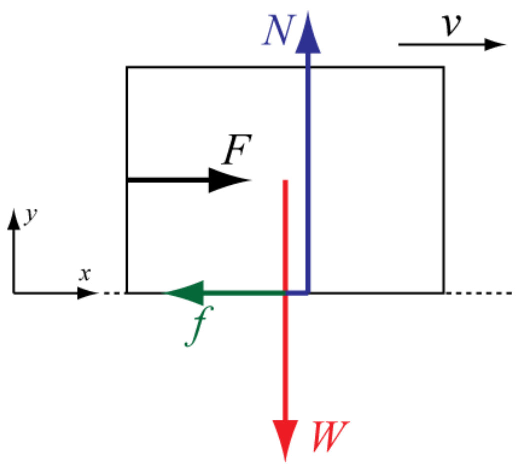
Løsningsforslag

Eksamen i Fys-mek1110 våren 2009

Oppgave 1

a) *Du skyver en kloss med konstant hastighet bortover et horisontalt bord. Identifiser kreftene på klossen og tegn et frilegemediagram for klossen.*



Klossen er i kontakt med gulvet og eventuelt med noe som dytter den forover. Kontaktkreftene fra gulvet er normalkraften N, og friksjonskraften f. Kraften fra kontakten som dytter regner vi som horisontal (den behøver ikke være det), og vi kaller denne F. Klossen er dessuten påvirket av gravitasjonskraften fra Jorda, W. Siden klossen beveger seg med konstant hastighet er f og F like store.

b) *Du slipper to stålkuler med identisk form fra tårnet i Pisa. Den ene er hul og den andre er massiv. Hvilken kule når bakken først? Begrunn svaret.*

Bevegelsen til kulene bestemmes av kreftene som virker på dem. De eneste kreftene som virker er gravitasjonskraften, $W = mg$ og luftmotstanden, $D = f(v)$, som er avhengig av hastigheten. Siden de to kulene har samme form og overflate, har kraften fra luftmotstanden den samme formen, men massene er forskjellige. Newtons andre lov gir akselerasjonen nedover:

$$a = g - \frac{f(v)}{m}$$

hvor $f(v)$ er positiv når kulen fallen nedover. Vi ser at kulen med størst masse får størst positiv akselerasjon, og derfor vil nå bakken først.

c) *Ole står på bakken og observerer to samtidige lynnedslag. Lynnedslag A i punktet* $x = 0$ *km og lynnedslag B i punktet* $x = 30$ *km. Mari kjører forbi i et romskip med hastigheten* $u = 0.8c$ *i positiv* x*-retning. I Oles system befinner hun seg i punktet* $x = 60$ *km i det lynnedslagene inntreffer. Inntreffer lynnedslagene samtidig i Maris system? Hvis ikke, hvilket lynnedslag inntreffer først?*

Hvor Mari befinner seg er ikke vesentlig for tidfestingen av hendelsen i Maris system. Dette eksempelet er derfor det samme som Einsteins tog-eksempel. Hendelse B inntreffer før hendelse A i Maris system.

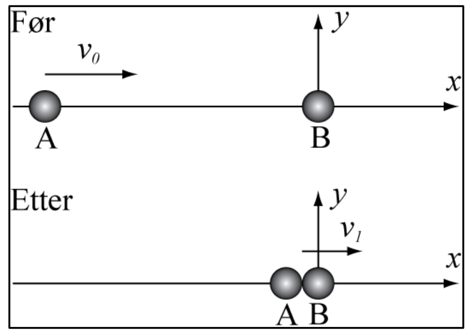
Dette ser vi også ved innsetting i Lorentz-transformasjonene: $t_A' = \gamma\left(t_A - \frac{u}{c^2}x_A\right)$ og

$t_B' = \gamma\left(t_B - \frac{u}{c^2}x_B\right)$, hvor $t_A = t_B$ siden hendelsen inntreffer samtidig i Oles system. Siden $x_B > x_A$ ser vi at $t_B' < t_A'$, altså at hendelse B inntreffer før hendelse A i Maris system.

