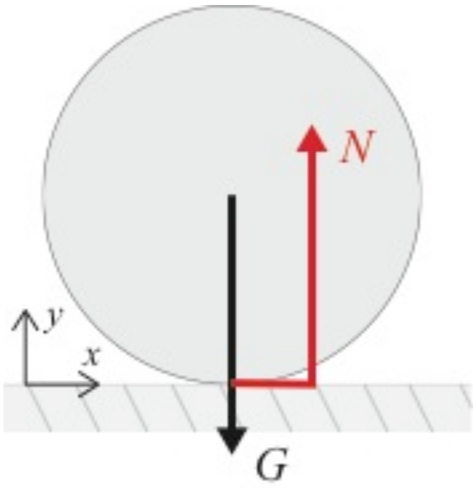
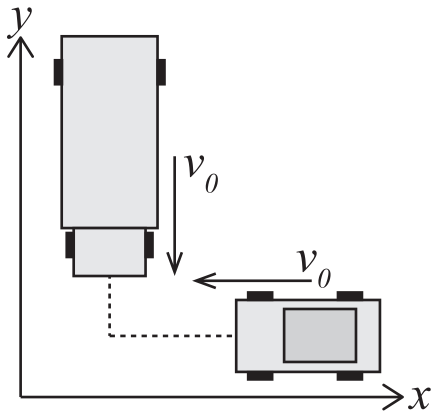
Løsningsforslag Fys-mek1110 V2012

Oppgave 1

a) *Et hjul ruller uten å skli bortover en flat, horisontal vei. Hjulet holder konstant hastighet. Tegn et frilegemediagram for hjulet.*



b) *En lastebil med masse M og en bil med masse m kolliderer og blir hengende fast i hverandre etter kollisjonen. Begge bilene har hastigheten v_0 før kollisjonen, men lastebilen og bilen kommer fra hver sin vei inn i et kryss slik at de treffer 90° på hverandre som vist i figuren. Hva blir hastigheten til bilene etter støtet?*



Vi antar at det ikke virker noen andre, ytre, horisontale krefter av betydning. Summer av ytre krefter i xy-planet er da null, og bevegelsesmengden er bevart.

Bevegelsesmengden før støtet er:

$$\overrightarrow{P_0} = -Mv_0\hat{\jmath} - mv_0\hat{\imath}$$

Etter støtet henger de sammen og har samme hastighet $\vec{v}$. Bevegelsesmengden er da

$$\overrightarrow{P_1} = (m + M)\vec{v}$$

Bevaring av bevegelsesmengde gir da:

$$\overrightarrow{P_0} = -Mv_0\hat{j} - mv_0\hat{\imath} = \overrightarrow{P_1} = (m+M)\vec{v}$$

og dermed

$$\vec{v} = -\frac{m}{m+M}v_0\hat{\imath} - \frac{M}{m+M}v_0\hat{j}$$

c) *(Denne oppgaven teller dobbelt). Ole sitter på en tribune og ser på en fotballkamp. Ole bruker en stoppeklokke han har i lommen og finner at kampen varer nøyaktig 90 minutter. Per har et raskt romskip som kjører i 90% av lyshastigheten. Per kjører forbi fotballbanen med romskipet idet kampen begynner og da starter Per stoppeklokken sin. Idet kampen slutter, stopper Per stoppeklokken. Vil stoppeklokken til Per vise det samme som klokken til Ole? Begrunn svaret.*

Vi kaller hendelsen at Ole starter stoppeklokken hendelse A og at Ole stopper stoppeklokken hendelse B. Vi kaller stemet til Ole system S og systemet til Per system S'. Systemet S' beveger seg i en hastighet $u = 0.9c$ langs x-aksen i system S. Hendelse A inntreffer da i (x_A, t_A) og hendelse B inntreffer i (x_B, t_B). Merk at hendelse A og hendelse B inntreffer på samme sted i systemet S, $x_A = x_B$.

Vi har nå to mulige tolkninger av hva som skjer. Tolkning 1 er at Per måler tiden på en klokke som befinner seg ved fotballbanen. Tolkning 2 er at Per måler tiden på en klokke han holder i hånden. Vi gir full uttelling til begge løsninger, men en løsning basert på tolkning 2 krever en presis beskrivelse av hendelsene.

