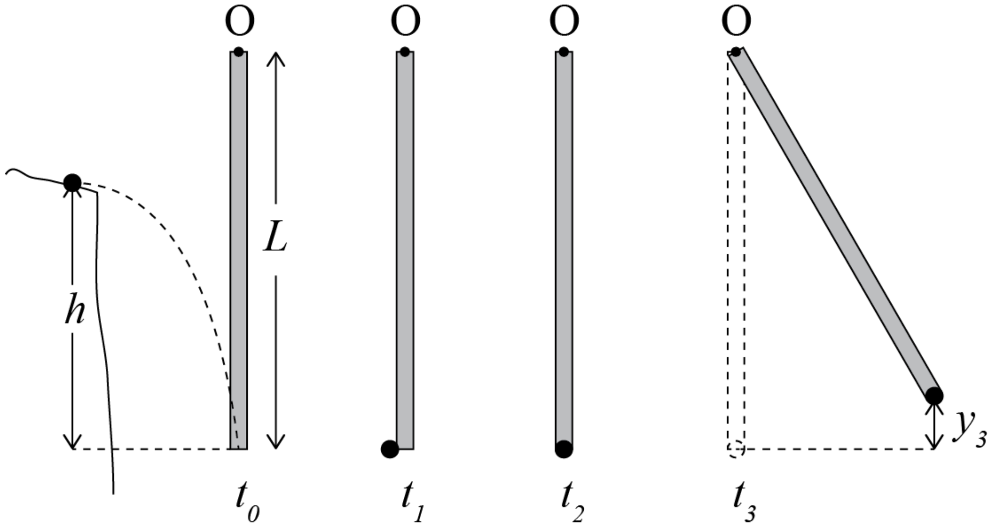
Løsningsforslag

Eksamen i Fys-mek1110 våren 2011

Oppgave 1

Tarzan hopper fra en klippe og griper en liane. Han hopper horisontalt ut fra klippen med hastighet v_0 ved tiden t_0. Lianen har massen M og lengden L, henger rett ned, og er festet i sitt øverste punkt, O. Tarzan hopper fra en høyde h over laveste punkt på lianen, som illustrert i figuren under. Tarzan har masse m og blir etter "kollisjonen" med lianen hengende fast med massesenteret helt nederst på lianen. Lianen oppfører seg som en stav festet i et friksjonsfritt punkt O. Treghetsmomentet til en stav om massesenteret er $I_{cm} = \frac{1}{12}ML^2$. Du kan se bort fra luftmotstand.



Figur som viser Tarzan når han hopper (ved t_0), umiddelbart før han griper lianen (t_1), umiddelbart etter at han henger fast i lianen (t_2), og når han når sitt høyeste punkt (t_3).

a) Hva er hastigheten til Tarzan umiddelbart før kollisjonen med lianen (ved t_1)?

I banen fra klippen mot lianen er Tarzan kun påvirket av gravitasjonskraften. Denne kraften virker kun i y-retningen. Da er summen av kreftene null i x-retningen, og hastigheten i x-retningen er derfor uendret. Dermed er

$$v_{x1} = v_{x0} = v_0$$

Siden gravitasjonskraften er en konstant kraft kan vi bruke bevaring av energi for å relatere hastigheten til posisjonen. I tilstand 0 er energien:

$$E_0 = mgh + \frac{1}{2}mv^2 = mgh + \frac{1}{2}m(v_{x0}^2 + v_{y0}^2)$$

I tilstand 1 er energien:

$$E_1 = mg0 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(v_{x1}^2 + v_{y1}^2)$$

Siden vi vet at $v_{x1} = v_{x0}$ og $v_{y0} = 0$ ser vi at energi-bevaring gir at:

$$E_0 = E_1$$

$$mgh + \frac{1}{2}m(v_{x0}^2 + v_{y0}^2) = \frac{1}{2}m(v_{x1}^2 + v_{y1}^2)$$

$$mgh + \frac{1}{2}m(v_{x0}^2 + v_{y0}^2) = \frac{1}{2}m(v_{x0}^2 + v_{y1}^2)$$

$$mgh = \frac{1}{2}mv_{y1}^2$$

$$v_{x1} = v_0, v_{y1} = \sqrt{2gh}$$

(Det finnes flere måter å komme fram til dette svaret på, og en besvarelse behøver ikke være så omfattende som dette for å få full score.)

