UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

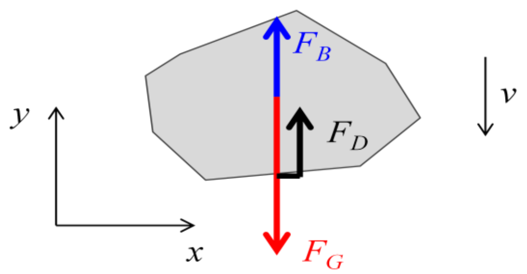
Eksamen i: FYS-MEK 1110
Eksamensdag: Onsdag, 5. juni 2013
Tid for eksamen: kl. 9:00 – 13:00
Oppgavesettet er på 3 sider
Vedlegg: formelark
Tillatte hjelpemidler:
Øgrim og Lian: *Størrelser og enheter i fysikk og teknikk* eller
Angell, Lian, Øgrim: *Fysiske størrelser og enheter: Navn og symboler*
Rottmann: *Matematisk formelsamling*
Elektronisk kalkulator av godkjent type.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.
Du må i oppgavene begrunne dine svar. Ubegrunnede svar gir liten uttelling.

Oppgave 1 (24 poeng)

En liten stein med masse m synker i havet. Du kan anta at det virker en konstant oppdriftskraft $\vec{F}_B$og en motstandskraft av type $\vec{F}_D = -D|\vec{v}|\vec{v}$, hvor D er en konstant.

a) Tegn et frilegemediagram for steinen og navngi kreftene. (2 poeng)



$\vec{F}_G = -mg\hat{j}$ Gravitasjonskraft

$\vec{F}_D = -D|\vec{v}|\vec{v}$ Motstandskraft

$\vec{F}_B = F_B\hat{j}$ Oppdriftskraft

Steinen synker i negativ y retning, motstandskraften virker derfor i positiv y retning.

b) Finn et uttrykk for akselerasjonen til steinen. (2 poeng)

$$\sum F_y = F_B + Dv^2 - mg$$

Newtons andre lov: $\sum F_y = ma_y$

$$a_y = \frac{F_B}{m} + \frac{D}{m}v^2 - g$$

c) Finn terminalhastigheten til steinen. (3 poeng)

Steinen rekker terminalhastigheten når $a_y = 0$

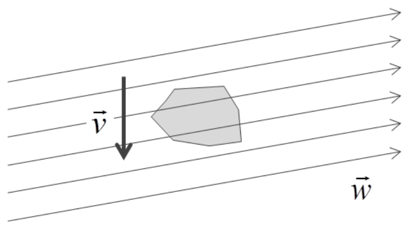
$$\frac{F_B}{m} + \frac{D}{m}v^2 - g = 0$$

$$v = \sqrt{\frac{mg - F_B}{D}}$$

Ved tiden $t = 0$ er steinen i ro og begynner å synke fra høyden h over havbunnen.

d) Skriv et program som finner den vertikale posisjonen til steinen som funksjon av tiden. Det er tilstrekkelig å ta med integrasjonsløkken. (5 poeng)

```
y = zeros(n,1);
v = zeros(n,1);
t = zeros(n,1);
y(1) = h;
v(1) = 0.0;
for i=1:n-1
    a = FB/m + D/m*v(i)^2 - g;
    v(i+1) = v(i) + dt*a;
    y(i+1) = y(i) + dt*v(i+1);
    t(i+1) = t(i) + dt;
end
plot(t,y);
```



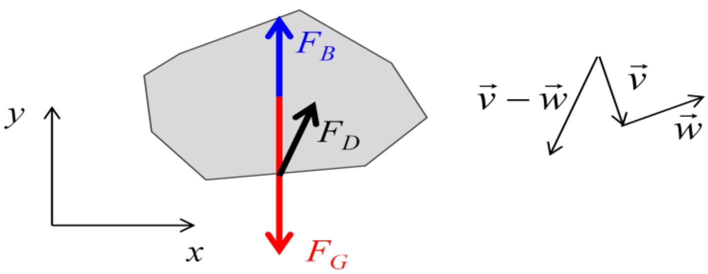
På stedet hvor steinen synker er det en havstrøm. Vannet beveger seg med konstant hastighet $\vec{w} = w_x\hat{\imath} + w_y\hat{\jmath} + w_z\hat{k}$.

