vi legger den tenkte aksen til punkt A slik at armen til denne kraften blir lik null (og dermed spiller det ingen rolle hvilken størrelse og retning denne kraften har).

Vi anvender spinnsatsen på de øvrige kreftene og passer på at armen er avstand vinkelrett inn på virkelinjen til hver av kreftene, og vi tar hensyn til hvilken retning en tenkt rotasjon ville få:

$$F_S \cdot AE + W_a \cdot \frac{BD}{2} - F_B \cdot BD + F_A \cdot 0 = 0$$

$$F_S = \left(F_B - \frac{W_a}{2}\right) \cdot \frac{BD}{AE} = \left(486 - \frac{390}{2}\right) \cdot \frac{1.80}{(2.40 - 0.90)} \text{ N} = 349 \text{ N}$$

Snordraget som virker på stige b er det samme som det som virker på stige a, men med motsatt retning.

d) *Finn størrelsen (magnituden) på kraften som virker fra en stige på den andre i punkt A (hengsle-punktet).*

Dette punktet kan nå lett besvares ved å anvende Newtons annen lov på delsystem *a* alene. Sum av alle krefter på dette systemet må være lik null, og da kan vi ved å dele opp i horisontale og vertikale komponenter (samme aksekors som i første punkt på denne oppgaven):

$$\boldsymbol{F}_{tot,\,a} = (F_S - F_{A,\,x}) \cdot \boldsymbol{u}_x + (F_B + F_{A,\,y} - W_a) \cdot \boldsymbol{u}_y = \boldsymbol{0}$$

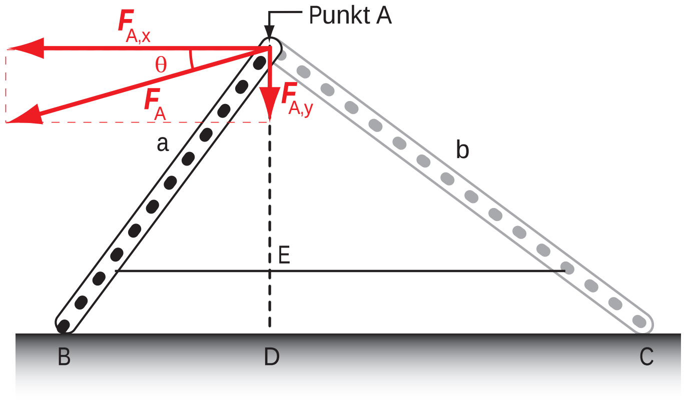
Her er f.eks. $F_{A,\,x}$ x-komponenten av kraften som virker på stige *a* i punkt A. Fortegn er valgt for å stemme overens med skissen i forrige punkt. Setter vi inn kjente størrelser, får vi:

$$F_{A,\,x} = F_S = 349 \text{ N} \qquad \text{(rettet mot venstre)}$$

og

$$F_{A,\,y} = W_a - F_B = (390 - 486) \text{ N} = -96 \text{ N}$$

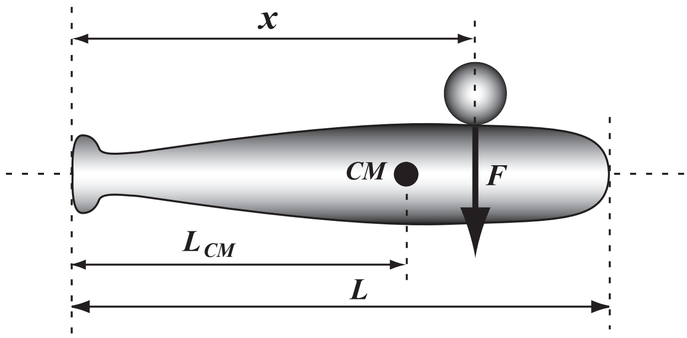
Minustegnet tyder på at y-komponenten til kraften er rettet nedover (ikke oppover som indikert i tegningen til forrige punkt). Figuren til høyre viser komponentene med riktig størrelsesforhold og retning. Pythagoras gir at total kraft er 362 N og at kraften danner vinkelen 15.4 grader under horisontalen



Kraften stige *a* virker med på stige *b* i punkt A, vil ifølge Newtons tredje lov være motsatt like stor som F_A.

Oppgave 5

Et balltre hviler på en friksjonsfri horisontal flate. Balltreet har en lengde L = 0.800 m, en masse M = 0.900 kg, og massesenteret er L_{CM} = 0.500 m fra håndtak-enden av balltreet (se figur). Treghetsmomentet til balltreet om massesenteret er 0.0620 kg m^2. Balltreet blir truffet av en baseball som beveger seg på tvers av balltreets lengderetning. I sammenstøtet virker ballen på balltreet med en horisontal kraft F (gjerne tidsavhengig) i et punkt som er en avstand x fra håndtak-enden av balltreet. For hvilken verdi av x vil håndtak-enden av balltreet bli liggende omtrent i ro idet balltreet begynner å bevege seg?