b) *Hva er treghetsmomentet til lianen om punktet O?*

Treghetsmomentet til lianen om en akse i z-retningen gjennom massesenteret er oppgitt. Vi ønsker å finne treghetsmomentet om en akse i z-retningen gjennom punktet O. Vi benytter parallell-akse-teoremet. Avstanden mellom aksene er da $L/2$:

$$I_{0z} = I_{cm,z} + M(L/2)^2 = \frac{1}{12}ML^2 + \frac{1}{4}ML^2 = \frac{1}{3}ML^2$$

c) *Vis at vinkelhastigheten til lianen med Tarzan umiddelbart etter kollisjonen er*

$$\omega_2 = \frac{m}{\frac{M}{3} + m}\frac{v_0}{L}$$

Vi kan benytte spinnsatsen om punktet O for å relatere spinnet før og etter kollisjonen. De eneste ytre kreftene som virker på systemet er kontaktkreftene i punktet O og gravitasjonskraften. Ingen av disse kreftene har noe kraftmoment om punktet O: kontaktkreftene fordi de virker i punktet O og gravitasjonen fordi den er parallell med vektoren fra O til massesenteret. (Vi antar at lianen blir hengende tilnærmet rett ned gjennom hele kollisjonen slik det er illustrert i figuren). Da er netto kraftmoment av ytre krefter om punktet O null, og spinnet om punktet O er derfor bevart gjennom hele kollisjonen.

Spinnet før kollisjonen er:

$$L_0 = Lmv_{x1}$$

Merk at det kun er x-komponenten av hastigheten som gir bidrag til spinnet, siden y-komponenten virker i samme retning som vektoren fra 0 til massesenteret til Tarzan.

Etter kollisjonen svinger hele legemet som består av lianen og Tarzan som et samlet legeme. Treghetsmomentet til dette legemet om aksen z gjennom O finner vi ved superposisjonsprinsippet:

$$I_{0z} = mL^2 + \frac{1}{3}ML^2$$

Spinnet etter kollisjonen er da:

$$L_1 = I_{0z}\omega_2$$

Vi finner vinkelhastigheten etter kollisjonen fra spinnbevaring:

$$L_0 = L_1$$

$$Lmv_{x1} = I_{0z}\omega_2$$

$$\frac{Lmv_{x1}}{I_{0z}} = \omega_2$$

$$\frac{Lmv_{x1}}{mL^2 + \frac{1}{3}ML^2} = \omega_2$$

$$\frac{m}{\frac{M}{3} + m}\frac{v_0}{L} = \omega_2$$

d) Hvor høyt opp svinger Tarzan?

Etter kollisjonen er lianen med Tarzan kun påvirket av gravitasjonskraften samt kreftene som virker i punktet O, men kreftene i punktet O gjør ikke noe arbeid på systemet. Energien er derfor bevart fordi gravitasjonskraften er en konstant. Vi kan benytte energibevaring til å relatere posisjonen og hastigheten til systemet. I det det laveste punktet har systemet kun kinetisk energi og i det høyeste punktet er all den kinetiske energien gått over i potensiell energi:

$$E_2 = K_2 + U_2 = \frac{1}{2}I_{Oz}\omega_2^2 + mg0 + Mg\left(\frac{L}{2}\right)$$

$$E_3 = K_1 + U_1 = \frac{1}{2}I_{Oz}\omega_3^2 + mgy_3 + Mg\left(\frac{L}{2} + \frac{y_3}{2}\right)$$

Hvor vi har brukt at dersom massesenteret til Tarzan som er i en avstand L fra O har flyttet seg en høyde h oppover, så har massesenteret til lianen som er i en avstand $L/2$ fra O flyttet seg en høyde $h/2$ oppover. Dessuten vet vi at $\omega_3 = 0$ i det høyeste punktet. Dermed får vi:

$$E_2 = E_3$$

$$E_2 = \frac{1}{2} I_{Oz}\omega_2^2 + Mg\left(\frac{L}{2}\right) = mgy_3 + Mg\left(\frac{L}{2} + \frac{y_3}{2}\right) = E_3$$

$$\frac{1}{2} I_{Oz}\omega_2^2 = mgy_3 + Mg\left(\frac{y_3}{2}\right)$$

$$\frac{1}{2} I_{Oz}\omega_2^2 = \left(m + \frac{M}{2}\right) gy_3$$

$$\frac{1}{2}\left(m + \frac{M}{3}\right) L^2 \left(\frac{m}{\frac{M}{3} + m} \frac{v_0}{L}\right)^2 = \left(m + \frac{M}{2}\right) gy_3$$

$$\frac{1}{2} \frac{m^2}{\left(\frac{M}{3} + m\right)} v_0^2 = \left(m + \frac{M}{2}\right) gy_3$$

$$\frac{v_0^2}{2g} \frac{m^2}{\left(\frac{M}{3} + m\right)\left(m + \frac{M}{2}\right)} = y_3$$