Tolkning 1: Per måler tiden mellom de to hendelsene A og B i sitt system S'. Han måler da ikke tiden i samme punkt i systemet S', men tiden i punktene x_A' og $x_B{}'$. Fra Lorentz-transformasjonen finner vi at $t_B' = \gamma\left(t_B - \frac{u}{c^2}x_B\right)$ og $t_A' = \gamma\left(t_A - \frac{u}{c^2}x_A\right)$, som gir at $t_B' - t_A' = \gamma(t_B - t_A)$ fordi $x_B = x_A$.

Tolkning 2: Per måler tiden mellom de to hendelsene A og C i sitt system S'. Hendelse C er at han måler tiden på klokken som er i hans posisjon, som svarer til romskipets posisjon. Han måler tiden i det samme punktet $x_A' = x_C'$ i sitt system, men disse punktene er ikke de samme i systemet S. Men han stanser klokken idet kampen slutter i systemet S', dvs. han stanser klokken ved tiden $t_C' = t_B'$. For å finne ut hva klokken hans viser, er det derfor tilstrekkelig å finne $t_B' - t_A'$ og vi er tilbake til samme utregning som i tolkning 1.

Oppgave 2

Vi skal i denne oppgaven studere en elektrisk ladet nanopartikkel nær en overflate. Vi skal først studere problemet i en dimensjon og deretter i tre dimensjoner. I en dimensjon tenker vi oss at overflaten er plassert i $x = 0$. *Kraften fra overflaten på nanopartikkelen som er i posisjonen* x *er da gitt som:*

$$F(x) = \frac{U_0 b}{x^2} - \frac{U_0}{b}$$

hvor U_0 er en konstant med enhet energi og b er en konstant med enhet lengde. I denne modellen skyldes det første leddet frastøtende krefter fra overflaten på nanopartikkelen, og det andre leddet skyldes tiltrekkende krefter. (Denne modellen er en forenklet modell, og gir ikke nødvendigvis et realistisk bilde av en slik vekselvirkning). Nanopartikkelen har masse m. Du kan se bort fra andre krefter på nanopartikkelen.

a) *Vis at $U(x) = \frac{U_0 b}{x} + \frac{U_0 x}{b}$ er et potensial for kraften F.*

$U(x)$ er et potensial for $F(x)$ dersom $F(x) = -\frac{dU}{dx}$. Vi deriverer $U(x)$ og finner:

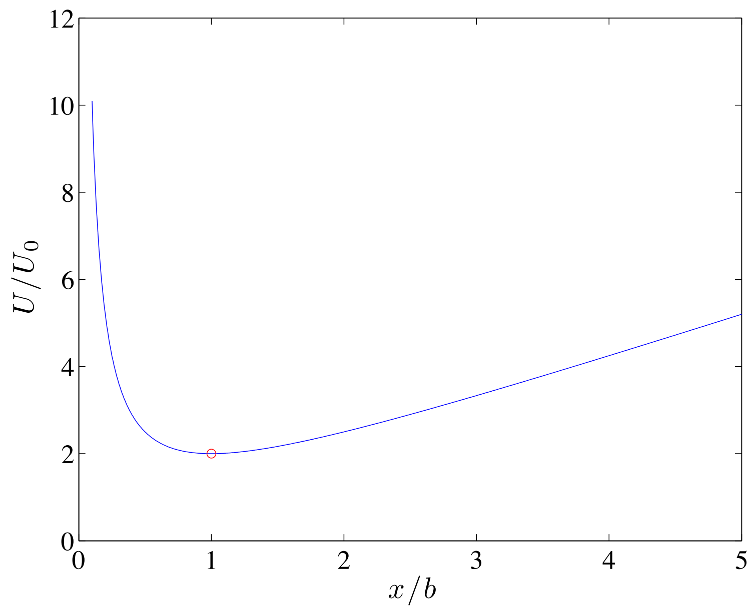
$$\frac{dU}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{U_0 b}{x} + \frac{U_0 x}{b}\right) = -\frac{U_0 b}{x^2} + \frac{U_0}{b}$$

og dermed er

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} = -\left(-\frac{U_0 b}{x^2} + \frac{U_0}{b}\right) = \frac{U_0 b}{x^2} - \frac{U_0}{b}$$

som var det vi skulle vise.

