UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: FYS-MEK 1110
Eksamensdag: 16 mars 2016
Tid for eksamen: 15:00 – 18:00 (3 timer)
Oppgavesettet er på 4 sider
Vedlegg: Formelark
Tillatte hjelpemidler:
Øgrim og Lian: *Størrelser og enheter i fysikk og teknikk* eller
Angell, Lian, Øgrim: *Fysiske størrelser og enheter: Navn og symboler*
Rottmann: *Matematisk formelsamling*
Elektronisk kalkulator av godkjent type.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.
Husk å forklare hvordan du løser problemene og begrunn svarene dine.

Oppgave 1 (7 poeng)

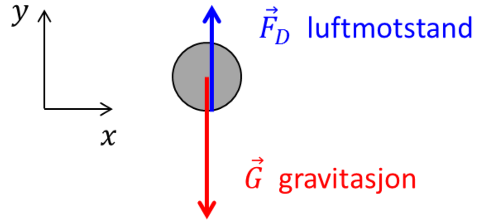
En planet beveger seg i en lukket bane rundt en stjerne.

a. Banen er sirkulær og farten langs banen er konstant. Hva er nettobeløpet av arbeid som stjernens gravitasjonskraft gjør på planeten etter en full omdreiing: positiv, negativ eller null? Forklar svaret ditt! (3 poeng)
Den eneste kraften som virker på planeten er gravitasjon. Kraften er rettet mot stjernen og står alltid vinkelrett på bevegelsesretning. Gravitasjonskraften gjør derfor ingen arbeid.
b. Hva hvis banen er elliptisk og farten til planeten endrer seg langs banen? Beskriv arbeid som stjernens gravitasjonskraft gjør på planeten langs banen. (4 poeng)
Gravitasjonskraften fra stjernen gjør negativ arbeid på planeten mens planeten fjerner seg fra stjernen, men arbeidet er positiv når avstanden blir mindre igjen. Gravitasjonskraften er konservativ. Derfor er arbeid uavhengig av veien, og når planeten kommer tilbake til det samme utgangspunktet etter en full omløp er nettoarbeid null.

Oppgave 2 (7 poeng)

Du slipper en ball med masse m fra en høy bygning. Vi kan beskrive luftmotstandskraften som $\vec{F}_D = -D|\vec{v}|\vec{v}$. Tyngdens akselerasjon er g.

a. Tegn et frilegeme diagram og navngi alle krefter. (3 poeng)



b. Vi antar at bygningen er så høy at ballen oppnår terminalhastigheten. Finn et uttrykk for terminalhastigheten. (4 poeng)

Newtons andre lov: $\sum \vec{F} = \vec{F}_D + \vec{G} = -D|\vec{v}|\vec{v} - mg\hat{\jmath} = m\vec{a}$

Ballen faller i negativ y retning: $\vec{v} = -v\hat{\jmath}$

Ballen oppnår terminalhastigheten når luftmotstandskraften kompenserer gravitasjon slik at nettokraften og akselerasjonen er null: $v^2\hat{\jmath} - mg\hat{\jmath} = m\vec{a} = \vec{0}$

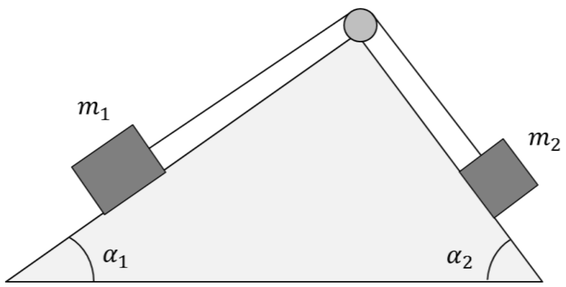
$$Dv^2 = mg$$

$$v = \pm\sqrt{\frac{mg}{D}}$$

Ballen faller nedover: $\vec{v} = -\sqrt{\frac{mg}{D}}\hat{\jmath}$

Oppgave 3 (14 poeng)