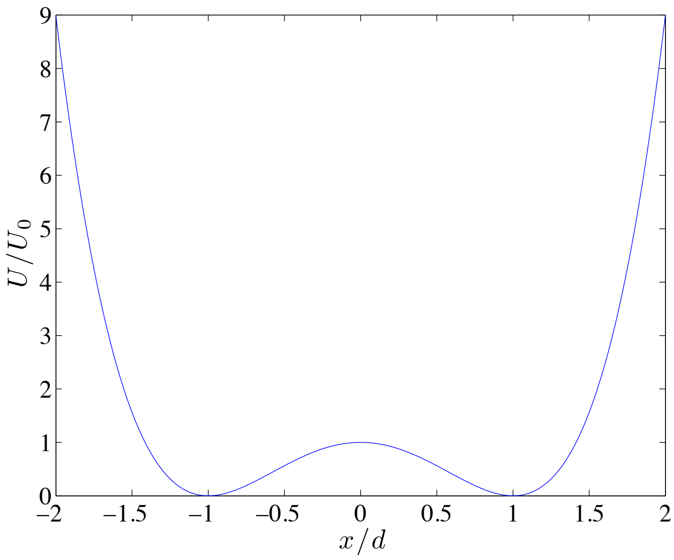
(Merk at dette er uavhengig av hvor høyt opp Tarzan hoppet fra.)

Oppgave 2

Vi skal i denne oppgaven studere et atom med masse m *som påvirkes av to store molekyler. Du kan anta at de store molekylene ikke beveger seg. Vi ser først på en en-dimensjonal bevegelse langs* x*-aksen. Vekselvirkningen mellom atomet og molekylene kan beskrives med potensialet*

$$U(x) = U_0\left(\left[\left(\frac{x}{d}\right)^2 - 1\right]^2\right) = \frac{U_0}{d^4}(x^2 - d^2)^2 = \frac{U_0}{d^4}(x^4 - 2x^2d^2 + d^4)$$

hvor U_0 *er en kjent konstant med enhet energi,* x *er posisjonen til atomet, og* d *er en konstant med enhet lengde. Potensialet er illustrert i figuren. Vi har oppgitt tre ekvivalente uttrykk for potensialet slik at du kan arbeide med den formen du foretrekker. Du kan se bort fra andre krefter på atomet.*



a) Lag ditt eget energidiagram. Finn likevektspunktene, marker disse i diagrammet og karakteriser dem. Velg to energier som gir forskjellige typer bevegelser, tegn inn bevegelsene i diagrammet, og beskriv bevegelsen til *atomet i hvert tilfelle.*

Likevektspunktene er lokale ekstremumspunktet for potensialet. Vi ser at vi har lokale minima i punktene $x = d$ og $x = -d$. Dette er stabile likevektspunkter. Vi har et lokalt maksimum i punktet $x = 0$. Dette er et ustabilt likevektspunkt.

Vi velger en totalenergi som er mindre enn U_0, for eksempel $E = U_0/2$, og ser på en bevegelse hvor atomet starter i punktet $x = d$. Da vil atomet svinge frem og tilbake mellom punktene x_0 og x_1 (som vist i diagrammet) uten at atomet vil kunne nå punktet $x = -d$.

Hvis vi velger en totalenergi som er større enn U_0, for eksempel $E = 3U_0/2$, og ser på en bevegelse hvor atomet starter i punktet $x = d$. Da vil atomet svinge frem og tilbake mellom punktene x_2 og x_3 (som vist i diagrammet) og atomet går da også forbi punktet $x = -d$.

b) *Hvis atomet starter i ro i $x = 2d$, hva er farten til atomet i punktet $x = d$?*

Siden atomet kun er påvirket av en kraft som er definert ved en potensiell energi, er energien til systemet bevart. Vi benytter energibevaring. I punktet A, ved $x = 2d$, er energien:

$$E_A = U_A + K_A = \frac{U_0}{d^4}((2d)^2 - d^2)^2 + 0 = U_0(4-1)^2 = 9U_0$$

I punktet B, ved $x = d$, er den potensielle energien null, og dermed:

$$E_B = U_B + K_B = 0 + \frac{1}{2}mv_B^2$$

Energibevaring gir:

$$E_A = 9U_0 = E_B = \frac{1}{2}mv_B^2$$

og dermed er farten:

$$v_B = \pm\sqrt{\frac{18U_0}{m}}$$

hvor vi viser at atomet kan bevege seg i begge retninger.

c) *Hvis atomet starter i $x = d$ med hastigheten v_0, hvor stor må v_0 være for at atomet skal nå posisjonen $x = -d$?*

Denne oppgaven løses også med energibevaring. Fra energi-diagrammet ser vi at atomet må minst ha en totalenergi som er U_0 for at atomet skal nå punktet $x = -d$. I punktet $x = d$ er den potensielle energien null. Betingelsen er dermed at totalenergien i punktet $x = d$ må være minst U_0:

$$E = U_C + K_C = 0 + \frac{1}{2}mv_0^2 \geq U_0$$

som gir betingelsen:

$$|v_0| \geq \sqrt{\frac{2U_0}{m}}$$

d) *Vis at akselerasjonen til atomet er*

$$a = -\frac{4U_0}{md^4}(x^3 - xd^2)$$

Kraften på atomet er gitt som:

$$F = -\frac{dU}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{U_0}{d^4}(x^4 - 2x^2d^2 + d^4)\right) = -\frac{U_0}{d^4}(4x^3 - 4xd^2) = -\frac{4U_0}{d^4}(x^3 - xd^2)$$