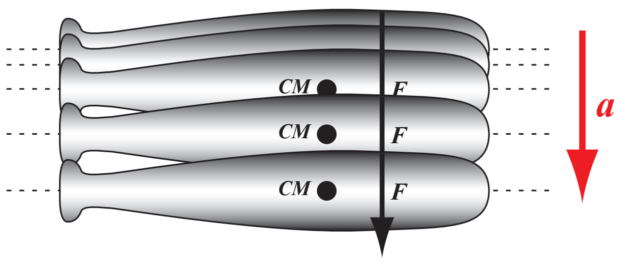


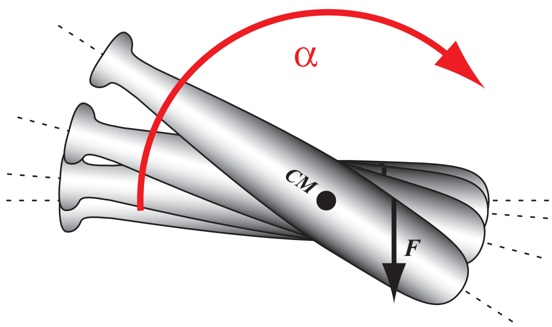
Det forutsettes at bevegelsen skjer i et horisontalt plan og at også kraften $\boldsymbol{F}$ virker horisontalt. Da vil de to vertikale krefter som virker på balltreet (tyngden og normalkraften fra underlaget) alltid være like store slik at vi ikke vil ha noen bevegelse i vertikal retning.

I horisontal retning antas det at friksjonen er så liten at vi kan se bort fra den (for vårt problem). Den eneste kraften som virker på balltreet, er da kraften ballen trykker på balltreet med. Dette vil være en tidsavhengig kraft, og vi kjenner ikke tidsforløpet, men det vil ikke spille noen rolle for beregningene.

Idet ballen virker på balltreet, vil balltreet bli påvirket av en netto kraft, og denne vil gi en netto akselerasjon av massesenteret (Newtons 2. lov for stive legemer). Videre vil kraften F ha et kraftmoment omkring f.eks. massesenteret, og da vil balltreet ifølge spinnsatsen få en vinkelakselerasjon omkring massesenteret.

Dersom håndtak-enden av balltreet skal bli liggende omtrent i ro idet bevegelsen starter, må vi justere translatorisk akselerasjon (Newtons 2. lov) med vinkelakselerasjon (spinnsats) slik at man får ønsket effekt. Vi har i prinsippet to uavhengige bevegelser, translasjon og rotasjon, som vist på skissen til høyre. Ved den translatoriske bevegelsen vil håndtaket bevege seg nedover på skissen, mens ved rotasjonsbevegelsen vil håndtaket bevege seg oppover (rel. CM). Når disse to bevegelsene matcher hverandre i starten av bevegelsen, vil håndtaket i starten bli liggende omtrent i ro.





Den translatoriske bevegelsen er gitt ut fra Newtons 2. lov:

$$a = \frac{F}{M}$$

Dette blir også akselerasjonen til håndtakenden dersom vi bare tar med translatorisk bevegelse.

Rotasjonsbevegelsen er gitt ut fra spinnsatsen anvendt om massesenteret. Den gir:

$$\tau = F \cdot (x - L_{CM}) = I_{CM} \cdot \alpha$$

hvor α er vinkelakselerasjonen om CM. (τ er kraftmoment - øvrige størrelser er forklart i oppgaveteksten.)

Men dersom balltreet hadde en vinkelakselerasjon omkring CM alene, ville håndtakenden ha en *tangentiell* akselerasjon gitt ved:

$$a_t = r\alpha = L_{CM}\alpha$$

siden avstanden fra CM til håndtakenden nettopp er lik L_{CM}. Den tangentielle akselerasjonen er rettet rett oppover på skissen helt i starten av bevegelsen, det vil si motsatt retningen den translatoriske akselerasjonen har dersom vi bare hadde translasjon alene.

For å få null akselerasjon innledningsvis i balltreets håndtakende når *både* translasjon og rotasjon finner sted, må vi da ha:

$$a_{tot} = a_{translatorisk} + a_{pga-rotasjon} = a - L_{CM}\alpha = 0$$

hvor akselerasjon nedover er regnet som positiv. Følgelig:

$$a = L_{CM}\alpha$$

Innsatt for uttrykk funnet tidligere:

$$\frac{F}{M} = L_{CM} \cdot \frac{F \cdot (x - L_{CM})}{I_{CM}}$$

Vi ser at kraften F kan forkortes bort (ikke så rart siden både translatorisk akselerasjon og vinkelakselerasjon er proporsjonale med kraften), og vi ender opp med følgende uttrykk for x:

$$x = \frac{I_{CM}}{M \cdot L_{CM}} + L_{CM}$$

Innsatt for våre tall:

$$x = \left(\frac{0.0620}{0.900 \cdot 0.500} + 0.500\right)\text{ m} = 0.638\text{ m}$$

Dette er lykkeligvis innenfor balltreets lengde, ellers ville vi hatt problemer!

Sluttkommentar:

Dette eksamenssettet brukte lærerne om lag halvannen time på å løse slik at det burde være tid for en student å tenke litt og likevel rekke alle oppgavene.

Det er ikke nødvendig å gi like fyldige kommentarer til eksamen som det som er gjort i dette løsningsforslaget, men man får ikke full uttelling uten at man gir en del argumentasjon for den fremgangsmåten man følger. Det holder ikke å bare slenge likninger opp og sette inn tall. Vi må skjønne at kandidaten også “tenker riktig” for å gi full uttelling!

Kravet om litt argumentasjon henger også sammen med at et av målene med kvalitetsreformen er å trene studentene til å artikulere faget ovenfor andre. Dette er viktig innen forskning, ved formidling såvel som dersom man skal undervise faget.