# UNIVERSITETET I OSLO

## Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

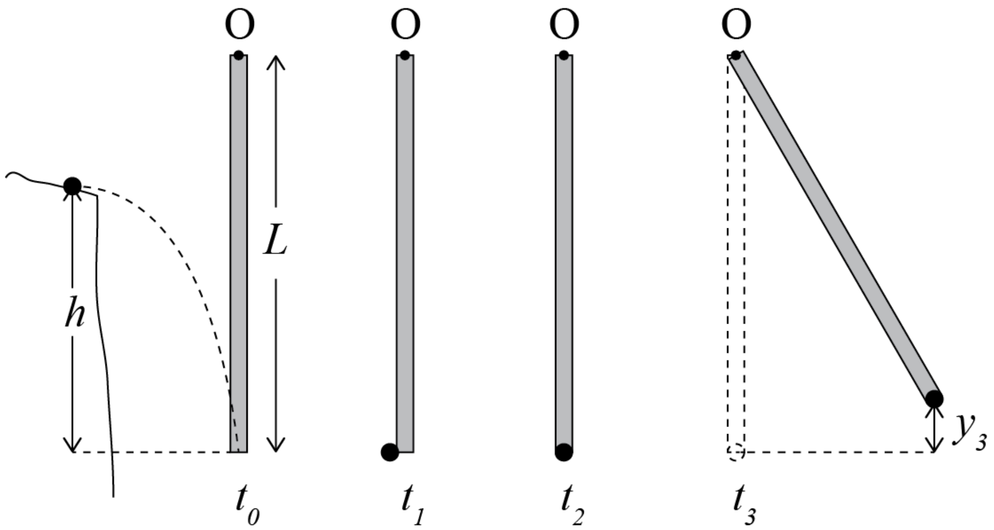
**Eksamen i:** FYS-MEK1110
**Eksamensdag:** Onsdag 1. juni 2011
**Tid for eksamen:** Kl. 0900-1300
**Oppgavesettet er på 5 sider + formelark**
**Tillatte hjelpemidler:** Øgrim og Lian: Størrelser og enheter i fysikk og teknikk eller
Angell, Lian, Øgrim: Fysiske størrelser og enheter: Navn og symboler
Rottmann: Matematisk formelsamling
Elektronisk kalkulator av godkjent type.

*Kontrollér at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.*

*Du må i oppgavene begrunne dine svar. Ubegrunnede svar gir liten uttelling.*

### Oppgave 1

Tarzan hopper fra en klippe og griper en liane. Han hopper horisontalt ut fra klippen med hastighet $v_0$ ved tiden $t_0$. Lianen har massen $M$ og lengden $L$, henger rett ned, og er festet i sitt øverste punkt, O. Tarzan hopper fra en høyde $h$ over laveste punkt på lianen, som illustrert i figuren under. Tarzan har masse $m$ og blir etter "kollisjonen" med lianen hengende fast med massesenteret helt nederst på lianen. Lianen oppfører seg som en stav festet i et friksjonsfritt punkt O. Treghetsmomentet til en stav om massesenteret er $I_{cm} = \frac{1}{12}ML^2$. Du kan se bort fra luftmotstand.




*Figur som viser Tarzan når han hopper (ved $t_0$), umiddelbart før han griper lianen ($t_1$), umiddelbart etter at han henger fast i lianen ($t_2$), og når han når sitt høyeste punkt ($t_3$).*

a) Hva er hastigheten til Tarzan umiddelbart før kollisjonen med lianen (ved $t_1$)?

b) Hva er treghetsmomentet til lianen om punktet O?