Newtons andre lov for atomet gir akselerasjonen:

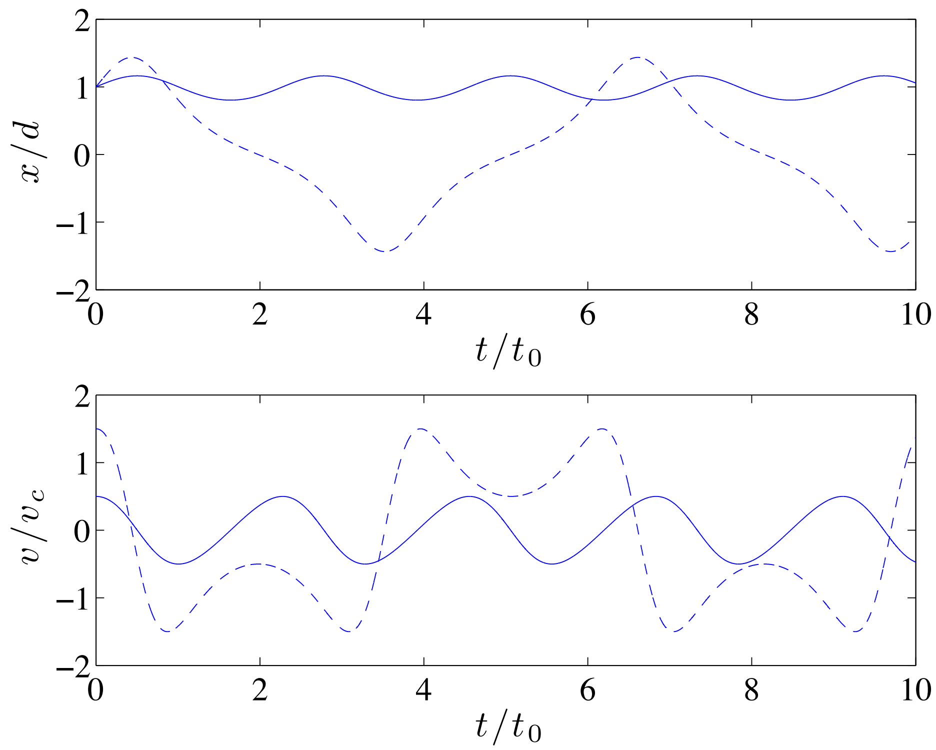
$$F = ma, a = \frac{F}{m} = -\frac{4U_0}{md^4}(x^3 - xd^2)$$

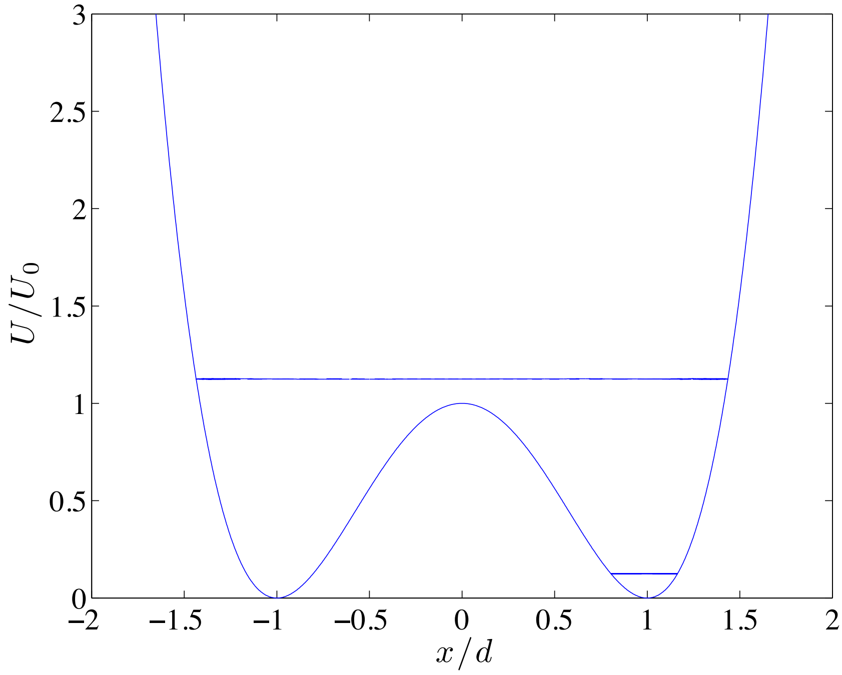
e) *Skriv et program som finner posisjonen og hastigheten til atomet ved tiden $t + \Delta t$ gitt posisjonen og hastigheten ved tiden t. Du behøver ikke skrive et fullstendig program, men kun den delen av programmet som finner ny posisjon og hastighet.*

```
% U(x) = U_0/d^4 (x^2 -d^2)^2;
% F(x) = -U_0/d^4 (4x^3 - 4xd^2);
clear all;clf;
m = 1.0;
U0 = 1.0;
d = 1.0;
v0 = 0.5;
time = 10.0;
dt = 0.001;
n = ceil(time/dt);
x = zeros(n,1);
v = zeros(n,1);
```

```
t = zeros(n,1);
%
v(1) = v0;
x(1) = 1;
F0 = U0/d^4;
%
for i = 1:n-1
    F = -F0*(4*x(i)^3-4*x(i)*d^2);
    a = F/m;
    v(i+1) = v(i) + a*dt;
    x(i+1) = x(i) + v(i+1)*dt;
    t(i+1) = t(i) + dt;
end
subplot(2,1,1);
plot(t,x)
xlabel('$t/t_0$');
ylabel('$x/d$');
subplot(2,1,2)
xlabel('$t/t_0$');
ylabel('$v/v_{c}$');
```