b) *Skisser $U(x)$, finn likevektspunktene, marker disse i diagrammet og karakteriser dem.*



Likevektspunktene er der hvor kraften er null, dvs. for $F(x) = \frac{U_0 b}{x^2} - \frac{U_0}{b} = 0$ som gir $x = b$. Dette er et stabilt likevektspunkt, siden det er et minimum for $U(x)$.

Anta at nanopartikkelen starter i ro ved $x = \frac{b}{2}$.

c) Hva er hastigheten til nanopartikkelen ved $x = b$?

Vi kan bruke energibevaring siden partikkelen kun er påvirket av en kraft, F, som er konservativ fordi den er utledet av et potensial U. Energibevaring gir at

$$E_0 = U\left(\frac{b}{2}\right) + K_0 = \frac{U_0 b}{(\frac{b}{2})} + \frac{U_0(\frac{b}{2})}{b} = 2U_0 + \frac{U_0}{2} = \frac{5}{2}U_0$$

hvor $K_0 = 0$ siden den starter i ro. I punktet $x = b$ er energien:

$$E_1 = U(b) + K_1 = \frac{U_0 b}{b} + \frac{U_0 b}{b} = 2U_0 + K_1$$

Energibevaring gir da at $E_0 = E_1$ som gir at $K_1 = \frac{1}{2}U_0$ og hastigheten i punktet $x = b$ er dermed $K_1 = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}U_0$ som gir at $v = \sqrt{U_0/m}$. Merk at begge fortegn er mulige løsninger.

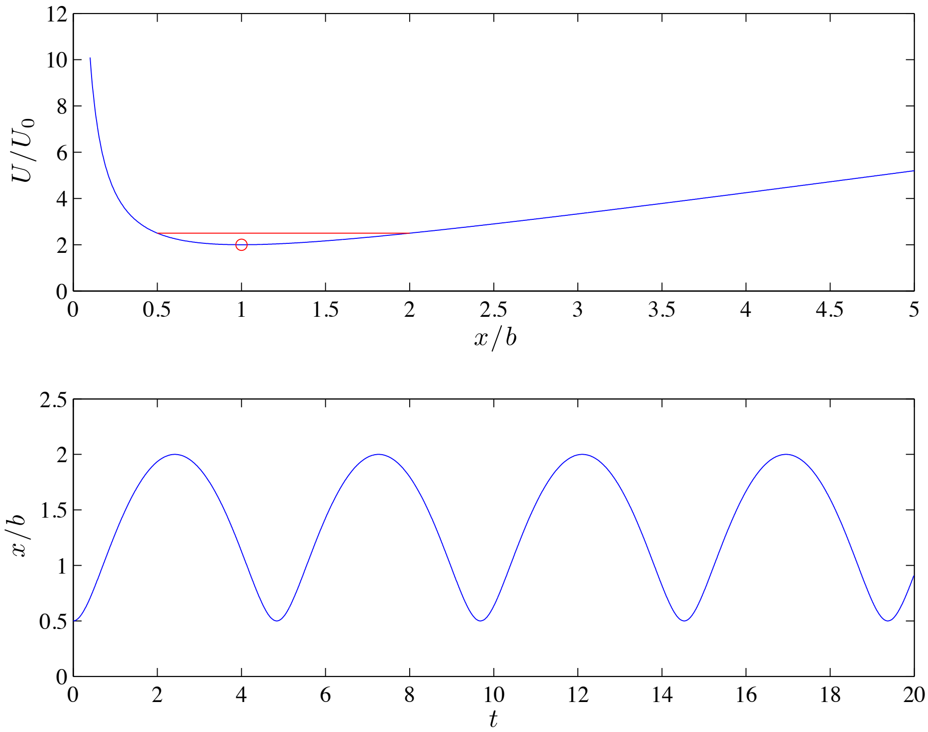
d) Hvor langt vekk kommer nanopartikkelen på det meste?

