Løsningsforslag

Eksamen i Fys-mek1110 våren 2010

Oppgave 1

(Denne oppgaven teller dobbelt) Ole og Mari vil prøve om lengdekontraksjon virkelig finner sted. Mari setter seg i sitt romskip og kjører forbi Ole, som står på bakken, i en fart nær lyshastigheten. Idet hun passerer Ole, utløser hun to lasere som lager merker på bakken. Den ene laseren sitter helt foran i romskipet, og markerer hvor fronten av romskipet er, og den andre laseren sitter helt bak i romskipet, og markerer enden av romskipet. Du kan anta at merkene på bakken lages idet laserne utløses. Etterpå måler Ole opp avstanden mellom de to merkene og sammenlikner med lengden på romskipet når det er i ro. Til sin overraskelse finner han at avstanden mellom merkene er lengre enn lengden på romskipet i ro. Romskipet er lengre når det beveger seg, og ikke kortere som han forventet fra lengdekontraksjon! Hvordan kan du forklare Oles målinger?

Vi kaller systemet til Mari for S' og systemet til Ole S. Maris målinger utgjør to hendelser (x_1', t_1') og (x_2', t_2') i hennes system. Disse hendelsen er samtidige i Maris system, dvs. $t_1' = t_2'$. De er derfor ikke samtidige i Ole's system. Dette er derfor ikke slik Ole ville måle lengden av romskipet i sitt system: Han bør måle romskipets endepunkter til samme tid. Det er kun da han vil finne at et legeme som beveger seg er kortere enn et som er i ro. I Ole sitt system er de tilsvarende hendelsene (x_1, t_1) og (x_2, t_2). Vi kan bruke Lorentz-transformasjonen til å relatere lengden Ole måler til lengden Mari måler:

$$x_1 = \gamma\left(x_1' + ut_1'\right) \text{ og } x_2 = \gamma\left(x_2' + ut_2'\right)$$

Slik at avstanden i Ole sitt system er:

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \gamma\left(x_2' - x_1' + u(t_2' - t_1')\right) = \gamma\left(x_2' - x_1'\right)$$

hvor vi har brukt at $t_1' = t_2'$. Siden γ er større enn 1 ser vi at avstanden Ole måler er lengre enn avstanden Mari måler. Målingene deres er derfor konsistente med Lorentz-transformasjonene, men de har ikke laget et godt eksperiment for å teste lengdekontraksjon.

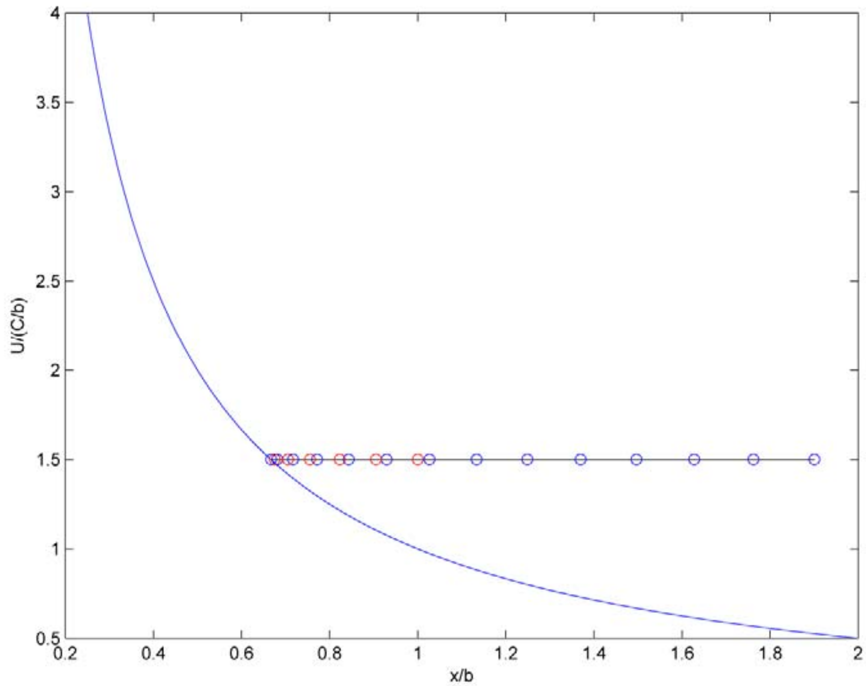
Oppgave 2

Vi skal i denne oppgaven studere et lite ion med masse m som skytes mot et stort molekyl i origo. Du kan anta at det store molekylet er festet i origo og ikke beveger seg. Vi ser først på en en-dimensjonal bevegelse langs x-aksen. Vekselvirkningen mellom ionet og molekylet kan beskrives med potensialet