f) *Figuren under viser resultatet av to simuleringer for to ulike initial-betingelser. Beskriv oppførselen til atomet i hvert tilfelle og skisser bevegelsene i et energi-diagram.*





For den hele linjen er bevegelsen en oscillasjon nær punktet $x = d$.

For den stiplede linjen er bevegelsen en oscillasjon for en totalenergi som er større enn U_0.

Vi skal nå se på det samme systemet, men i to dimensjoner. Atomet vekselvirker med en overflate, slik at potensialet til atomet er

$$U(r) = U_0\left(\left[\left(\frac{r}{d}\right)^2 - 1\right]^2\right) = \frac{U_0}{d^4}(r^2 - d^2)^2 = \frac{U_0}{d^4}(r^4 - 2r^2d^2 + d^4)$$

hvor $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ *er avstanden til origo og de andre størrelsene har samme betydning som tidligere. (Vi kan da ikke lenger tolke vekselvirkningen som en effekt av to molekyler. I stedet tolker vi den som en tilnærming til en mer komplisert vekselvirkning fra mange omliggende atomer. Denne tolkningen er ikke viktig for oppgaven.)*

g) *Vis at kraften på atomet kan skrives som:*

$$\vec{F} = -\frac{4U_0}{d^4}(r^3 - rd^2)\frac{\vec{r}}{r}$$

Vi finner kraften som

$$\vec{F} = -\nabla U$$

Siden $U = U(r)$ kan vi finne hver komponent av kraften ved:

$$F_x = -\frac{dU}{dx} = -\frac{\partial U}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}$$

Hvor vi vet at $r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$. Dessuten er utregningen av $\frac{\partial U}{\partial r}$ den samme som vi gjorde i en dimensjon ovenfor. Vi finner

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} 2x = \frac{x}{r}$$

Dermed ser vi at kraften er som gitt i oppgaven.

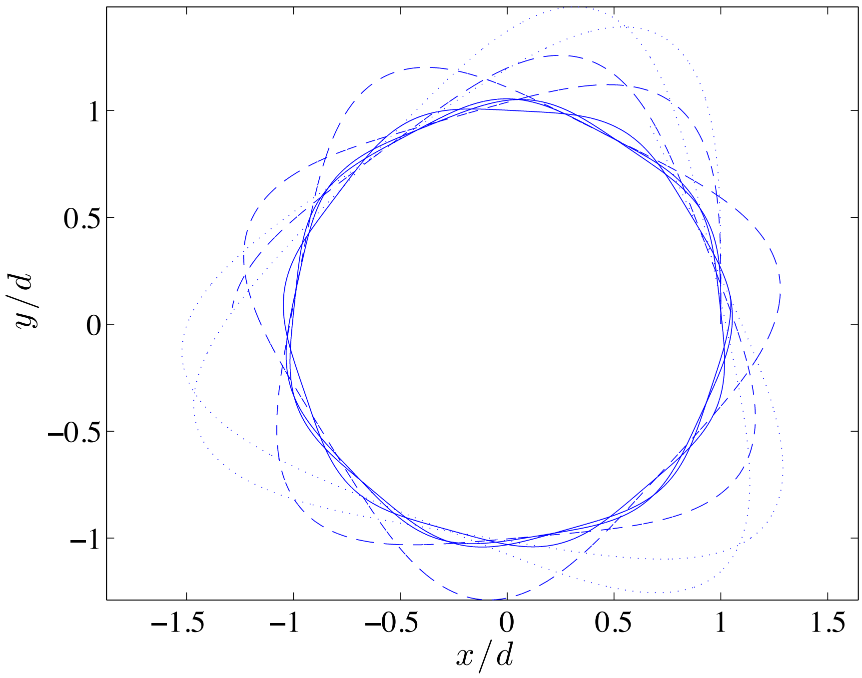
h) (Denne oppgaven teller dobbelt) Skriv om programmet ditt til å finne posisjonen og hastigheten til atomet ved tiden $t + \Delta t$ gitt posisjonen og hastigheten ved tiden t for bevegelse i to dimensjoner.