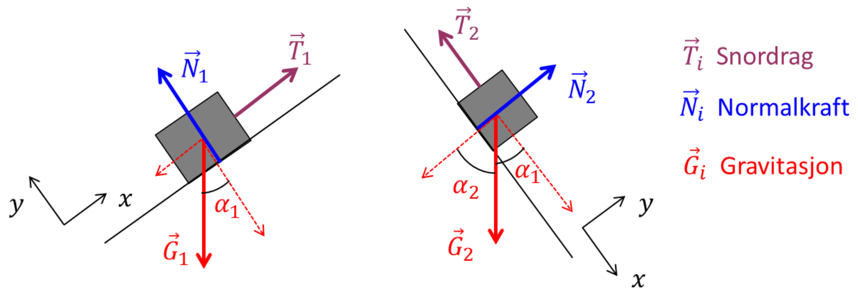
To klosser med masse m_1 og m_2 står på hver sin side av en rettvinklet trekant som vist i figuren. Klossene er knyttet sammen med en tynn, masseløs snor som går over en masseløs trinse. Vi antar at det er ingen friksjon mellom klossene og overflaten, og at trinsen også er uten friksjon.



Skråplanene står i rett vinkel på hverandre, slik at $\alpha_2 = 90° - \alpha_1$.

Tipp: $\sin(90° - \alpha_1) = \cos\alpha_1$.

a. Tegn et frilegeme diagram separat for begge klossene. (4 poeng)



b. Vis at betingelsen for at systemet ikke beveger seg er: (5 poeng)

$$\frac{m_2}{m_1} = \tan \alpha_1$$

Klossene er knyttet samen slik at den ene går opp når den andre går ned og omvendt. Vi velger koordinatsystemer slik at bevegelsen er i positiv x retning når kloss 1 går opp og kloss 2 ned. Snordraget er den samme for begge klossene: $|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2|$, og begge klossene har samme akselerasjon langs planet: $a_1 = a_2 = a$.
Vi bruker Newtons andre lov for begge klossene i x retning:

$$T_1 - m_1 g \sin \alpha_1 = m_1 a$$
$$m_2 g \sin \alpha_2 - T_2 = m_2 a$$

Vi adderer ligningene: $m_2 g \sin \alpha_2 - m_1 g \sin \alpha_1 = (m_1 + m_2) a$
Betingelsen at systemet ikke beveger seg er $a = 0$, og vi bruker at $\sin \alpha_2 = \cos \alpha_1$:

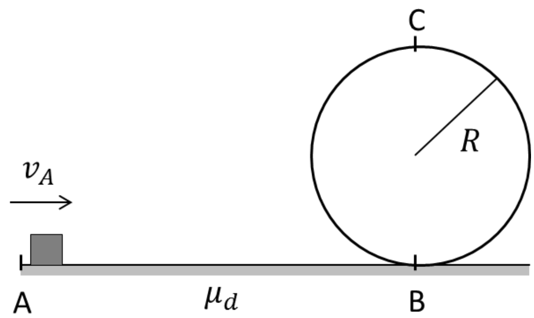
$$m_2 g \cos \alpha_1 - m_1 g \sin \alpha_1 = 0$$
$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{\sin \alpha_1}{\cos \alpha_1} = \tan \alpha_1$$

c. Finn akselerasjonen til klossene. Du kan se bort fra luftmotstanden. (5 poeng)
Uten friksjon og luftmotstand virker de samme kreftene som i det statiske tilfelle. Vi bruker resultatet fra b:

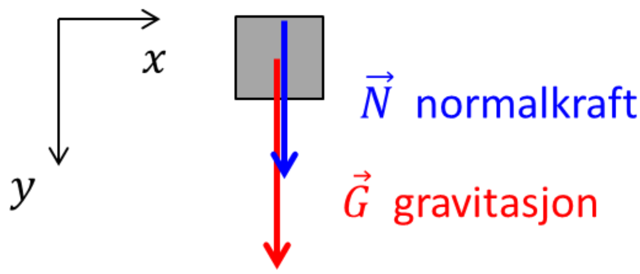
$$a = \frac{m_2 g \sin \alpha_2 - m_1 g \sin \alpha_1}{(m_1 + m_2)} = \frac{m_2 \cos \alpha_1 - m_1 \sin \alpha_1}{(m_1 + m_2)} g$$