Vi kan bruke energibevaring med samme begrunnelse som i oppgave c). Partikkelen når den maksimale posisjonen når den kinetiske energien er null. Vi fant E_0 ovenfor, og setter nå $E_0 = E_2 = U(x) + K_2 = U(x)$ og finner x:

$$\frac{5}{2}U_0 = \frac{U_0 b}{x} + \frac{U_0 x}{b}$$

løsning av denne likningen gir $x = \frac{b}{2}$ og $x = 2b$. Den maksimale posisjonen er derfor $x = 2b$.

e) *Skisser bevegelsen $x(t)$ til partikkelen og skisser den tilsvarende bevegelsen i et energidiagram.*



f) *Skriv et program som finner posisjonen, $x(t)$, og hastigheten, $v(t)$, til nanopartikkelen. Det er tilstrekkelig å ta med integrasjonsløkken.*

```
m = 1.0;
U0 = 1.0;
b = 1.0;
time = 20.0;
dt = 0.01;
n = ceil(time/dt);
x = zeros(n,1);
v = zeros(n,1);
t = zeros(n,1);
x(1) = 0.5*b;
for i = 1:n-1
    F = U0*b/x(i)^2 -U0/b;
    a = F/m;
    v(i+1) = v(i) + a*dt;
    x(i+1) = x(i) + v(i+1)*dt;
    t(i+1) = t(i) + dt;
end
plot(t,x)
xlabel('t')
ylabel('x/b');
```

Vi skal nå se på bevegelsen til en nanopartikkel i tre dimensjoner. Nanopartikkelen befinner seg nær en kule med radius R og sentrum i origo. Vekselvirkningen mellom nanopartikkelen og kulen er beskrevet ved et potensiale:

$$U(r) = \frac{U_0 b}{r - R} + \frac{U_0 (r - R)}{b},$$

som gir kraften

$$\vec{F} = \frac{U_0 b}{(r - R)^2} \frac{\vec{r}}{r} - \frac{U_0}{b} \frac{\vec{r}}{r}$$

hvor $\vec{r} = (x, y, z)$ er posisjonen til nanopartikkelen og $r = |\vec{r}|$. Du kan anta at nanopartikkelen kun er påvirket av dette potensialet.

g) Skriv et program som finner posisjonen $\vec{r}(t)$ og hastigheten, $\vec{v}(t)$, for nanopartikkelen. Det er tilstrekkelig kun å ta med integrasjonsløkken.

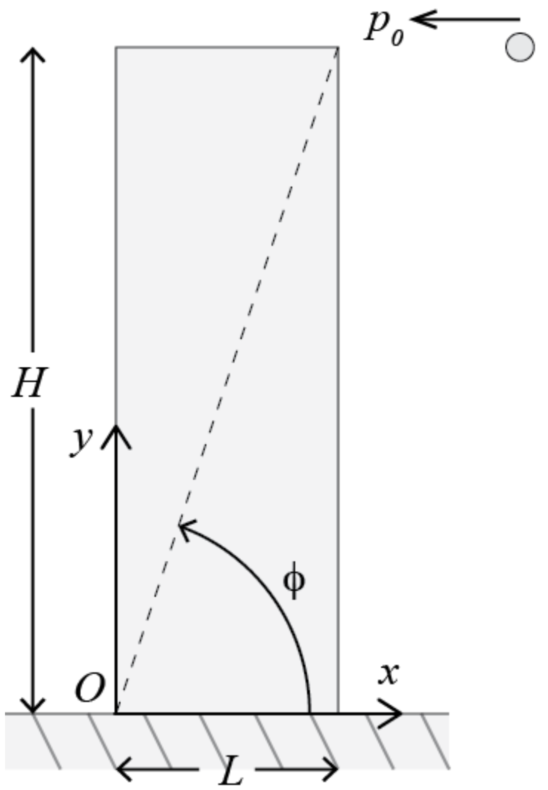
```
m = 1.0;
U0 = 1.0;
b = 1.0;
R = 1.0;
time = 500.0;
dt = 0.01;
n = ceil(time/dt);
r = zeros(n,3);
v = zeros(n,3);
t = zeros(n,1);
r(1,:) = [R+b 0 0];
v(1,:) = [0 1 0.2];
for i = 1:n-1
    rnorm = norm(r(i,:));
    Rr = R - rnorm;
    F = U0*b/Rr^2*r(i,:)/rnorm-U0/b*r(i,:)/rnorm;
    a = F/m;
    v(i+1,:) = v(i,:) + a*dt;
    r(i+1,:) = r(i,:) + v(i+1,:)*dt;
    t(i+1) = t(i) + dt;
end
figure(1)
plot(r(:,1),r(:,2))
xlabel('x/b')
ylabel('y/b');
axis equal
figure(2)
plot3(r(:,1),r(:,2),r(:,3));
```