(Det er i denne oppgaven tilstrekkelig kun å ta med innerløkken av programmet, men et helt program er her vist slik at du kan teste det. Parameterene er valgt (noe) tilfeldig.

```
% U(r) = U_0/d^4 (r^2 -d^2)^2;
% F(r) = -U_0/d^4 (4r^3 - 4rd^2)[x y]/r;
clear all;clf;
m = 1.0;
U0 = 1.0;
d = 1.0;
v0 = 0.5; % 1.5, 2.5
time = 20.0/v0;
dt = 0.001;
n = ceil(time/dt);
x = zeros(n,2);
v = zeros(n,2);
t = zeros(n,2);
v(1,2) = v0;
x(1,1) = 1.0;
F0 = U0/d^4;
for i = 1:n-1
    r = norm(x(i,:));
    Fn = F0*(4*r^3-4*r*d^2);
    F = -Fn*x(i,:)/r;
    a = F/m;
    v(i+1,:) = v(i,:) + a*dt;
    x(i+1,:) = x(i,:) + v(i+1,:)*dt;
    t(i+1) = t(i) + dt;
end
plot(x(:,1),x(:,2))
```

```
xlabel('x/d');
ylabel('y/d');
axis equal
```

i) Figuren under viser bevegelsen for et atom som starter i $\vec{r}_0 = (d, 0)$ med hastigheten $\vec{v}_0 = (0, v_0)$ for tre forskjellige verdier av v_0. Kan du velge initialbetingelsene slik at atomet beveger seg i en sirkelbane med konstant radius? Hvordan må du i så fall velge initialbetingelsene?



Dersom atomet skal bevege seg i en sirkelbane med konstant radius, må akselerasjonen til atomet være rettet inn mot sentrum av sirkelbanen, og størrelsen på akselerasjonen må være:

$$a = \frac{v^2}{r}$$

Hvor r er radius i sirkelbanen. Akselerasjonen til atomet er gitt fra Newtons andre lov, som gir:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = -\frac{4U_0}{md^4}(r^3 - rd^2)\frac{\vec{r}}{r}$$

Vi ser at akselerasjonen er rettet i radiell retning, og hvis $r > d$ er akselerasjonen rettet innover i sirkelen. Sirkelbevegelse krever at størrelsen av akselerasjonen svarer til sentripetalakselerasjonen:

$$\frac{4U_0}{md^4}(r^3 - rd^2) = \frac{v^2}{r}$$

Det betyr at vi kan finne hastigheten atomet må ha for en gitt radius, r, ved:

$$v = \sqrt{\frac{4U_0}{md^4}(r^3 - rd^2)r}$$

hvor vi altså har antatt at $r > d$. Hvilken retning må hastigheten ha? Den må være rent tangentiell.

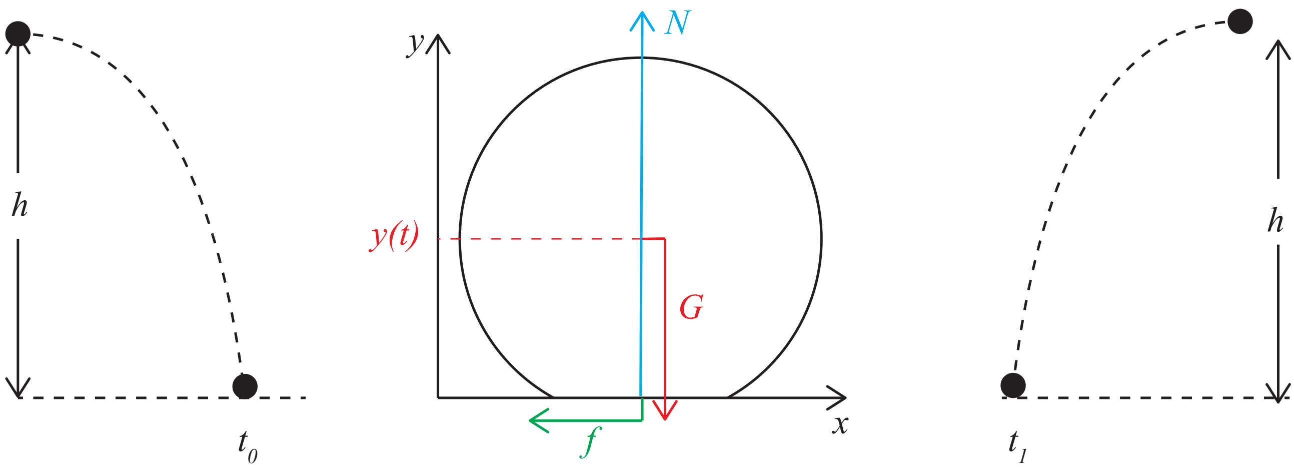
Oppgave 3

Vi skal i denne oppgaven studere ei kule som spretter på et flatt underlag. Vi skal kun se på en enkelt kollisjon mellom kula og underlaget, men vi skal studere kollisjonen med forskjellige modeller for kontakten mellom kula og underlaget.