Oppgave 2

Vi skal i denne oppgaven se på en kollisjon mellom to identiske atomer med masse m. Vi kan betrakte atomene som punktpartikler. Atomene er ikke påvirket av noen ytre krefter. Vi kommer til å analysere kollisjonen først i en forenklet modell og deretter i en mer avansert modell.

La oss først se på en forenklet modell. Systemet vi ser på består av to atomer: atom A beveger seg langs x-aksen med hastigheten v_0 og atom B ligger i ro i origo som illustrert i figuren til høyre. Atomene påvirker ikke hverandre før de treffer hverandre. Etter kollisjonen blir de hengende fast i hverandre.



a) *Finn hastigheten til massesenteret til systemet før kollisjonen.*

Hastigheten til massesenteret er gitt som

$$V = \frac{1}{\sum m_i}\left(\sum m_i v_i\right) = \frac{1}{2m}\left(mv_0 + m\cdot 0\right) = \frac{1}{2}v_0$$

b) *Finn hastigheten til massesenteret til systemet etter kollisjonen. Begrunn svaret.*

Siden det ikke virker noen ytre krefter på systemet, er akselerasjonen til massesenteret null, og hastigheten til massesenteret er konstant, slik at hastigheten til massesenteret også er $V = \frac{1}{2}v_0$ etter kollisjonen.

c) *Hvor stor er endringen i systemets kinetiske energi i løpet av kollisjonen?*

Den kinetiske energien til systemet før kollisjonen er $K_0 = \sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2 = \frac{1}{2}mv_0^2$. (Merk at du ikke får riktig svar om du her kun bruker den kinetiske energien til massesenteret fordi hver av atomene også beveger seg relativt til massesenteret før kollisjonen! Dette burde du sett dersom du fikk at energien var uforandret gjennom kollisjonen, da du bør vite at for et fullstendig uelastisk støt er det et tap av energi.)

Etter kollisjonen er den kinetiske energien $K_1 = \sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{1}{2}v_0\right)^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{1}{2}v_0\right)^2 = \frac{1}{4}mv_0^2$, slik at endringen i kinetisk energi er $\Delta K = K_0 - K_1 = \frac{1}{4}mv_0^2 = \frac{1}{2}K_0$. Systemet mister 50% av energien i kollisjonen.

Vi skal nå studere en mer avansert modell for kollisjonen. Idet atom A er i avstanden b fra atom B festes de to atomene sammen med en masseløs fjær med fjærkonstant k og likevektslengde b. Atomene forblir deretter festet med denne fjæren. Dette er en forenklet modell for en interatomær vekselvirkning.

d) *Hva blir hastigheten til massesenteret umiddelbart etter at atomene er koblet sammen med fjæren, dvs når atom A er i avstanden b fra atom B? Hva er endringen i kinetisk energi for systemet før og etter sammenkoblingen?*

Det er ingen ytre krefter som virker på systemet bestående av atom+fjær+atom, slik at hastigheten til massesenteret blir det samme som før sammenkoblingen. Men i dette tilfellet beholder også atomene sine hastigheter relativt til massesenteret etter sammenkoblingen, slik at det ikke er noen endring i kinetisk energi. Alternativt kan du argumentere at idet sammenkoblinen har skjedd, har fremdeles ingen av atomene blitt påvirket av noen krefter, siden kraften på fjæren kun slår inn når avstanden mellom atomene blir noe annet enn likevektslengden. Derfor har hvert atom har den samme hastigheten som før sammenkoblingen. Den kinetiske energien til systemet er derfor uforandret.