e) Hvordan påvirker vannbevegelsen motstandskraften? Modifiser kraftmodellen for å ta hensyn til vannets hastighet. (3 poeng)

Motstandskraften er avhengig av relativhastigheten mellom steinen og vannet.

$$\vec{F}_D = -D|\vec{v} - \vec{w}|(\vec{v} - \vec{w})$$

f) Tegn et frilegemediagram for steinen i den nye situasjonen i havstrømmen. Angi også hastigheten til steinen og til vannet rundt steinen. (3 poeng)

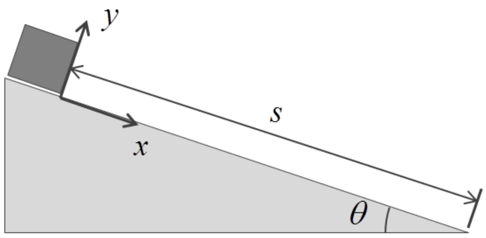


g) Modifiser programmet ditt for å beregne posisjonen til steinen når vannet beveger seg med konstant hastighet $\vec{w}$. Det er igjen tilstrekkelig å ta med integrasjonsløkken. (6 poeng)

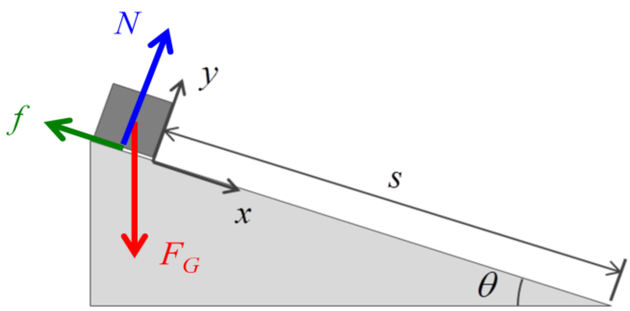
```
w = [wx wy wz];
r = zeros(n,3);
v = zeros(n,3);
t = zeros(n,1);
r(1) = [0.0 0.0 h];
v(1) = [0.0 0.0 0.0];
for i=1:n-1
    vrel = v(i,:) - w;
    a = FB/m - D/m*norm(vrel)*vrel - g;
    v(i+1,:) = v(i,:) + dt*a;
    r(i+1,:) = r(i,:) + dt*v(i+1,:);
    t(i+1) = t(i) + dt;
end
plot(r(:,1),r(:,3));
```

Oppgave 2 (16 poeng)

En kiste med masse m settes ned på et skråplan som har en helningsvinkel θ. Den statiske friksjonskoeffisienten mellom kisten og overflaten til skråplanet er μ_s, den dynamiske friksjonskoeffisienten er μ_d, hvor $\mu_d < \mu_s$. Vi antar først at kisten forblir i ro.



a) Tegn et frilegemediagram for kisten og uttrykk alle kreftene som virker på kisten ved hjelp av μ_s, m, g og θ. (4 poeng)



Gravitasjonskraft $\vec{F}_G$

Normalkraft $\vec{N}$

Friksjonskraft $\vec{f}$

$\vec{F}_G = mg\sin(\theta)\hat{\imath} - mg\cos(\theta)\hat{\jmath}$

Kisten beveger seg ikke i y retning: $\sum F_y = N - mg\cos(\theta) = ma_y = 0$

$$\vec{N} = mg\cos(\theta)\,\hat{\jmath}$$

Kisten beveger seg ikke i x retning: $\sum F_x = mg\sin(\theta) - f = ma_x = 0$

$$\vec{f} = -mg\sin(\theta)\,\hat{\imath}$$

b) Finn betingelsen for at kisten begynner å skli ned skråplanet. (4 poeng)

Den statiske friksjonskraften har maksimalverdien: $f \leq \mu_s N$

Kisten begynner å skli når $f = \mu_s N$.

$$mg\sin(\theta) = \mu_s mg\cos(\theta)$$

$$\tan(\theta) = \mu_s$$

Vi antar at betingelsen fra b) er oppfylt og kisten sklir ned skråplanet. Du kan se bort fra luftmotstanden.