Kula har masse m og radius R. Kula deformeres under kollisjonen med underlaget, men du kan anta at deformasjonen er liten. Kreftene fra underlaget på kula virker derfor i et punkt på kuleoverflaten gjennom hele kollisjonen, og du kan anta at kontaktpunktet ikke endrer avstand til massesenteret. Du kan anta at kula sklir mot underlaget gjennom hele kollisjonen og at den dynamiske friksjonskoeffisienten mellom kula og underlaget er μ. Du kan se bort fra luftmotstand. Tyngdens akselerasjon er g. Treghetsmomentet til kula om massesenteret er I.

Kula starter fra høyden h med kun horisontal hastighet. Hastigheten til kula umiddelbart før kollisjonen med underlaget er $\vec{v}(t_0) = v_{0x}\hat{\imath} + v_{0y}\hat{\jmath}$, hvor v_{0x} er positiv og v_{0y} er negativ.

a) *Tegn et frilegemediagram for kula mens den er i kontakt med underlaget. Navngi kreftene.*



Mens kula er i kontakt med underlaget påvirkes den av normalkraften, N, gravitasjonskraften, G, og friksjonskraften, f. Friksjonskraften vil virker i motsatt retning av hastigheten til kontaktpunktet, dvs. den vil virke i negativ x-retning. Deformasjonen av kula er liten. Det betyr at den vertikalen posisjonen $y(t)$ til massesenteret til kula flytter seg lite i forhold til radius, R, til kula. Altså at $R - y \approx R$. (Det betyr ikke at y er konstant, men at lengden av armen for kraftmomentet av friksjonskraften om massesenteret ikke endres i løpet av kollisjonen – slik at det blir mulig å løse bevegelseslikningene.)

La oss først anta at normalkraften fra underlaget på kulen er en konstant, N_0.

b) *Finn den vertikale komponenten til hastigheten, $v_y(t)$, og posisjonen, $y(t)$, til kula mens den er i kontakt med underlaget. Hvor lenge er kula i kontakt med underlaget?*

Vi beskriver bevegelsen til kula med posisjonen, $x(t)$ og $y(t)$ av kula som funksjon av tiden, t. Vi finner akselerasjonen fra Newtons andre lov. Newtons andre lov i y-retningen gir:

$$\sum F_y = N_0 - G = N_0 - mg = ma_y$$

$$a_y = \frac{N_0}{m} - g$$

Vi finner hastigheten i y-retningen ved å integrere akselerasjonen i y-retningen:

$$v_y(t) = v_{0y} + \int_{t_0}^{t} a_y dt = v_{0y} + \left(\frac{N_0}{m} - g\right) t$$

Hvor vi har satt at kollisjonen begynner ved $t_0 = 0s$. Vi finner posisjonen ved å integrere hastigheten:

$$y(t) = y_0 + \int_0^t v_y(t)dt = y_0 + \ v_{0y}t + \frac{1}{2}\left(\frac{N_0}{m} - g\right) t^2$$

hvor $y_0 = R$ er posisjonen til kula idet den kommer i kontakt med underlaget. (Det trekkes ikke noe hvis du regner med $y_0 = 0m$.) Denne beskrivelsen gjelder kun så lenge kula er i kontakt med underlaget. Når mister den kontakten med underlaget? Det skjer når $y(t) = y_0$ som skjer når $t = t_0 = 0s$ – som egentlig er når kula kommer i kontakt med underlaget, og ved tiden t_1:

$$v_{0y} + \frac{1}{2}\left(\frac{N_0}{m} - g\right) t_1 = 0$$

$$t_1 = \frac{-v_{0y}}{\frac{1}{2}(N_0 - g)}$$

hvilket er et positivt tall siden v_{0y} er negativ.

c) *Finn hastigheten $v_x(t)$ til kula mens den er i kontakt med underlaget. Hva er hastigheten v_{x1} til kula umiddelbart etter kollisjonen?*

Newtons lov i x-retningen gir:

$$\sum F_x = -f = -\mu N = -\mu N_0 = ma_x$$

(Merk at friksjonen er avhengig av normalkraften, og derfor ikke er μmg i dette tilfellet.)