$$U(x) = \frac{C}{x}$$

hvor C er en kjent konstant, og x er posisjonen til ionet. Ionet starter i posisjonen $x = b$ med hastigheten v_0, hvor $b > 0$ og $v_0 < 0$. Du kan se bort fra andre krefter på ionet.

a) *Skisser potensialet, finn likevektspunkter og karakteriser disse. Tegn bevegelsen til ionet inn* *i energidiagrammet og beskriv bevegelsen til ionet.*



Bevegelsen er vist med bevegelsesdiagrammen. Røde sirkler viser ionet på vei mot molekylet. Blå sirkler viser ionet på vei vekk fra molekylet.

b) *Hvor nær origo kommer ionet?*

Siden ionet kun er påvirket av en konservativ kraft med et gitt potensial, vil den totale energien være bevart. Ionet er nærmest origo idet det snur, dvs. når hastigheten er null. Energibevaring gir da:

$$E_{TOT} = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{C}{b} = \frac{C}{x_1}$$

Denne likningen kan vi løse for x_1, og vi finner da:

$$x_1 = \frac{C}{\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{C}{b}}$$

c) *Hva blir hastigheten til ionet når det er uendelig langt vekk fra origo?*

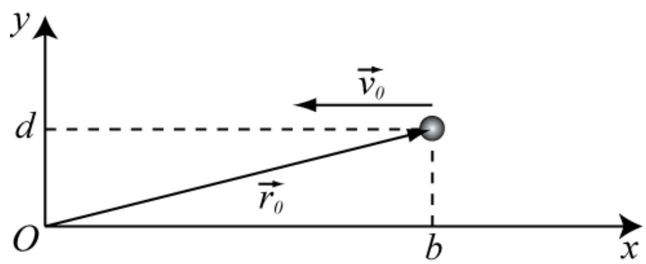
Vi kan igjen benytte energibevaring:

$$E_{TOT} = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{C}{b} = \frac{1}{2}mv_\infty^2$$

siden den potensielle energien er null når atomet er langt vekk fra molekylet. Det gir:

$$v_\infty^2 = v_0^2 + \frac{2C}{mb}$$

Vi skal nå se på den samme prosessen, men i to dimensjoner. Vi antar at ionet starter i posisjonen $\vec{r}_0 = (b, d)$ hvor b og d er to gitte lengder. Du kan anta at d er mindre enn b, som i figuren. Ionet starter med hastigheten $\vec{v}_0 = (v_0, 0)$ hvor $v_0 < 0$. Den potensielle energien til ionet er nå:



$$U(\vec{r}) = \frac{C}{r},$$

hvor $r = |\vec{r}|$. Du kan se bort fra andre vekselvirkninger.

d) Vis at kraften på ionet er $\vec{F}(\vec{r}) = \frac{C}{r^3}\vec{r}$.

Kraften er gitt ved:

$$\vec{F} = -\nabla U$$

slik at

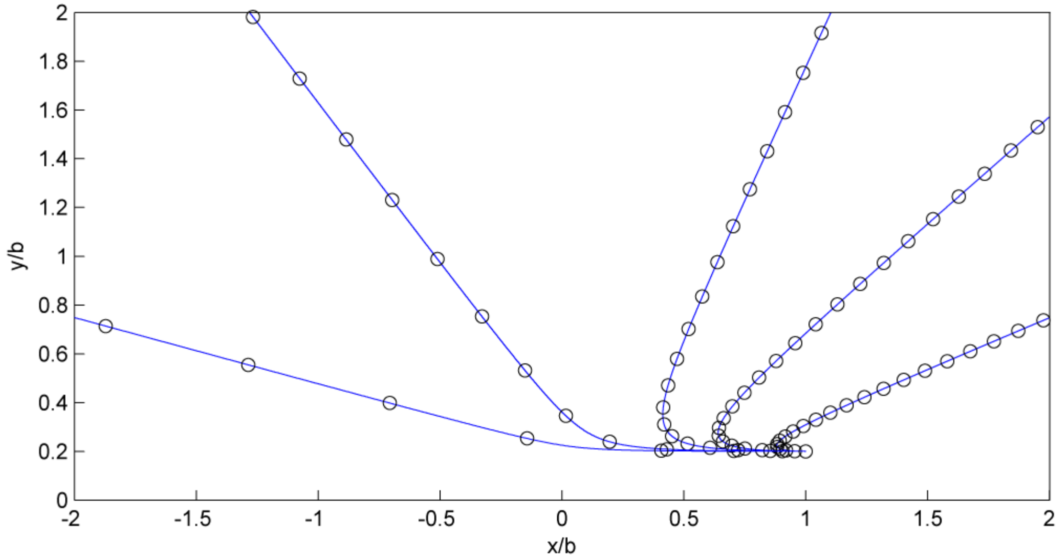
$$F_x = -\frac{\partial}{\partial x}U = -\frac{\partial U}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{C}{r^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + y^2\right)^{1/2} = \frac{C}{r^2}\frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)^{-1/2} 2x = \frac{C}{r^3}x$$

og tilsvarende for F_y, som var det som skulle vises.

e) (Denne oppgaven teller dobbelt) Skriv et program som finner posisjonen og hastigheten til ionet ved tiden $t + \Delta t$ gitt posisjonen og hastigheten ved tiden t.

```
rnorm3 = norm(r(i,:)).^3;
F = C/rnorm3*r(i,:);
a = F/m;
v(i+1,:) = v(i,:) + a*dt;
```

```
r(i+1,:) = r(i,:) + v(i+1,:)*dt;
t(i+1) = t(i) + dt;
```



f) Figuren viser resultatet av fem simuleringer med forskjellige verdier for v_0*, men ellers like parametere. Kan du velge en verdi for* v_0 *slik at ionet beveger seg radielt utover etter kollisjonen? Begrunn svaret. (Ionet beveger seg radielt utover dersom hastigheten er parallell med posisjons-vektoren* $\vec{r}$ *).*

Denne oppgaven kan være litt vanskelig hvis man ikke innser at spinnet omkring origo er bevart gjennom hele prosessen. Spinnet om origo er bevart fordi kraften er radiell, slik at kraftmomentet om origo er:

$$\vec{\tau}_O = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \left(\frac{C}{r^3} \vec{r} \right) = 0 = \frac{d\vec{L}_O}{dt}$$

Spinnet er derfor konstant. Spinnet før kollisjonen er:

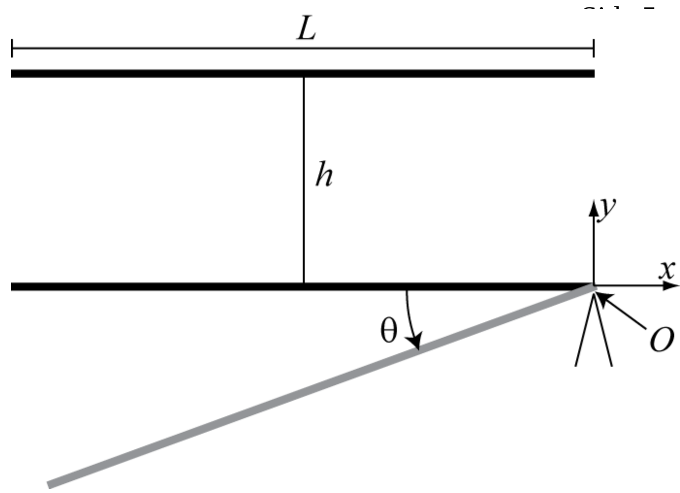
$$L_{O,z} = dv_0$$

Spinnet må være det samme etter kollisjonen (faktisk til enhver tid gjennom prosessen). Men, dersom bevegelsen er radiell, må spinnet være null:

$$\vec{L}_O = \vec{r} \times \left(c\vec{r} \right) = 0$$

Bevegelsen kan derfor ikke være radiell med mindre den starter i ro. (Men det er klart at ettersom den kommer langt vekk fra origo vil bevegelsen kunne betraktes som tilnærmet radiell.)

Oppgave 3



Vi skal i denne oppgaven studere en tynn stav med masse M og lengde L. Treghetsmomentet til staven om en akse gjennom massesenteret er:

$I_{z,cm} = \frac{1}{12}ML^2$.