c) Finn arbeidet som er gjort av friksjonskraften på kisten når den har sklidd ned en strekning s (målt langs skråplanet). (3 poeng)

Kisten beveger seg i positiv x retning mens kraften virker i negativ x retning. Nå må vi bruke den dynamiske friksjonskoeffisienten: $\vec{f} = -\mu_d mg\cos(\theta)\,\hat{\imath}$

$W_f = \int_0^s \vec{f}\cdot d\vec{r} = -\int_0^s \mu_d mg\cos(\theta)\,dx = -\mu_d mgs\cos(\theta)$

Friksjonskraften gjør negativ arbeid på kisten.

d) Finn den kinetiske energien og hastigheten til kisten når den har kommet til bunnen av skråplanet etter den har sklidd ned en strekning s. (5 poeng)

Arbeidet gjort av friksjonskraften er lik forskjellen i den mekaniske energien:

$$W_f = E_1 - E_0 = K_1 + U_1 - K_0 - U_0$$

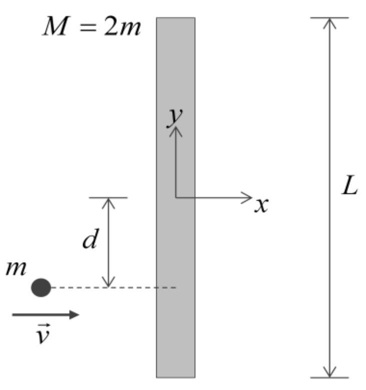
$$-\mu_d mgs\cos(\theta) = \frac{1}{2}mv^2 + 0 - 0 - mgs\sin(\theta)$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgs(\sin(\theta) - \mu_d\cos(\theta))$$

$$v = \sqrt{2gs(\sin(\theta) - \mu_d\cos(\theta))}$$

Oppgave 3 (18 poeng)

En kule med masse m skytes i en tynn, homogen stav med lengde L som ligger horisontalt på en friksjonsfri overflate. Staven har masse $M = 2m$. Kulen treffer på staven i rett vinkel med hastighet v i en avstand d fra midten av staven (se figuren). Kulen stoppes i staven og forblir der mens staven begynner å bevege seg. Tykkelsen av staven er ubetydelig i forhold til dens lengde. Du kan betrakte kulen som et punkt uten utstrekning. Stopptiden til kulen i staven er også neglisjerbar.



a) Finn massesenteret $\vec{R}$ til systemet som består av staven og kulen etter kulen blir sittende fast inne i staven. (3 poeng)

Vi bruker et koordinatsystem med origo i sentrum av staven som vist i figuren.

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{2m \cdot 0 - md\hat{j}}{2m + m} = -\frac{1}{3}d\hat{j}$$

b) Finn hastigheten $\vec{V}$ til massesenteret til systemet som består av staven og kulen etter kulen blir sittende fast inne i staven. (3 poeng)

Staven beveger seg uten friksjon. Det virker ingen krefter i horisontal retning. Normalkraften kompenserer gravitasjonskraften slik at nettokraften i vertikal retning er null. Siden den ytre nettokraften er null kan vi bruke bevaring av bevegelsesmengde.

$$m\vec{v} = (m + 2m)\vec{V}$$

$$\vec{V} = \frac{1}{3}\vec{v}$$

Treghetsmomentet til en tynn stav som roterer om sitt massesenter er $I = \frac{1}{12}ML^2$. Kulen treffer på staven i avstand $d = \frac{1}{4}L$ fra midten av staven.

c) Vis at treghetsmomentet til systemet som består av staven og kulen om massesenteret er $I_{cm} = \frac{10}{3}md^2$. (6 poeng)

Det totale treghetsmomentet er summen av treghetsmomentene til staven og til kulen om massesenteret som befinner seg i avstand $\frac{1}{3}d$ fra sentrum av staven og i avstand $\frac{2}{3}d$ fra kulen. Vi bruker parallelakseteoremet for å beregne treghetsmomentene om massesenteret.