c) Vis at vinkelhastigheten til lianen med Tarzan umiddelbart etter kollisjonen er

$$\omega_2 = \frac{m}{\frac{M}{3} + m} \frac{v_0}{L}$$

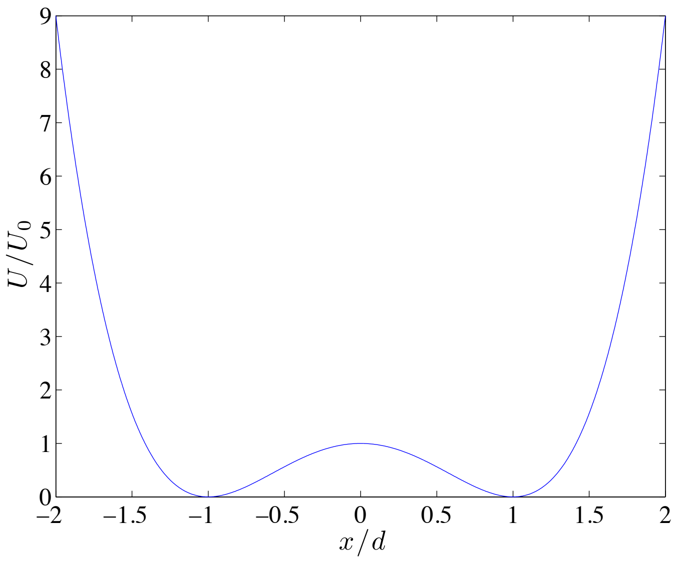
d) Hvor høyt opp svinger Tarzan?

## Oppgave 2

Vi skal i denne oppgaven studere et atom med masse $m$ som påvirkes av to store molekyler. Du kan anta at de store molekylene ikke beveger seg. Vi ser først på en en-dimensjonal bevegelse langs $x$-aksen. Vekselvirkningen mellom atomet og molekylene kan beskrives med potensialet

$$U(x) = U_0\left(\left[\left(\frac{x}{d}\right)^2 - 1\right]^2\right) = \frac{U_0}{d^4}(x^2 - d^2)^2 = \frac{U_0}{d^4}(x^4 - 2x^2d^2 + d^4)$$

hvor $U_0$ er en kjent konstant med enhet energi, $x$ er posisjonen til atomet, og $d$ er en konstant med enhet lengde. Potensialet er illustrert i figuren. Vi har oppgitt tre ekvivalente uttrykk for potensialet slik at du kan arbeide med den formen du foretrekker. Du kan se bort fra andre krefter på atomet.




a) Lag ditt eget energidiagram. Finn likevektspunktene, marker disse i diagrammet og karakteriser dem. Velg to energier som gir forskjellige typer bevegelser, tegn inn bevegelsene i diagrammet, og beskriv bevegelsen til atomet i hvert tilfelle.

b) Hvis atomet starter i ro i $x = 2d$ , hva er farten til atomet i punktet $x = d$?

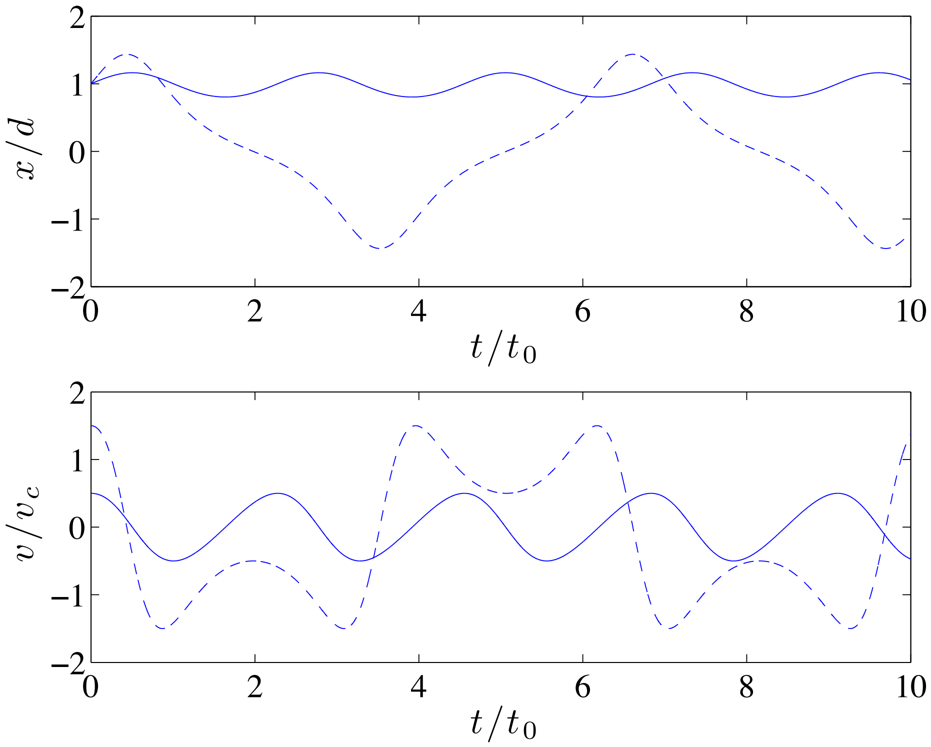
c) Hvis atomet starter i $x = d$ med hastigheten $v_0$, hvor stor må $v_0$ være for at atomet skal nå posisjonen $x = -d$?