Staven er horisontalt orientert og slippes fra ro fra en høyde h over et fast punkt O under den ene enden av staven. Idet staven treffer punktet O blir den hengende fast og begynner å rotere om O. Vi kan betrakte prosessen hvor staven fester seg til rotasjonspunktet som en kollisjon. Situasjonen er illustrert i figuren. Du kan anta at all bevegelse er i planet som er vist i figuren. Vi ser bort fra friksjon og luftmotstand.

a) *Vis at treghetsmomentet, I, til staven om en akse gjennom punktet O når staven er festet i dette punktet er*

$$I = \frac{1}{3}ML^2 .$$

Vi anvender parallell-akse-teoremet. Avstanden fra massesenteret til punktet O er

$$d = L/2$$

slik at treghetsmomentet om O er:

$$I_O = I_{cm} + Md^2 = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ML^2$$

b) *Finn hastigheten, v_0, til massesenteret til staven umiddelbart før den fester seg (idet den har falt høyden h).*

Siden staven kun er påvirket av tyngdekraften, som er en konservativ kraft, er den mekaniske energien bevart. Den mekaniske energien er gitt som:

$$E = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega_{cm}^2 + Mgy$$

hvor v er hastigheten til massesenteret og ω_{cm} er vinkelhastigheten om massesenteret. Siden staven starter i ro, er både v og ω_{cm} null i begynnelsen av bevegelsen. Siden det ikke er noen kraftmomenter som virker om massesenteret, vil ikke spinnet om massesenteret endre seg, og vinkelhastigheten om massesenteret forblir derfor null. (Det trekkes ikke selv om man ikke har tatt med dette leddet i denne delen av oppgaven.)

Vi finner hastigheten til massesenteret fra energibevaring for den translatoriske bevegelsen:

$$E = Mgh = \frac{1}{2}mv_0^2$$

slik at

$$v_0 = -\sqrt{2gh}$$

Hvor fortegnet er negativt, siden hastigheten er nedover.

c) Finn vinkelhastigheten til staven om punktet O umiddelbart etter kollisjonen. Du kan anta at staven ikke roterer nevneverdig i løpet av kollisjonen og at kraftmomentet av gravitasjonskraften er ubetydelig under kollisjonen.

Staven vil påvirkes av kontaktkrefter i punktet O. Disse kreftene vil ikke gi noe kraftmoment om O fordi avstanden til O er null. I tillegg vil staven påvirkes av gravitasjonskraften, men vi kan se bort fra kraftmomentet til denne. Netto kraftmoment om O er derfor null. Spinnet om O er derfor bevart gjennom kollisjonen. Umiddelbart før kollisjonen er spinnet til systemet gitt av bevegelsen til massesenteret:

$$L_{O,z}^{før} = -\left(\frac{L}{2}\right)Mv_0$$

Umiddelbart etter kollisjonen roterer hele staven som et stivt legeme om punktet O med en vinkelhastighet ω_1. Spinnet er da:

$$L_{O,z}^{etter} = I_{O,z}\omega_1$$

Vi finner derfor at:

$$\omega_1 = \frac{L_{O,z}^{før}}{I_{O,z}} = \frac{-LMv_0}{2\frac{1}{3}ML^2} = -\frac{3}{2}\frac{v_0}{L}$$

d) Finn bevegelsesmengden til staven umiddelbart etter kollisjonen. Er bevegelsesmengden bevart gjennom kollisjonen? Forklar.

Bevegelsesmengden er gitt av hastigheten til massesenteret. Siden staven roterer som et stivt legeme, er hastigheten til punktet som er i en avstand $L/2$ fra O gitt som:

$$v_1 = -\omega_1\frac{L}{2} = \frac{3}{4}v_0$$

Bevegelsesmengden er derfor ikke bevart, fordi det virker krefter fra festepunktet O på staven gjennom kollisjonen, og impulsen av disse kreftene gir opphav til en endring i bevegelsesmengden.