Treghetsmoment til staven om felles massesenteret:

$$I_{s,cm} = \frac{1}{12}2mL^2 + 2m\left(\frac{1}{3}d\right)^2 = \frac{1}{6}m(4d)^2 + \frac{2}{9}md^2 = \frac{26}{9}md^2$$

Kulen betraktes som et punkt uten utstrekning. Det hele treghetsmomentet kommer derfor fra forskyvning av rotasjonssentrumet.

$$I_{k,cm} = 0 + m\left(\frac{2}{3}d\right)^2 = \frac{4}{9}md^2$$

$$I_{tot,cm} = I_{s,cm} + I_{k,cm} = \frac{26}{9}md^2 + \frac{4}{9}d^2 = \frac{10}{3}md^2$$

d) Finn vinkelhastigheten til systemet som består av staven og kulen om massesenteret og beskriv bevegelsen i ord. (6 poeng)

Siden det virker ingen ytre nettokraft, så er også det ytre kraftmoment null og spinn er bevart.

Spinn til kulen før kollisjonen: $\vec{l}_k = \vec{r}_k \times m\vec{v}_k = -\frac{2}{3}d\hat{j} \times mv\hat{\imath} = \frac{2}{3}dmv\hat{k}$

Spinn til systemet etter kollisjonen: $\vec{l}_{tot} = I_{tot,cm}\vec{\omega}$

$$\vec{\omega} = \frac{\vec{l}_k}{I_{tot,cm}} = \frac{\frac{2}{3}dmv}{\frac{10}{3}md^2}\hat{k} = \frac{v}{5d}\hat{k}$$

Massesenteret beveger seg med konstant hastighet i x retning. Samtidig roterer systemet med konstant vinkelhastighet om massesenteret.

Oppgave 4 (7 poeng)

Et pion π^+ oppstår i en kollisjon mellom høyenergetiske protoner i en partikkelakselerator. Etter det er skapt beveger pionet seg med konstant høy hastighet nær lysets hastighet før det henfaller. Et pion i sitt hvilesystem har levetiden τ. Finn hastigheten til pionet hvis du som observatør i laboratoriet detekterer henfallet i en avstand d fra kollisjonspunktet. Finn et uttrykk for hastigheten v som funksjon av avstanden d og konstantene τ og c.

Hendelse 1: pionet oppstår i kollisjonen, hendelse 2: pionet henfaller. Tidsperioden mellom de to hendelser er levetiden til pionet. I sitt hvilesystem S' er pionet i ro og levetiden er $\Delta t' = \tau$. I laboratoriesystemet S beveger pionet seg med hastighet v og levetiden er lenger på grunn av tidsdilatasjon: $\Delta t = \gamma \Delta t' = \gamma\tau$. I laboratoriesystemet S beveger pionet seg en strekning d mellom hendelse 1 og 2 og bruker en tidsperiode $\Delta t = \gamma\tau$ for denne strekningen. Hastigheten er derfor:

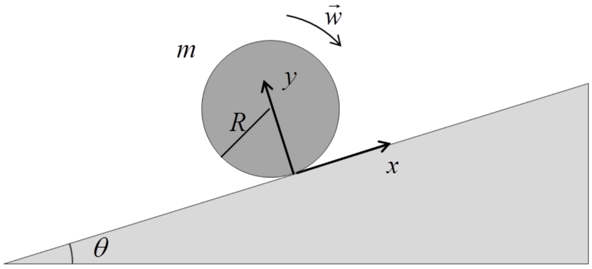
$$v = \frac{d}{\Delta t} = \frac{d}{\gamma\tau} = \frac{d}{\tau}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$v^2\tau^2 = d^2 - \frac{d^2}{c^2}v^2$$

$$v^2\left(\tau^2 + \frac{d^2}{c^2}\right) = d^2$$

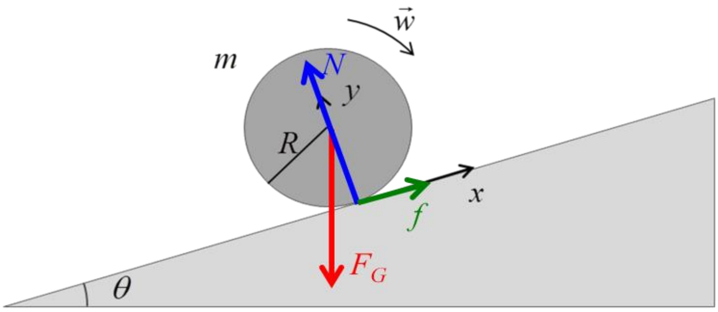
$$v = \frac{d}{\sqrt{\tau^2 + \frac{d^2}{c^2}}}$$