h) Hvis nanopartikkelen starter i $r = R + b$, hvor stor må hastigheten være for at nanopartikkelen skal slippe fri fra overflaten og kunne bevege seg uendelig langt vekk?

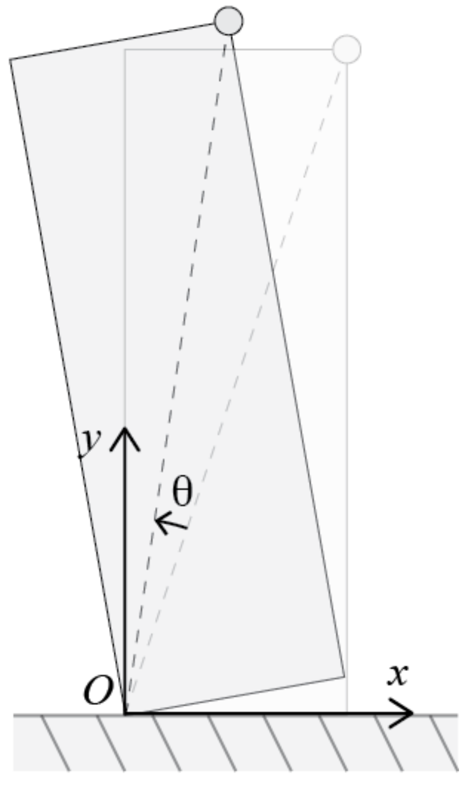
Den vil aldri kunne komme uendelig langt vekk. Vi kan tegne et tilsvarende energidiagram som i oppgave 1a, men i radiell retning. Partikkelen vil alltid være begrenset av potensialet som går mot uendelig når r går mot uendelig.

Oppgave 3

En kloss med lengde L, høyde H og masse M ligger på et horisontalt bord som illustrert i figuren under. En kule skytes inn i toppen av klossen. Kulen har en horisontal bevegelsesmengde p_0 umiddelbart før den treffer klossen. Etter kollisjonen blir kulen hengende fast inne i klossen. Massen til kulen er så liten at den ikke endrer massen, massesenteret eller treghetsmomentet til klossen. Du kan anta at klossen ikke sklir, men roterer om punktet O rett etter kollisjonen. Du kan se bort fra luftmotstand. Du kan anta at klossen ikke har rotert i løpet av kollisjonen.



Before



After

Treghetsmomentet om en akse gjennom massesenteret i z-retningen for en kloss med lengde L, høyde H og masse M er $I = \left(\frac{1}{12}\right) M(H^2 + L^2)$. *Du kan bruke vinkelen* $\phi = atan\left(\frac{H}{L}\right)$ *og* $R =$

$\sqrt{\left(\frac{H}{2}\right)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2}$ *for å forenkle svarene dine hvis du ønsker.*

a) Finn posisjonen til massesenteret til klossen.

Massesenteret befinner seg i det geometriske senteret til klossen, som er i posisjonen:

$$\vec{R} = \frac{L}{2}\hat{\imath} + \frac{H}{2}\hat{\jmath}$$

b) Finn treghetsmomentet, I_{Oz}, til klossen om en akse langs z-retningen om punktet O.