Som gir

$$a_x = -\frac{\mu N_0}{m}$$

Vi finner hastigheten i x-retningen ved å integrere akselerasjonen:

$$v_x(t) = v_{x0} + \int_0^t a_x dt = v_{x0} - \frac{\mu N_0}{m} t$$

Du finner hastigheten etter kollisjonen ved å sette inn tiden t_1 fra oppgaven ovenfor. (Du behøver ikke sette inn verdien).

d) *Finn vinkelhastigheten ω_1 til kula umiddelbart etter kollisjonen. Beskriv bevegelsen til kula etter kollisjonen.*

Vi finner rotasjonsbevegelsen til kula fra Newtons andre lov for rotasjonsbevegelse om massesenteret til kula. Den eneste kraften som gir et kraftmoment om massesenteret er friksjonskraften, siden gravitasjonskraften virker i massesenteret, og normalkraften er parallell med vektoren fra massesenteret til normalkraftens angrepspunkt. Netto kraftmoment om massessenteret er da:

$$\tau_z = -Rf = -R\mu N_0$$

Newtons andre lov for rotasjonsbevegelse gir at:

$$\tau_z = I\alpha_z$$

vinkelakselerasjonen er derfor:

$$\alpha_z = \frac{\tau_z}{I}$$

Dette resultatet er kun gyldig så lange kula er i kontakt med underlaget. Da finner vi vinkelhastigheten ved å integrere vinkelakselerasjonen:

$$\omega(t) = \omega_0 + \int_0^t \alpha_z dt = \omega_0 + \int_0^t -\frac{R\mu N_0}{I} dt = \omega_0 - \frac{R\mu N_0}{I} t$$

Vi kan finne vinkelhastigheten etter kollisjonen ved å sette inn t_1 som vi fant ovenfor. (Du behøver ikke gjøre dette).

e) *Er energien til kula bevart gjennom kollisjonen? Spretter kula tilbake opp til høyden h etter kollisjonen? Begrunn svarene.*

Hastigheten v_{y1} til kula etter støtet ser vi er den samme som hastigheten til kula før støtet, men i motsatt retning. Kula vil derfor sprette like høyt opp igjen.

Hva med den horisontale bevegelsen? Vi kan prøve å regne ut den kinetiske energien til kula før og etter støtet, men det blir et meget omfattende regnestykke. I stedet kan vi innse at det virker en ikke-konservativ kraft – friksjonskraften – på kula, og den vil gjøre et arbeid som resulterer i en redusert totalenergi til kula. Energien er derfor ikke bevart.

Anta at kraften fra underlaget på kula er $N = k(R-y)^{3/2}$ *når kula er i kontakt med underlaget, det vil si når* $y < R$.

f) *Finn utrykk for akselerasjonene* a_x *og* a_y *til kula mens den er i kontakt med underlaget.*

Vi kan her benytte samme metode som ovenfor, men vi må erstatte normalkraften N_0 med normalkraften N gitt her. Da får vi:

$$a_y = \frac{N}{m} - g = \frac{k}{m}(R-y)^{\frac{3}{2}} - g$$

og

$$a_x = -\frac{f}{m} = -\frac{\mu N}{m} = -\frac{\mu k(R-y)^{\frac{3}{2}}}{m}$$

Disse uttrykkene gjelder når $y < R$.

g) *Finn et uttrykk for vinkelakselerasjonen* α_z *til kula mens den er i kontakt med underlaget.*

Vi kan også her benytte samme argument som tidligere. Vinkelakselerasjonen er da:

$$\alpha_z = \frac{\tau_z}{I} = -\frac{fR}{I} = -\frac{\mu NR}{I} = -\frac{\mu k(R-y)^{\frac{3}{2}}R}{I}$$

som gjelder når $y < R$.

h) *Skriv et program som finner posisjonene,* $x(t+\Delta t)$, $y(t+\Delta t)$, *hastighetene,* $v_x(t+\Delta t)$, $v_y(t+\Delta t)$, *og vinkelhastigheten,* $\omega(t+\Delta t)$, *til kula ved tiden* $t+\Delta t$ *gitt posisjonene, hastighetene og vinkelhastigheten ved tiden* t *mens kula er i kontakt med underlaget. Du behøver ikke skrive et fullstendig program, men kun den delen av programmet som finner nye posisjoner og hastigheter.*

```
ax(i) = (k/m)*(R-y(i)).^(1.5)-g;
ay(i) = -mu*(k/m)*(R-y(i)).^(1.5);
vx(i+1) = vx(i) + ax(i)*dt;
vy(i+1) = vy(i) + ay(i)*dt;
```

```
x(i+1) = x(i) + vx(i+1)*dt;
y(i+1) = y(i) + vy(i+1)*dt;
alphaz(i) = -mu*(k/I)*(R-y(i)).^(1.5);
t(i+1) = t(i) + dt;
```