Oppgave 5 (26 poeng)



En sylinder som roterer om massesenteret sitt er satt ned på et skråplan med helningsvinkel θ. Sylinderen har masse m, radius R og treghetsmomentet om massesenteret er $I = \frac{1}{2}mR^2$. Vi definerer x aksen langs skråplanet som vist i figuren. Sylinderen roterer med klokken med en initial vinkelhastighet $\vec{\omega} = -\omega_0\hat{k}$. ($z$ aksen peker ut av papirplanet.) Den dynamiske friksjonskoeffisienten mellom sylinderen og overflaten til skråplanet er μ_d. Når den er satt ned på skråplanet ruller og sklir sylinderen samtidlig i en blandet bevegelse. I denne oppgaven er vi interessert i den første perioden fram til det blir en ren rullebevegelse. Du kan se bort fra luftmotstanden.

a) Tegn et frilegemediagram for sylinderen og uttrykk alle kreftene ved hjelp av m, g, μ_d, og θ. (3 poeng)



Gravitasjonskraft $\vec{F}_G$

Normalkraft $\vec{N}$

Friksjonskraft $\vec{f}$

Med koordinatsystem som vist i figuren:

$$\vec{F}_G = -mg\sin(\theta)\,\hat{\imath} - mg\cos(\theta)\,\hat{\jmath}$$

Ingen bevegelse i y retning: $\sum F_y = N - mg\cos(\theta) = ma_y = 0$

$$\vec{N} = mg\cos(\theta)\,\hat{\jmath}$$

Siden sylinderen roterer med klokken er friksjonskraften rettet i positiv x retning. Siden sylinderen sklir må vi bruke dynamisk friksjon:

$$\vec{f} = \mu_d N\hat{\imath} = \mu_d mg\cos(\theta)\,\hat{\imath}$$

b) Finn posisjonen til sylinderen som funksjon av tiden fra det øyeblikket sylinderen settes ned til den begynner å rulle uten å skli. (5 poeng)

Newtons andre lov i x retning:

$$\sum F_x = f - mg\sin(\theta) = \mu_d mg\cos(\theta) - mg\sin(\theta) = ma_x$$

$$a_x = \mu_d g\cos(\theta) - g\sin(\theta)$$

Akselerasjonen i x retning er konstant og vi integrerer:

$$v_x(t) - v_x(0) = \int_0^t a_x dt = (\mu_d\cos(\theta) - \sin(\theta))gt$$

Initialbetingelse: $v_x(0) = 0$

$$v_x(t) = (\mu_d\cos(\theta) - \sin(\theta))gt$$

Vi integrerer igjen for å finne posisjonen:

$$x(t) - x(0) = \int_0^t v_x(t)dt = (\mu_d \cos(\theta) - \sin(\theta))g \int_0^t t\,dt = \frac{1}{2}(\mu_d \cos(\theta) - \sin(\theta))gt^2$$

Initialbetingelse: $x(0) = 0$

$$x(t) = \frac{1}{2}(\mu_d \cos(\theta) - \sin(\theta))gt^2$$

c) Diskuter bevegelsen for forskjellige verdier for vinkelen θ. Hvordan beveger sylinderen seg hvis (i) $\tan\theta < \mu$, (ii) $\tan\theta > \mu$, (iii) $\tan\theta = \mu$? (3 poeng)

(i) $\tan\theta < \mu_d \;\Rightarrow\; \sin\theta < \mu_d \cos\theta \;\Rightarrow\; x(t) > 0$

Sylinderen beveger seg i positiv x retning opp på skråplanet. Det kan hende hvis vinkelen er liten eller friksjonskoeffisienten er stor.

(ii) $\tan\theta > \mu_d \;\Rightarrow\; \sin\theta > \mu_d \cos\theta \;\Rightarrow\; x(t) < 0$

Sylinderen sklir ned skråplanet i negativ x retning. Det hender hvis vinkelen er stor eller hvis friksjonskoeffisienten er liten.