Treghetmomentet om massesenteret langs z-aksen er $I_{cm,z}$. Vi finner treghetmomentet om punktet O ved hjelp av parallell-akse teoremet. Avstanden fra massesenteret til punktet O er R. Da er treghetmomentet om punktet O langs z-aksen:

$$I_{O,z} = I_{cm,z} + MR^2$$

c) Finn vinkelhastigheten til klossen om punktet O umiddelbart etter kollisjonen.

I kollisjonen er ikke de ytre kreftene null, da det virker krefter i punktet O i både horisontal og vertikal retning. Men netto kraftmoment om punktet O er null, da kraftmomentet til gravitasjonskraften og normalkraften oppveier hverandre. Derfor er spinnet om punktet O bevart. Spinnet før kollisjonen er:

$$L_{O,z,0} = Hp_0$$

Spinnet umiddelbart etter kollisjonen er:

$$L_{O,z,1} = I_{O,z}\omega_1$$

hvor ω_1 er vinkelhastigheten til klossen om punktet O umiddelbart etter kollisjonen. Vi finner at

$$\omega_1 = \frac{Hp_0}{I_{O,z}}$$

d) Finn absoluttverdien til hastigheten til massesenteret til klossen umiddelbart etter kollisjonen.

Umiddelbart etter kollisjonen roterer hele legemet om punktet O med vinkelhastighet ω_1. Massesenteret følger derfor en sirkelbane med radius R. Hastigheten til massesenteret er

$$V = \omega_1 R$$

og retningen er normalt på linjen fra O til massesenteret.

e) *Hva blir det maksimale vinkelutslaget θ til klossen? (Det er tilstrekkelig å finne en likning som bestemmer den maksimale θ, du behøver ikke løse den.).*

Etter kollisjonen antar vi at klossen roterer om punktet O uten luftmotstand eller friksjon som motvirker rotasjonen. Kreftene som virker i punktet O gjør ikke noe arbeid fordi dette punktet ikke flytter seg. Den eneste kraften som gjør arbeid på klossen er gravitasjonskraften, og denne kraften er konservativ. Energien til klossen er derfor bevart. Energien umiddelbart etter kollisjonen er

$$E_1 = U_1 + K_1 = MgR\sin\phi + \frac{1}{2}I_{O,z}\omega_1^2$$

Energien når klossen har vinkelutslaget θ er

$$E_2 = U_2 + K_2 = MgR\sin(\phi + \theta) + \frac{1}{2}I_{O,z}\omega_2^2$$

Klossen har maksimalt vinkelutslag når vinkelhastigheten er null, dvs når $\omega_2 = 0$, som gir

$$E_1 = MgR\sin\phi + \frac{1}{2}I_{O,z}\omega_1^2 = E_2 = MgR\sin(\phi + \theta)$$

Slik at maksimal vinkel θ inntreffer når

$$MgR\sin(\phi + \theta) = MgR\sin\phi + \frac{1}{2}I_{O,z}\omega_1^2$$

$$\sin(\phi + \theta) = \sin\phi + \frac{I_{O,z}\omega_1^2}{2MgR} = \sin\phi + \frac{I_{O,z}H^2p_0^2}{2MgRI_{O,z}^2}$$

f) *Hvor stor kan p_0 være uten at klossen tipper over? Begrunn svaret.*

Klossen vil tippe idet massesenteret roterer forbi O, dvs. når $\phi + \theta > \frac{\pi}{2}$. Da vil gravitasjonskraften gi et positivt kraftmoment om O, og det vil ikke være noen krefter som gir et negativt kraftmoment, slik at klossen vil ha en positiv vinkelakselerasjon. Dette inntreffer altså når $\phi + \theta > \frac{\pi}{2}$, som gir betingelsen:

$$\sin(\phi + \theta) = 1 = \sin\phi + \frac{I_{O,z}H^2p_0^2}{2MgRI_{O,z}^2}$$

som gir en betingelse for p_0:

$$p_0^2 = (1 - \sin\phi)\frac{2MgRI_{O,z}}{H^2}$$

La oss nå anta at klossen ikke tipper over. Vi ser på bevegelsen etter kollisjonen.

g) *Vis at vinkelakselerasjonen til klossen om punktet O er*

$$\alpha = -\frac{R\, cos(\phi + \theta)\, Mg}{I_{Oz}}$$

når θ er positiv.