Vi skal nå se på bevegelsen etter at atomene er koblet sammen med fjæren. Posisjonene til atom A og B er x_A og x_B.

e) *Vis at kraften på atom A er: $F = k\left(\left(x_B - x_A\right) - b\right)$, og finn et tilsvarende uttrykk for kraften på atom B.*

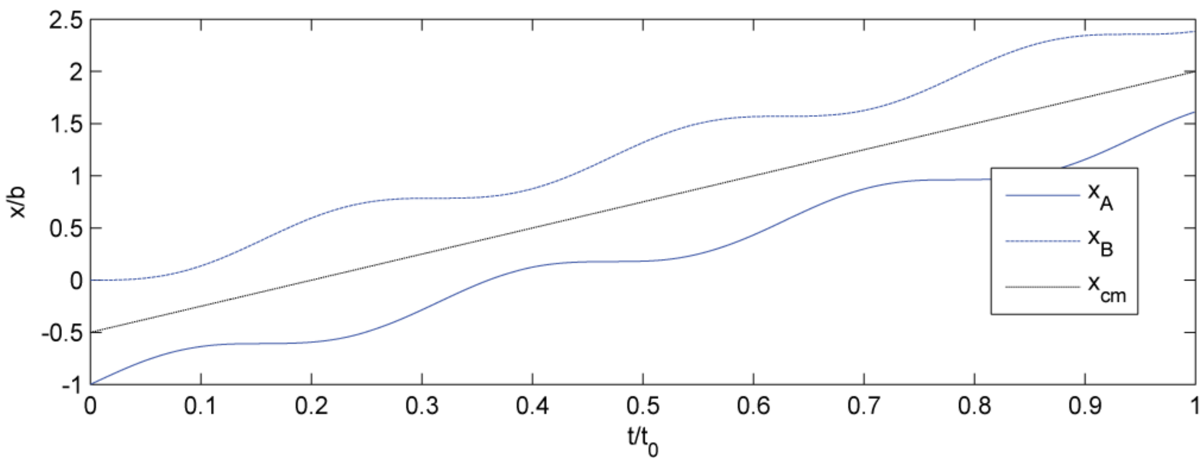
Kraften på atom A er en fjærkraft, som generelt har formen $F = -k\Delta x$ hvor Δx er forlengelsen av fjæren. Lengden på fjæren er lik avstanden mellom atomene, mens likevektslengden for fjæren er b, absoluttverdien av kraften blir da: $F = k\left|\Delta x\right| = k\left|\left(x_B - x_A\right) - b\right|$. Hvilken retning virker kraften? Når fjæren er forlenget, virker kraften på atom A i positiv retning, slik at kraften med fortegn blir $F = k\left(\left(x_B - x_A\right) - b\right)$. Siden fjæren er masseløs, er kraften fra fjæren på atom A den samme, men med motstatt retning, som kraften fra fjæren på atom B. Her er det også akseptert å betrakte fjærkraften som en modell for vekselvirkningen mellom atom A og B, slik at kraften fra atom B på A er motkraften til kraften fra atom A på atom B, hvilket gir samme resultat.

f) *(Denne oppgaven teller dobbelt). Skriv et kort program som finner posisjonene og hastighetene til atom A og B ved en tid $t + \Delta t$ gitt posisjoner og hastigheter ved tiden t.*

```
for i = 1:n-1
    f = k*(xB(i) - xA(i) - b);
    fA = f;
    fB = -f;
    aA = fA/m;
    vA(i+1) = vA(i) + aA*dt;
    xA(i+1) = xA(i) + vA(i+1)*dt;
    aB = fB/m;
```

```
    vB(i+1) = vB(i) + aB*dt;
    xB(i+1) = xB(i) + vB(i+1)*dt;
    t(i+1) = t(i) + dt;
end
```

g) Skisser posisjonen som funksjon av tiden for massesenteret og for hvert av atomene.

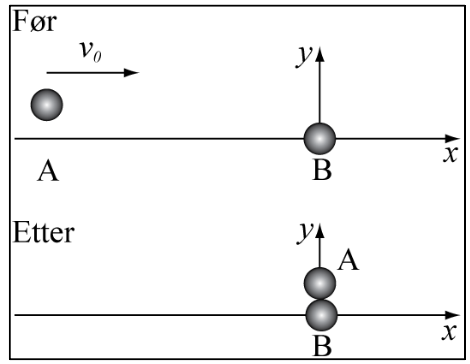


h) (Vanskelig) Hva blir den maksimale avstanden mellom de to atomene?