Etter kollisjonen henger staven fast i punktet O med et fjærlastet hengsel som påvirker staven med et kraftmoment

$$\tau_{O,z} = -\kappa\theta \, ,$$

hvor z -retningen peker opp fra arket på figuren. Den potensielle energien til staven knyttet til denne vekselvirkningen er

$$U = \frac{1}{2}\kappa\theta^2 \, .$$

e) *Finn et uttrykk for vinkelakselerasjonen til staven når den har rotert en vinkel θ som på figuren.*

Vi finner vinkelakselerasjonen ved først å finne netto kraftmoment om punktet O og deretter benytte Newtons andre lov for rotasjonsbevegelse.

Kreftene som virker på staven er kontaktkraften i punktet O, som er en normalkraft, som ikke gir opphav til noe kraftmoment, og en kraft som gir opphavet til kraftmomentet $\tau_{O,z}$. Dessuten påvirkes staven av gravitasjonskraften. Kraftmomentet til gravitasjonskraften om O er:

$$\vec{\tau}_{G,O,z} = \vec{r} \times \vec{G} = \frac{L}{2}\cos(\theta) Mg\hat{k}$$

Slik at netto kraftmoment er:

$$\tau^{net}_{O,z} = \frac{MgL}{2}\cos(\theta) - \kappa\theta \, .$$

Newtons andre lov for rotasjonsbevegelse gir da at

$$I_{O,z}\alpha = \tau^{net}_{O,z}$$

slik at vinkelakselerasjonen er:

$$\alpha = -\frac{\kappa}{I_{O,z}}\theta + \frac{MgL}{2I_{O,z}}\cos(\theta) \, .$$

f) *Vi kan bruke uttrykket for vinkelakselerasjonen til å finne vinkelen som funksjon av tiden med numeriske metoder, men det er vanskelig å finne et analytisk uttrykk for vinkelen som funksjon av tiden. I stedet kan vi bruke en annen metode til å finne den maksimale vinkelen θ til staven. Finn en likning som bestemmer den maksimale vinkelen θ til staven. Merk at du ikke behøver å løse denne likningen for θ.*

Etter kollisjonen er staven kun påvirket av konservative krefter, siden gravitasjonskraften er konservativ og hengsel-kraften også er konservativ siden den kan beskrives med en potensiell energi. (Normalkreftene i hengselet gjør ikke noe arbeid, siden kontaktpunktet ikke beveger seg gjennom rotasjonen -- alternativt kan man argumentere for at normalkreftene ikke gjør noe arbeid fordi de til enhver tid er normale på bevegelsesretningen til kontaktpunktet på overflaten av en tynn akse). Vi kan derfor benytte bevaring av mekanisk energi. Den potensielle energien til staven har to ledd, ett ledd fra hengselet og ett ledd som skyldes gravitasjonskraften. Den potensielle energien knyttet til gravitasjonskraften er gitt ved posisjonen til massesenteret. Hvis vi legger nullpuntet for potensiell energi i gravitasjonsfeltet til punktet O, er den potensielle energien:

$$U_G = -Mg\frac{L}{2}\sin(\theta) \, .$$

Den totale energien er derfor:

$$E = U_G + U_H + K = \frac{1}{2}\kappa\theta^2 - Mg\frac{L}{2}\sin(\theta) + \frac{1}{2}I_{O,z}\omega^2 \, .$$

Vinkelhastigheten er null idet staven når sin maksimale vinkel, slik at vi finner den maksimale vinkelen fra likningen:

$$E = \frac{1}{2}I_{O,z}\omega_1^2 = \frac{1}{2}\kappa\theta^2 - Mg\frac{L}{2}\sin(\theta) \, ,$$

hvor all den initielle kinetiske energien er omgjort til potensiell energi.

g) *Hva er vinkelhastigheten til staven om punktet O idet staven er tilbake i horisontal posisjon, dvs. idet $\theta = 0$?*

Siden energien er bevart, vil vinkelhastigheten når staven er tilbake i horisontal posisjon være den samme som umiddelbart etter kollisjonen, men retningen er nå motsatt:

$$\omega_2 = -\omega_1 \, .$$

h) *Hva er hastigheten til massesenteret idet staven er tilbake i horisontal posisjon?*

Hastigheten til massesenteret er fremdeles gitt av hastigheten til et punkt i avstand $L/2$ fra rotasjonsaksen for et roterende stivt legeme:

$$v_2 = -\frac{L}{2}\omega_2 \, ,$$

(hvor fortegnet er negativt, siden vinkelhastigheten nå er negativ).