Vi finner vinkelakselerasjonen fra N2Lr om punktet O. Netto kraftmoment om punktet O er

$$\tau_{O,z} = -R\cos(\phi + \theta)\, Mg$$

siden det kun er gravitasjonskraften som bidrar – kreftene som virker i O har ikke noe kraftmoment om O siden avstanden fra O til punktet kraften virker i vil være null for disse kreftene.

Fra N2Lr finner vi vinkelakselerasjonen:

$$I_{O,z}\alpha = \tau_{O,z}^{net} == -R\cos(\phi + \theta)\, Mg$$

slik at

$$\alpha = -\frac{R\cos(\phi + \theta)\, Mg}{I_{Oz}}$$

som var det vi skulle vise.

Merk at dette uttrykket også viser at vinkelakselerasjonen blir null når $\phi + \theta = \frac{\pi}{2}$ og at den blir positiv når $\phi + \theta > \frac{\pi}{2}$.

h) *Tenk nøye gjennom den fysiske situasjonen, beskriv hva som skjer når θ blir negativ, og finn et uttrykk for vinkelakselerasjonen til klossen når θ er negativ.*

Klossen vipper først opp til en maksimal θ, deretter vipper den ned igjen, til den ligger helt flatt på underlaget. Den kolliderer med gulvet og spretter opp igjen, men nå vil den rotere om det andre hjørnet. Hvis vi antar at den bevarer energien i kollisjonen med gulvet, vil den ha samme vinkelhastighet om punktet P umiddelbart etter kollisjonen med gulvet. (Hvis du her har antatt en annen kollisjonsprosess, for eksempel en prosess som gir en reduksjon i vinkelhastighet etter kollisjonen er det greit). Den vil deretter rotere om P helt til den stopper opp, og vipper tilbake, og slik vel klossen fortsette å vippe. Vi finner vinkelakselerasjonen på samme måte som ovenfor når klossen roterer om punktet P, men den er nå avhengig av cos $(\phi - \theta)$:

$$\tau_{P,z} = R\cos(\phi - \theta)\, Mg$$

og dermed er vinkelakselerasjonen

$$\alpha = -\frac{R\cos(\phi - \theta)\, Mg}{I_{Pz}}$$

hvor treghetmomentet om P er det samme som om O, da klossen er symmetrisk.

Dersom du har valgt en annen fysisk tolkning av hva som skjer for negative θ, og du har innført en god modell basert på denne tolkningen, vil det også gi full uttelling. (For eksempel kan du ha antatt at klossen fortsetter å rotere om punktet O, men at den deformeres når den presses ned mot underlaget slik vi så i oblig 10. Dette vil også gi full uttelling både i denne og neste deloppgave).

i) Skriv et program som finner bevegelsen til klossen som funksjon av tiden. Det er tilstrekkelig å ta med integrasjonsløkken.

```
M = 1.0;
H = 1.0;
L = 0.5;
g = 9.8;
R = sqrt((H/2)^2+(L/2)^2);
phi = atan(H/L);
I = (1/12)*M*(H^2+L^2) + M*R^2;
time = 10.0;
dt = 0.0001;
n = ceil(time/dt);
theta = zeros(n,1);
omega = zeros(n,1);
t = zeros(n,1);
theta(1) = 0.0;
omega(1) = 1.0;
for i = 1:n-1
    if (theta(i)>0.0)
        tau = -R*cos(phi+theta(i))*M*g;
    else
        tau = R*cos(phi-theta(i))*M*g;
    end
    alpha = tau/I;
    omega(i+1) = omega(i) + alpha*dt;
    theta(i+1) = theta(i) + omega(i+1)*dt;
    t(i+1) = t(i) + dt;
end
plot(t(1:i),(theta(1:i)+phi)*2/pi);
xlabel('t')
ylabel('(\theta+\phi)/(\pi/2)');
```

***

Dette er siste ark i oppgavesettet. Lykke til med oppgavene!