Vi kan her bruke en energibetraktning. Siden det ikke virker noen ytre krefter er den totale energien for systemet bevart. Energien består av den kinetiske energien til massesenteret, den kinetiske energien for bevegelsen i forhold til massesenteret, og den potensielle energien i fjæren. Siden det ikke virker noen ytre krefter på systemet forblir hastigheten til massesenteret uforandret, og den kinetiske energien til massesenter-bevegelsen forandres ikke. Idet atomene blir koblet sammen er den potensielle energien null, og den kinetiske energien for bevegelsen relativt til massesenteret maksimal. Atomene har maksimal avstand når den potensielle energien er maksimal og den kinetiske energien for bevegelsen relativt til massesenteret er null. Vi kaller den kinetiske energien til massesenteret for K_{cm}, den kinetiske energien for bevegelsen relativt til massesenteret for $K_{\Delta cm}$ og den potensielle energien for U. Energibevaring gir at $E = K_{cm} + K_{\Delta cm} + U$ er konstant. Idet atomene kobles sammen er $E_0 = \frac{1}{2} m v_0^2$ og siden hastigheten til massesenteret er $V = \frac{1}{2} v_0$ er den kinetiske energien til massesenterbevegelsen $K_{0,cm} = \frac{1}{4} m v_0^2$, som vi fant i den forenklede modellen ovenfor. Den resterende energien er da den kinetiske energien for bevegelsen relativt til massesenteret, $K_{0,\Delta cm} = E_0 - K_{0,cm} - U_0 = \frac{1}{4} m v_0^2$. Når atomene er i sin maksimale avstand har de ingen bevegelse relativt til massesenteret, og kun potensiell energi:
$E_1 = K_{1,cm} + U_1 = K_{0,cm} + K_{0,\Delta cm} + U_0$ som gir at $U_1 = K_{0,\Delta cm} = \frac{1}{4} m v_0^2 = \frac{1}{2} k \Delta x^2$. Vi finner at
$\Delta x = (x_B - x_A) - b = \sqrt{\frac{\frac{1}{2} m v_0^2}{k}}$.

Argumentet er her ført utførlig for å vise hvordan man kan tenke. Det finnes også andre fremgangsmåter. For eksempel kan du se på bevegelsen i et system som følger massesenteret. Det gir samme argument som her. Eller du kan skrive om likningen til å være kun for relativ-bevegelsen og løse denne. Alle gode fysiske argumenter godtas, så lenge de bygger på en god fysisk forståelse.

Kollisjonen vi har sett på så langt er et spesialtilfelle: en sentral kollisjon. La oss nå se på en ikke-sentral kollisjon.



Først ser vi på en forenklet modell som illustrert i figuren til høyre. Atom A beveger seg i x-retningen langs linjen $y = b$ med hastigheten v_0 og atom B ligger i ro i origo som illustrert i figuren til høyre. Atomene påvirker ikke hverandre før de treffer hverandre. Atomene kolliderer idet atom A når $x = 0$. Etter kollisjonen danner atomene et di-atomisk molekyl: Atomene blir hengende fast i en avstand b fra hverandre.

i) *Hva blir hastigheten til massesenteret og vinkelhastigheten om massesenteret til systemet etter kollisjonen?*

Det virker ingen ytre krefter på systemet. Hastigheten til massesenteret forblir derfor utforandret gjennom kollisjonen (selv om den ikke er sentral).