d) Vis at akselerasjonen til atomet er

$$a = -\frac{4U_0}{md^4}(x^3 - xd^2)$$

e) Skriv et program som finner posisjonen og hastigheten til atomet ved tiden $t + \Delta t$ gitt posisjonen og hastigheten ved tiden $t$. Du behøver ikke skrive et fullstendig program, men kun den delen av programmet som finner ny posisjon og hastighet.

f) Figuren under viser resultatet av to simuleringer for to ulike initial-betingelser. Beskriv oppførselen til atomet i hvert tilfelle og skisser bevegelsene i et energi-diagram.




Vi skal nå se på det samme systemet, men i to dimensjoner. Atomet vekselvirker med en overflate, slik at potensialet til atomet er

$$U(r) = U_0\left(\left[\left(\frac{r}{d}\right)^2 - 1\right]^2\right) = \frac{U_0}{d^4}(r^2 - d^2)^2 = \frac{U_0}{d^4}(r^4 - 2r^2d^2 + d^4)$$

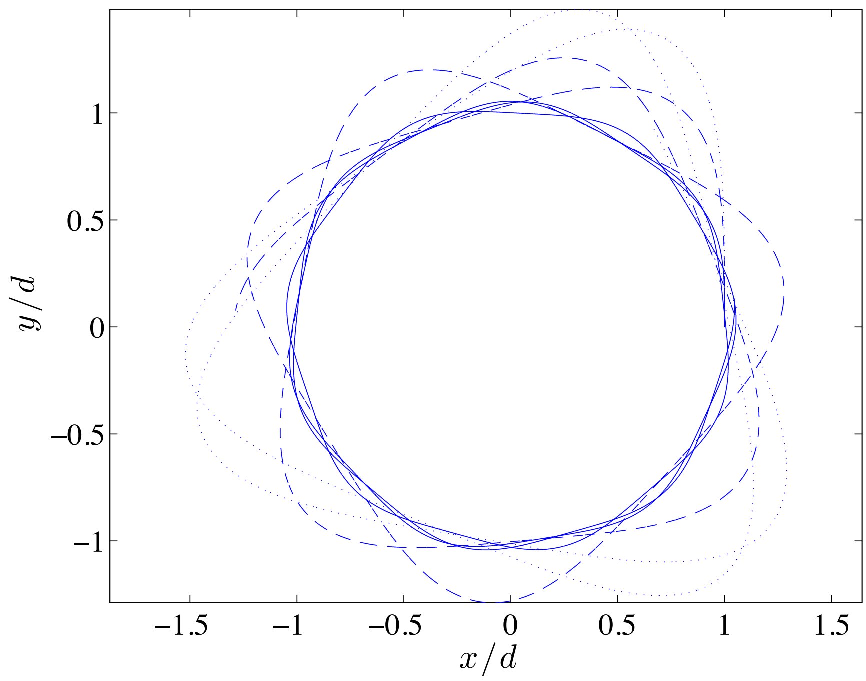
hvor $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ er avstanden til origo og de andre størrelsene har samme betydning som tidligere. (Vi kan da ikke lenger tolke vekselvirkningen som en effekt av to molekyler. I stedet tolker vi den som en tilnærming til en mer komplisert vekselvirkning fra mange omliggende atomer. Denne tolkningen er ikke viktig for oppgaven.)