Oppgave 4 (16 poeng)

En kloss beveger seg langs en horisontal flate fra A til B og etterpå gjennom en looping med radius R. Avstanden mellom punktene A og B er s. Den dynamiske friksjonskoeffisienten mellom kloss og flate er μ_d. Mens klossen beveger seg gjennom loopingen er friksjon neglisjerbart. Vi ser også bort fra luftmotstanden. Klossen starter i punkt A med fart v_A.



a. Tegn et frilegeme diagram for klossen på toppen av loopingen i punkt C. (3 poeng)



b. Hvor stor må farten v_C i punkt C på toppen minst være for at klossen forblir i kontakt med loopingen? (4 poeng)

Newtons andre lov i y retning: $+mg = ma$

For at klossen holder sirkelbanen i loopingen kreves en sentripetalakselerasjon:

$$a = \frac{v_C^2}{R}$$

Vi finner normalkraften: $= m\left(\frac{v_C^2}{R} - g\right)$

Klossen forblir i kontakt med loopingen hvis: ≥ 0

$$\frac{v_C^2}{R} - g \geq 0$$

$$v_C \geq \sqrt{gR}$$

c. Hvor stor må farten v_B in punkt B nederst i loopingen minst være for at klossen fullfører loopingen? (4 poeng)

Uten friksjon og luftmotstand er gravitasjon den eneste kraften som virker på klossen i loopingen. Gravitasjon er konservativ og vi kan bruke bevaring av energi mellom punktene B og C:

$$K_B + U_B = K_C + U_C$$

Vi legger nullpunktet for den potensielle energien til høyden i punkt B:

$$\frac{m}{2}v_B^2 + 0 = \frac{m}{2}v_C^2 + 2mgR$$

$$v_C^2 = v_B^2 - 4gR$$

Vi kjenner den minste farten i punkt C:

$$v_C^2 = v_B^2 - 4gR \geq gR$$

$$v_B \geq \sqrt{5gR}$$

d. Hvor stor må farten v_A i punkt A være for at klossen fullfører loopingen? (5 poeng)

Det virker dynamisk friksjon på klossen mellom punktene A og B: $= -\mu_d N$, hvor kraften er rettet mot bevegelsesretning. Vi finner normalkraften fra Newtons andre lov i vertikal retning: $-mg = 0$. Vi beregner arbeidet som friksjonskraften gjør mellom punktene A og B:

$$W_f = \int_{x_A}^{x_B} f\,dx = -\mu_d mg \int_{x_A}^{x_B} dx = -\mu_d mg(x_B - x_A) = -\mu_d mgs$$

Gravitasjon og normalkraft er vinkelrett på bevegelsesretning og gjør ingen arbeid. Bare friksjonskraften gjør arbeid. Vi bruker arbeid-energi teoremet: $W_f = K_B - K_A$

$$-\mu_d mgs = \frac{m}{2}v_B^2 - \frac{m}{2}v_A^2$$

$$v_B^2 = v_A^2 - 2\mu_d gs$$

Vi kjenner den minste farten i punkt B:

$$v_B^2 = v_A^2 - 2\mu_d gs \geq 5gR$$

$$v_A \geq \sqrt{5gR + 2\mu_d gs}$$

Uttrykk svarene som funksjon av radius R, tyngdeakselerasjon g, friksjonskoeffisient μ_d og strekningen s.

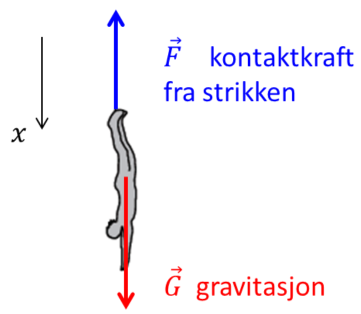
Oppgave 5 (20 poeng)