Siden det ikke virker noen ytre krefter er kraftmomentet av de ytre kreftene om massesenteret null. Fra Newtons andre lov for rotasjonsbevegelse følger det at spinnet om massesenteret er bevart. Før kollisjonen er z-komponenten av spinnet om massesenteret: $L_{0,z} = -\frac{b}{2}m\frac{v_0}{2} - \frac{b}{2}m\frac{v_0}{2} = -\frac{1}{2}bmv_0$,

hvor vi har brukt at y-posisjonen til massesenteret er $Y = \frac{b}{2}$ og at hastigheten relativt til massesenteret er $v_{A,cm} = \frac{1}{2}v_0$ for atom A og $v_{B,cm} = -\frac{1}{2}v_0$ for atom B før kollisjonen. Etter kollisjonen roterer systemet som et stivt legeme om massesenteret, slik at spinnet er $L_{1,z} = I_{cm,z}\omega$ hvor $I_{cm,z} = m\left(\frac{b}{2}\right)^2 + m\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}mb^2$. Vinkelhastigheten etter kollisjonen blir derfor:

$$\omega = \frac{L_{0,z}}{I_{cm,z}} = \frac{-\frac{1}{2}bmv_0}{\frac{1}{2}mb^2} = -\frac{v_0}{b}.$$

(Merk at dersom du ønsker å bruke spinnbevaring om origo før og etter kollisjonen kan du gjøre det, men du må da også ta med spinnet til den translatoriske bevegelsen til massesenteret etter kollisjonen, $\vec{L} = \vec{R} \times \vec{P} + \vec{L}_{cm}$!)

Vi innfører en mer avansert modell for denne kollisjonen også: Idet atom A er i posisjonen $x = 0, y = b$ og atom B er i posisjonen $x = 0, y = 0$ festes de to atomene sammen med en masseløs fjær med fjærkonstant k og likevektslengde b. Atomene forblir deretter festet med denne fjæren.

j) Skriv om programmet du skrev i oppgave f) til å modellere bevegelsen til atomene i dette tilfellet.

```
for i = 1:n-1
    dr = rB(i,:)-rA(i,:);
    rn = sqrt(dot(dr,dr));
    f = k*(rn-b)*dr/rn;
    fA = f;
    fB = -f;
    aA = fA/m;
    vA(i+1,:) = vA(i,:) + aA*dt;
    rA(i+1,:) = rA(i,:) + vA(i+1,:)*dt;
    aB = fB/m;
    vB(i+1,:) = vB(i,:) + aB*dt;
    rB(i+1,:) = rB(i,:) + vB(i+1,:)*dt;
    t(i+1) = t(i) + dt;
end
```

k) Skisser $X(t)$ og $Y(t)$ for massesenteret etter kollisjonen.

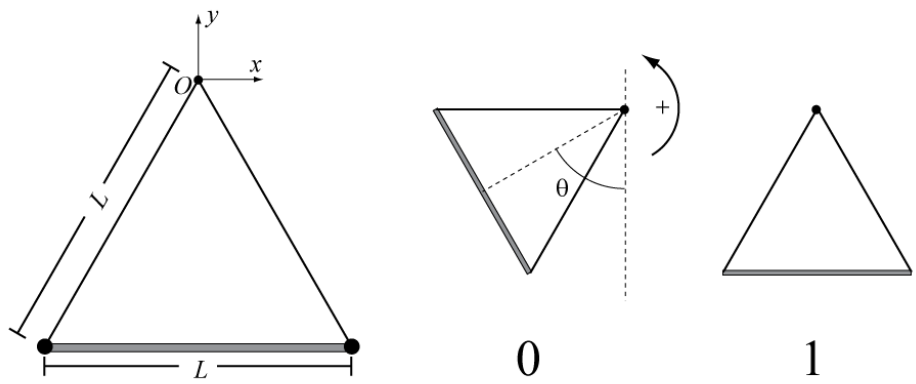
Massesenteret beveger seg med konstant hastighet, $Y(t) = \frac{b}{2}$, $X(t) = Vt = \frac{1}{2} v_0 t$

l) (Vanskelig) Diskuter oppførselen til vinkelhastigheten for rotasjonen om massesenteret til systemet for bevegelsen etter kollisjonen.