g) Vis at kraften på atomet kan skrives som:

$$\vec{F} = -\frac{4U_0}{d^4}(r^3 - rd^2)\frac{\vec{r}}{r}$$

h) (Denne oppgaven teller dobbelt) Skriv om programmet ditt til å finne posisjonen og hastigheten til atomet ved tiden $t + \Delta t$ gitt posisjonen og hastigheten ved tiden $t$ for bevegelse i to dimensjoner.

i) Figuren under viser bevegelsen for et atom som starter i $\vec{r}_0 = (d, 0)$ med hastigheten $\vec{v}_0 = (0, v_0)$ for tre forskjellige verdier av $v_0$. Kan du velge initialbetingelsene slik at atomet beveger seg i en sirkelbane med konstant radius? Hvordan må du i så fall velge initialbetingelsene?




## Oppgave 3

Vi skal i denne oppgaven studere ei kule som spretter på et flatt underlag. Vi skal kun se på en enkelt kollisjon mellom kula og underlaget, men vi skal studere kollisjonen med forskjellige modeller for kontakten mellom kula og underlaget.

Kula har masse $m$ og radius $R$. Kula deformeres under kollisjonen med underlaget, men du kan anta at deformasjonen er liten. Kreftene fra underlaget på kula virker derfor i et punkt på kuleoverflaten gjennom hele kollisjonen, og du kan anta at kontaktpunktet ikke endrer avstand til massesenteret. Du kan anta at kula sklir mot underlaget gjennom hele kollisjonen og at den dynamiske friksjonskoeffisienten mellom kula og underlaget er $\mu$. Du kan se bort fra luftmotstand. Tyngdens akselerasjon er $g$. Treghetsmomentet til kula om massesenteret er $I$.

Kula starter fra høyden $h$ med kun horisontal hastighet. Hastigheten til kula umiddelbart før kollisjonen med underlaget er $\vec{v}(t_0) = v_{0x}\hat{\imath} + v_{0y}\hat{\jmath}$, hvor $v_{0x}$ er positiv og $v_{0y}$ er negativ.

a) Tegn et frilegemediagram for kula mens den er i kontakt med underlaget. Navngi kreftene.

La oss først anta at normalkraften fra underlaget på kulen er en konstant, $N_0$.

b) Finn den vertikale komponenten til hastigheten, $v_y(t)$, og posisjonen, $y(t)$, til kula mens den er i kontakt med underlaget. Hvor lenge er kula i kontakt med underlaget?

c) Finn hastigheten $v_x(t)$ til kula mens den er i kontakt med underlaget. Hva er hastigheten $v_{x1}$ til kula umiddelbart etter kollisjonen?

d) Finn vinkelhastigheten $\omega_1$ til kula umiddelbart etter kollisjonen. Beskriv bevegelsen til kula etter kollisjonen.

e) Er energien til kula bevart gjennom kollisjonen? Spretter kula tilbake opp til høyden $h$ etter kollisjonen? Begrunn svarene.