Idet staven er tilbake i horisontal posisjon glipper festet i punktet O, slik at staven ikke lenger er festet. Du kan anta at staven gjennom denne prosessen ikke påvirkes av ytre vertikale krefter og at den kinetiske energien til staven bevares gjennom prosessen.

i) *Vis at hastigheten til massesenteret og vinkelhastigheten om massesenteret umiddelbart etter at staven glipper er:*
$v_2 = -\frac{3}{4}v_0 \;\; og \;\; \omega_2 = \frac{3}{2}\frac{v_0}{L}$
(Merk at v_0 her er negativ).

Siden staven ikke påvirkes av noen ytre vertikale krefter, er det ingen vertikal akselerasjon. Den vertikale hastigheten til massesenteret er derfor den samme etter at staven glipper som før den glapp. Hastigheten til massesenteret er derfor:

$$v_2 = -\frac{L}{2}\omega_2 = \frac{L}{2}\omega_1 = -\frac{L}{2}\frac{3}{2}\frac{v_0}{L} = -\frac{3}{4}v_0$$

(Merk at det ikke trekkes dersom du har valgt en annen fortegnskonvensjon, så lenge du gjør det konsistent gjennom hele oppgaven).

Siden den kinetiske energien er bevart, vet vi at

$$K^{før} = K^{etter}$$

Før den glipper roterer hele staven som et stivt legeme, og

$$K^{før} = \frac{1}{2}I_{O,z}\omega_2^2$$

mens etter at staven glipper må vi ta hensyn til bevegelsen til massesenteret og rotasjonen omkring massesenteret:

$$K^{etter} = \frac{1}{2}Mv_2^2 + \frac{1}{2}I_{cm,z}\omega_{cm}^2$$

Det gir at:

$$\frac{1}{2}I_{O,z}\omega_2^2 = \frac{1}{2}Mv_2^2 + \frac{1}{2}I_{cm,z}\omega_{cm}^2 = \frac{1}{2}M\left(\frac{L}{2}\omega_2\right)^2 + \frac{1}{2}I_{cm,z}\omega_{cm}^2$$

som gir:

$$\frac{1}{2}\left(I_{O,z} - M\left(\frac{L}{2}\right)^2\right)\omega_2^2 = \frac{1}{2} I_{cm,z}\omega_{cm}^2$$

hvor vi ser at:

$$\left(I_{O,z} - M\left(\frac{L}{2}\right)^2\right) = I_{cm,z}$$

og at

$$\omega_{cm} = \omega_2 = -\omega_1 = \frac{3}{2}\frac{v_0}{L}.$$

(Merk at du kan løse denne oppgaven enklere ved å bruke spinn-bane uttrykket:

$\vec{L}_O = \vec{R} \times M\vec{v}_{cm} + \vec{L}_{cm}$, men denne likningen blir ikke alltid gjennomgått like grundig i kurset.)

j) Beskriv bevegelsen til staven etter dette.

Etter at staven glipper, vil det ikke virke noen kraftmoment om massesenteret. Spinnet om massesenteret vil derfor ikke endres, og staven vil rotere med den samme vinkelhastigheten. Staven påvirkes kun av gravitasjonskraften, så banen til massesenteret vil være banen til et legeme som faller i gravitasjonsfeltet. Staven vil derfor fortsette oppover med konstant negativ akselerasjon. Hastigheten blir null i topppunktet i banen, og detetter vil staven falle mot bakken.

k) Hvor høyt opp når massesenteret til staven?

Staven påvirkes kun av konservative krefter. Vi kan derfor bruke energibevaring til å finne når hastigheten er null som svarer til topp-punktet i banen. Siden vinkelhastigheten ikke endres i denne bevegelsen, vil den kinetiske energien for rotasjon om massesenteret være konstant:

$$E_2 = \frac{1}{2}Mv_2^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega_{cm}^2 + Mg0 = \frac{1}{2}Mv_3^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega_{cm}^2 + Mgy_3,$$

hvor $v_3 = 0$ slik at

$$\frac{1}{2}Mv_2^2 = Mgy_3,$$

og vi finner:

$$y_3 = \frac{v_2^2}{2g} = \frac{\left(\frac{3}{4}v_0\right)^2}{2g} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \frac{v_0^2}{2g} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 h\,.$$

***

Dette er siste ark i oppgavesettet. Lykke til med oppgavene!