Siden det ikke virker noen ytre krefter vil spinnet om massesenteret være konstant. Men siden atomene vil variere i posisjon i forhold til massesenteret, vil treghetsmomentet også variere som funksjon av tiden. Når atomene er langt fra likevektsstillingen vil treghetsmomentet være større, og når de er nærmere massesenteret, vil treghetsmomentet være mindre. Vinkelhastigheten vil derfor variere på samme måte som avstanden mellom atomene. (Et kvalitativt argument er her nok, du behøver ikke løse dette problemet, selv om det er mulig).

Oppgave 3

Vi skal i denne oppgaven studere en pendel som består av to punktmasser, hver med masse m, festet sammen av en masseløs stang med lengde L. To masseløse snorer av lengde L er festet i hvert av massepunktene og i punktet O, slik at pendelen er formet som en likesidet trekant. Pendelen løftes til posisjonen 0 og slippes. Du kan se bort fra luftmotstand.



a) *Finn treghetsmomentet* I_O *om punktet* O *for pendelen.*

Treghetsmomentet er $I_0 = mL^2 + mL^2 = 2mL^2$.

b) *Vis at vinkelakselerasjonen til pendelen om punktet* O *når den har utslaget* θ *er*

$$\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{g}{L}\sin\theta .$$

Vinkelakselerasjonen bestemmes av kraftmomentet om punktet O. Pendelen oppfører seg som et stivt legeme. Den eneste ytre kraften som virker på dette er gravitasjonskraften som virker i massesenteret. Kraftmomentet er: $\tau_{O,z} = -\frac{\sqrt{3}}{2}L\sin\theta \cdot 2mg = -\sqrt{3}mgL\sin\theta$. Newtons andre lov for rotasjonsbevegelse om punktet O gir da $\tau_{0,z} = I_0\alpha$ og vinkelakselerasjonen er

$$\alpha = \frac{-\sqrt{3}mgL\sin\theta}{I_0} = \frac{-\sqrt{3}mgL\sin\theta}{2mL^2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{g}{L}\sin\theta .$$

c) *Finn vinkelhastigheten til pendelen om punnktet* O *når den er i den laveste posisjonen.*

Vi bruker energibevaring da den eneste ytre kraften som gjør et arbeid på systemet er gravitasjonskraften, som er en konservativ kraft. (Snordragene virker normalt på bevegelsen av punktene de virker på, de utfører derfor ikke noe arbeid på systemet). Energien i begynnelsestilstanden er $E_0 = K_0 + U_0 = 0 + 2mgy_0$. Energien i tilstanden 1 hvor pendelen er i det laveste punktet er $E_1 = K_1 + U_1 = \frac{1}{2}I_O\omega^2 + 2mgy_1$. Bevaring av energi gir:

$$E_0 = E_1$$

$$2mgy_0 = \frac{1}{2}I_O\omega^2 + 2mgy_1$$

$$\frac{1}{2}I_O\omega^2 = 2mg\left(y_0 - y_1\right) = 2mg\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}L\cos\theta_0 - (-\frac{\sqrt{3}}{2}L)\right) = \sqrt{3}mgL\left(1-\cos\theta_0\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}mgL$$

$$\omega = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{g}{L}}$$

d) *Idet pendelen når det laveste punktet ryker begge snorene. Beskriv stavens videre bevegelse. Begrunn svaret.*

Stavens bevegelse bestemmes av de ytre kreftene som virker på den. Siden den kun påvirkes av gravitasjonen vil massesenteret følge en parabolsk bane som vi forventer for kastbevegelse.

Rotasjonen om massesenteret bestemmes av kraftmomentet om massesenteret som er null. Staven vil derfor fortsette å rotere om massesenteret med det samme spinnet, og dermed den samme vinkelhastigheten som den hadde idet snorene ble kuttet. Merk at staven har en vinkelhastighet om massesenteret idet snorene ryker. (Du kan også finne denne vinkelhastigheten, men det er ikke nødvendig for å få full uttelling i denne deloppgaven.)

****

Dette er siste ark i oppgavesettet. Lykke til med oppgavene!