Anta at kraften fra underlaget på kula er $N = k(R - y)^{3/2}$ når kula er i kontakt med underlaget, det vil si når $y < R$.

f) Finn utrykk for akselerasjonene $a_x$ og $a_y$ til kula mens den er i kontakt med underlaget.

g) Finn et uttrykk for vinkelakselerasjonen $\alpha_z$ til kula mens den er i kontakt med underlaget.

h) Skriv et program som finner posisjonene, $x(t + \Delta t)$, $y(t + \Delta t)$, hastighetene, $v_x(t + \Delta t)$, $v_y(t + \Delta t)$, og vinkelhastigheten, $\omega(t + \Delta t)$, til kula ved tiden $t + \Delta t$ gitt posisjonene, hastighetene og vinkelhastigheten ved tiden $t$ mens kula er i kontakt med underlaget. Du behøver ikke skrive et fullstendig program, men kun den delen av programmet som finner nye posisjoner og hastigheter.

***

***Dette er siste ark i oppgavesettet. Lykke til med oppgavene!***

## Formelark Fys-mek1100

$\sum \vec{F} = m\vec{a} = \frac{d\vec{p}}{dt}$, hvor $\vec{p} = m\vec{v} = m\frac{d\vec{r}}{dt}$, og $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$.

Konstant $\vec{a}$: $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$, $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$ , $v^2 - v_0^2 = 2\vec{a} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0)$.

Konstant $\alpha$: $\omega = \omega_0 + \alpha t$ , $\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$ , $\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha \cdot (\theta - \theta_0)$.

Baneakselerasjon: $\vec{a} = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + \frac{v^2}{\rho}\hat{u}_N$.

Rotasjon: $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ , $\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$.

Galilei-trans.: $\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}'$, $\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}'$.

Fjærkraft: $F(x) = -k\,(x - x_0)$. Luftmotstand: $\vec{F}_v = -k\vec{v}$ eller $\vec{F}_v = -Dv\vec{v}$.

Friksjon: $|F_s| \leq \mu_s N$ eller $|F_d| = \mu_d N$.

Arbeid: $W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = K_B - K_A$ , Kinetisk energi: $K = \frac{1}{2}mv^2$.

Potensiell energi: $U(\vec{r})$. Tyngdekraft: $U = mgy$. Fjærkraft: $U = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2$.
Konservativ kraft: $\vec{F} = -\nabla U(\vec{r})$.

Impuls: $\vec{J} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F} dt = \Delta\vec{p} = \vec{p}(t_1) - \vec{p}(t_0)$.

Rakett-likningen: $\vec{F}^{\text{ext}} + \vec{v}_{\text{rel}}\frac{dm}{dt} = m\vec{a}$.

Massesenter: $\vec{R} = \frac{1}{M}\sum_i m_i\vec{r}_i = \frac{1}{M}\int_M \vec{r}dm$, $M = \sum_i m_i = \int_M dm$.

Kraftmoment: $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$. Spinn: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$.

Spinnsats: $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$. Stive legemer: $L_z = I_z\omega_z$, $\tau_z = I_z\alpha_z$.

Kinetisk energi: $K = \frac{1}{2}I\omega^2$, $I = \sum_i m_i\rho_i^2 = \int_M \rho^2 dm$.

Parallellakseteoremet: $I = I_{\text{cm}} + Md^2$.

Rullebetingelse: $V = \omega R$.

Fiktive krefter: $m\vec{a}' = \sum \vec{F}^{\text{ext}} - m\vec{A} - m\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}' - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$.

Gravitasjon: $\vec{F}(\vec{r}) = -G\frac{m_1m_2}{r^2}\hat{u}_r$ , $U(r) = -G\frac{m_1m_2}{r}$.

Spenning og tøyning: $\sigma_{xx} = \frac{F_x}{A_x} = E\frac{\Delta x}{x} = E\epsilon_{xx}$, $\frac{\Delta y}{y} = -\nu\frac{\Delta x}{x}$.

Lorentz-trans.: $x' = \gamma\,(x - ut)$, $y' = y$, $z' = z$, $t' = \gamma\left(t - \frac{u}{c^2}x\right)$, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$.

Relativistisk: $m = \gamma m_0$, $\vec{p} = m\vec{v}$ , $E = mc^2$.