I denne oppgaven skal vi studere en person som hopper strikk. Strikken oppfører seg som en ideell fjær med fjærstivhet k når den blir strukket, men den har ingen styrke når den blir dyttet sammen. Strikkens likevektslengde er d. Det er også en viss demping i strikken som vi modellerer som en kraft som er avhengig av hastigheten strikken deformeres med. Når strikken er strukket til en lengde x, og strikken strekkes med den momentane hastigheten v, er kraften fra strikken gitt som:

$$F(x,v) = \begin{cases} -k(x-d) - c_v v & x > d \\ 0 & x \leq d \end{cases},$$

hvor v_c er en konstant som beskriver dempingen i tauet, og k er fjærstivheten. Vi legger nullpunktet for høyden der strikken er festet til bruen og regner positiv retning nedover. Personen starter fra $x = 0$ uten initialhastighet. Du kan se bort fra luftmotstanden og du kan anta at strikken er masseløs. Bevegelsen er kun vertikal. Tyngdens akselerasjon er g.

a. Tegn et frilegemediagram for personen når strikken er stram. (3 poeng)



b. Finn et uttrykk for høyden hvor personen blir hengende når bevegelsen har stanset. (4 poeng)

Newtons andre lov: $-k(x-d) - c_v v = ma$

Når bevegelsen har stanset er: $a = 0$ og $v = 0$

$$mg - k(x-d) = 0$$

$$x = d + \frac{mg}{k}$$

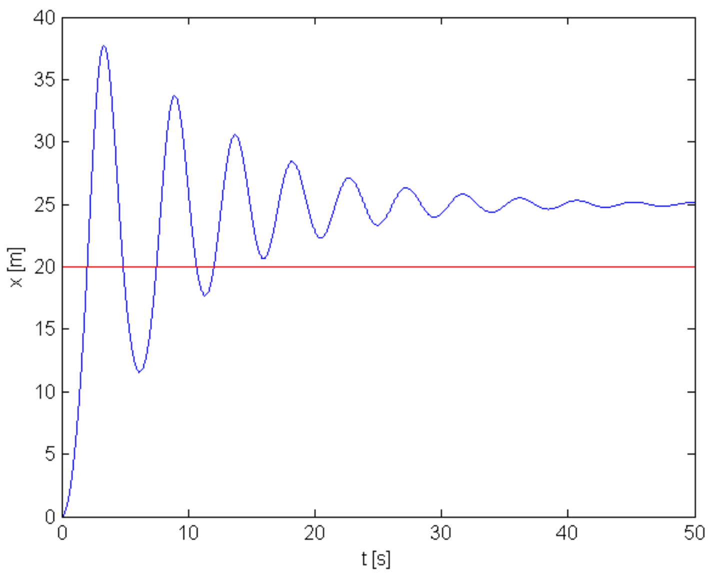
c. Skriv et program som finner posisjonen og hastigheten til personen som en funksjon av tid. Det er tilstrekkelig å ta med integrasjonsløkken. (5 poeng)

```
% Integration loop
for i = 1:n-1
  if (x(i)>d)
      F = m*g-k*(x(i)-d) - cv*v(i);
  else
      F = m*g;
  end
  a(i) = F/m;
  v(i+1) = v(i) + a(i)*dt;
  x(i+1) = x(i) + v(i+1)*dt;
  t(i+1) = t(i) + dt;
end
```

d. Figuren nedenfor viser resultatet av en simulering av et strikkhopp med denne modellen for en strikk med lengden $d = 20$ m og en person med $m = 70$ kg. Forklar resultatet. Gi et estimat for fjærkonstanten k brukt i simuleringen. (4 poeng)
Vi har definert koordinatsystemet slik at vi måler posisjonen ned fra broen. Personen faller ned og etter strikken er stram bremser kraften fra strikken bevegelsen. Kraften F blir større enn gravitasjonskraften og akselerer personen oppover. Bevegelsesretningen snur cirka 38 meter under broen. På grunn av den hastighetsavhengige delen er kraften ikke konservativ og personen kommer ikke opp til den samme høyden igjen. Når strikken ikke er stram beveger personen seg i fritt fall igjen. Personen svinger opp og ned i en dempet svingning og bevegelsen stanser ved $x_1 \approx 25$ m under broen. Denne informasjonen kan vi bruke til sammen med resultatet fra oppgave b for å estimere fjærkonstanten:

$$k = \frac{mg}{(x_1 - d)} = \frac{70\ \mathrm{kg} \cdot 9.81\ \mathrm{m/s^2}}{25\ \mathrm{m} - 20\ \mathrm{m}} \approx 137\ \mathrm{N/m}$$

e. Er systemet konservativt gjennom hele bevegelsen, i deler av bevegelsen, eller ikke i det hele tatt? Begrunn svaret. (4 poeng)
Når strikken er stram er kraften fra strikken på personen hastighetsavhengig og dermed ikke konservativ. Siden vi ser bort fra luftmotstanden er gravitasjon den eneste kraften som virker når strikken ikke er stram. Bevegelsen er konservativ bare i denne delen av bevegelsen. Den ikke konservative delen av kraften er årsak til dempningen.

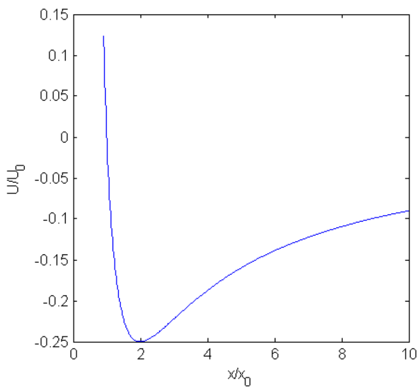


Oppgave 6 (16 poeng)

En partikkel med masse m beveger seg i en dimensjon.
Den potensielle energien til partikkelen kan beskrives som

$$U(x) = U_0\left(\left(\frac{x_0}{x}\right)^2 - \frac{x_0}{x}\right),$$

hvor U_0 og x_0 er positive konstanter og posisjonen x kan bare ta positive verdier. Potensialfunksjonen er plottet i figuren.



a. Finn kraften som virker på partikkelen i posisjon x.
(4 poeng)
Vi finner kraften ved å derivere potensialfunksjonen: $= -\frac{dU}{dx}$

$$F = -\frac{d}{dx}\left(U_0 x_0^2 x^{-2} - U_0 x_0 x^{-1}\right) = 2U_0 x_0^2 x^{-3} - U_0 x_0 x^{-2} = U_0\left(\frac{2x_0^2}{x^3} - \frac{x_0}{x^2}\right)$$

b. Vis at kraften på partikkelen i posisjon $x = 2x_0$ er null. (4 poeng)
Vi bruker resultat fra a) og setter inn:

$$F = \frac{U_0 x_0}{x^2}\left(\frac{2x_0}{x} - 1\right) = \frac{U_0 x_0}{(2x_0)^2}\left(\frac{2x_0}{2x_0} - 1\right) = 0$$

Ved tid $t = t_0$ er partikkelen i ro i posisjon $x = x_0$.

c. Finn farten til partikkelen ved posisjon $x = 2x_0$. (4 poeng)
Kraften er konservativ siden det finnes en potensialfunksjon. Vi kan derfor bruke energibevaring: $(x_0) + K(x_0) = U(2x_0) + K(2x_0)$

$$U_0\left(\left(\frac{x_0}{x_0}\right)^2 - \frac{x_0}{x_0}\right) + 0 = U_0\left(\left(\frac{x_0}{2x_0}\right)^2 - \frac{x_0}{2x_0}\right) + \frac{m}{2}v^2$$

$$0 + 0 = U_0\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) + \frac{m}{2}v^2 = -\frac{U_0}{4} + \frac{m}{2}v^2$$

$$v = \pm\sqrt{\frac{U_0}{2m}}$$

d. Hvor langt kan partikkelen beveger seg? (4 poeng)
I posisjon x_0 er den potensielle energien $U(x_0) = 0$. For $x > x_0$ er $U(x) < 0$.
Partikkelen beveger seg så lenge til den potensielle energien er null igjen.
Vi har $U(x) = 0$ for $x = x_0$ eller for $x \to \infty$. Partikkelen beveger seg bort mot uendelig.

***

Dette er siste ark i oppgavesettet. Lykke til med oppgavene!