(iii) $\tan\theta = \mu_d \;\Rightarrow\; \sin\theta = \mu_d \cos\theta \;\Rightarrow\; x(t) = 0$

Sylinderen roterer uten at massesenteret beveger seg. Dette gjelder bare så lenge sylinderen sklir og det virker en friksjonskraft som kompenserer komponenten av gravitasjonskraften ned langs skråplanet.

d) Finn vinkelhastigheten $\vec{\omega}$ til sylinderen som funksjon av tiden fra det øyeblikket sylinderen settes ned til den begynner å rulle uten å skli. Vær oppmerksom på rotasjonsretningen og retning av vinkelakselerasjonen. (6 poeng)

Gravitasjon angriper i massesenteret og gir ingen kraftmoment. Normalkraften er parallell med posisjonsvektoren til angrepspunktet og gir ingen kraftmoment. Bare friksjonskraften gir et kraftmoment:

$$\vec{\tau} = -R\hat{j} \times f\hat{\imath} = Rf\hat{k} = \mu_d mgR\cos(\theta)\,\hat{k}$$

Spinnsats: $\vec{\tau} = I\vec{\alpha}$

$$\vec{\alpha} = \frac{\vec{\tau}}{I} = \frac{\mu_d mgR\cos(\theta)}{\frac{1}{2}mR^2}\hat{k} = \frac{2\mu_d g\cos(\theta)}{R}\hat{k}$$

Vi integrerer for å finne vinkelhastigheten:

$$\vec{\omega}(t) - \vec{\omega}(0) = \int_0^t \vec{\alpha}dt = \frac{2\mu_d g\cos(\theta)}{R}t\hat{k}$$

Initialbetingelse: $\vec{\omega}(0) = -\omega_0\hat{k}$

$$\vec{\omega}(t) = \left(-\omega_0 + \frac{2\mu_d g\cos(\theta)}{R}t\right)\hat{k}$$

Vinkelhastigheten blir mindre over tiden på grunn av friksjon.

e) Vi betrakter en situasjon hvor $\tan\theta \leq \mu$. Vis at tiden det tar for sylinderen å rulle uten å skli er $t_r = \frac{\omega_0 R}{3\mu g\cos(\theta) - g\sin(\theta)}$. Vær igjen oppmerksom på at sylinderen roterer i negativ z-retning. (6 poeng)

Siden $\tan\theta \leq \mu$ beveger sylinderen seg oppover på skråplanet med positiv hastighet $v_x \geq 0$. Sylinderen roterer med klokken (i negativ z retning). Vi kan derfor formulere rullebetingelse som:

$$v_x = -R\omega$$

Vi setter inn resultatene fra b) og d) for å finne tiden t_r når sylinderen begynne å rulle uten å skli:

$$(\mu_d\cos(\theta) - \sin(\theta))gt_r = -R\left(-\omega_0 + \frac{2\mu_d g\cos(\theta)}{R}t_r\right)$$

$$(3\mu_d\cos(\theta) - \sin(\theta))gt_r = R\omega_0$$

$$t_r = \frac{R\omega_0}{3\mu_d g\cos(\theta) - g\sin(\theta)}$$

f) Ved hvilken vinkelhastighet begynner sylinderen å rulle uten å skli hvis $\tan\theta = \mu$? Diskuter bevegelsen i dette tilfellet. (3 poeng)

I dette tilfelle er $\mu_d\cos(\theta) = \sin(\theta)$ og

$$t_r = \frac{R\omega_0}{2\mu_d g\cos(\theta)}$$

Denne tiden setter vi inn i resultatet fra d)

$$\vec{\omega}(t_r) = \left(-\omega_0 + \frac{2\mu_d g\cos(\theta)}{R}\frac{R\omega_0}{2\mu_d g\cos(\theta)}\right)\hat{k} = 0$$

Sylinderen roterer uten at massesenteret beveger seg opp eller ned skråplanet. På grunn av friksjonen blir vinkelhastigheten mindre og på tiden t_r er sylinderen fullstendig i ro. Etterpå vil sylinderen rulle ned skråplanet.

***

Dette er siste ark i oppgavesettet. Lykke til med oppgavene!