UNIVERSITETET I OSLO

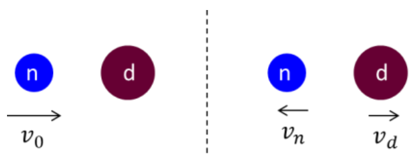
Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: FYS-MEK 1110
Eksamensdag: 22 mars 2017
Tid for eksamen: 14:30 – 17:30 (3 timer)
Oppgavesettet er på 4 sider
Vedlegg: Formelark
Tillatte hjelpemidler:
Øgrim og Lian: *Størrelser og enheter i fysikk og teknikk* eller
Angell, Lian, Øgrim: *Fysiske størrelser og enheter: Navn og symboler*
Rottmann: *Matematisk formelsamling*
Elektronisk kalkulator av godkjent type.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.
Husk å forklare hvordan du løser problemene og begrunn svarene dine.

Oppgave 1 (8 poeng)

I tungtvannsmodererte kjernereaktorer kolliderer nøytroner på masse $m_p = 1$ u med deuteroner på masse $m_d = 2$ u (hvor u er enheten for massen til et atom). I en slik reaktor kolliderer et nøytron som har hastighet v_0 frontal og elastisk med et deuteron som er i ro.



a. Hva er hastigheten til nøytronet, uttrykt som en brøkdel av den opprinnelige hastigheten, etter kollisjonen? (5 poeng)

Kollisjon er kortvarig og ytre krefter som gravitasjon er liten i forhold til de indre kreftene mellom nøytronet og deuteronet. Derfor er bevegelsesmengde under kollisjonen bevart:

$$mv_0 = mv_n + 2mv_d$$

$$v_d = \frac{v_0 - v_n}{2} \qquad (1)$$

Vi antar at kollisjonen er elastisk og bruker bevaring av energi:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_n^2 + mv_d^2$$

$$v_d^2 = \frac{v_0^2 - v_n^2}{2} = \frac{(v_0 - v_n)(v_0 + v_2)}{2} \qquad (2)$$

Vi deler ligning (2) på ligning (1):

$$v_d = v_0 + v_n \qquad (3)$$

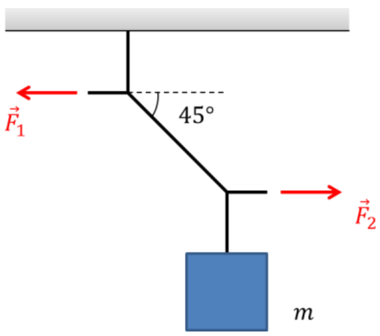
Vi sammenligner (1) og (3):

$$\frac{v_0 - v_n}{2} = v_0 + v_n$$
$$3v_n = -v_0$$
$$v_n = -\frac{1}{3}v_0$$

b. Hvor mye kinetisk energi, uttrykt som en brøkdel av den opprinnelige kinetiske energien, har nøytronet igjen etter kollisjonen? (3 poeng)

$$E_n = \frac{1}{2}mv_n^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{v_0}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}E_0$$

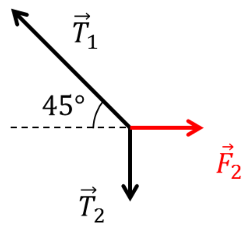
Oppgave 2 (6 poeng)



En eske med masse m henger i en masseløs strikk fra taket. To krefter, F_1 og F_2, virker på strikken i en viss avstand i motsatt retning slik at en del av strikken er diagonal med vinkel 45°, som vist i figuren.

a. Finn snordraget i den diagonale delen av strikken. (3 poeng)
Snordraget i nederste delen av strikken kompenserer vekten til esken: $T_2 = mg$. Vi tegner et frilegemediagram for den nedre knuten hvor kraften F_2 angriper. Vi dekomponerer snordraget T_1 og bruker Newtons andre lov i vertikal retning:

$$T_1 \sin 45° = T_2 = mg$$
$$T_1 = \frac{mg}{\sin 45°}$$



b. Hvor stor må kreftene F_1 og F_2 være for å holde systemet i denne posisjonen? (3 poeng)
Vi bruker Newtons andre lov for den nedre knuten i horisontal retning:

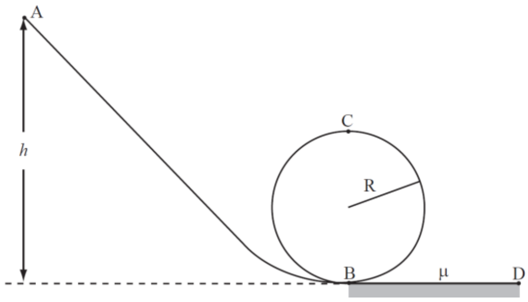
$$F_2 = T_1 \cos 45° = \frac{mg}{\sin 45°}\cos 45° = mg$$

Tilsvarende for den øvre knuten i horisontal retning:

$$F_1 = T_1 \cos 45° = mg$$

Oppgave 3 (15 poeng)

En blokk glir ned langs en rampe og deretter gjennom en loop med radius R. Etter loopen stanser blokken i punkt D på et grovt horisontalt bord. Blokken starter i ro ved punkt A i høyde h over bordet. Friksjon på rampen og i loopen er neglisjerbart. Den dynamiske friksjonskoeffisient mellom blokken og det horisontale bordet er µ.



a. Finn farten v_B av blokken ved punkt B før den går rundt loopen. (3 poeng)

Uten friksjon virker bare gravitasjon og energi er bevart: $U_A + K_A = U_B + K_B$

$$gmh + 0 = 0 + \frac{m}{2} v_B^2$$
$$v_B = \sqrt{2gh}$$

b. Finn farten v_C ved punkt C. (3 poeng)

Energi er fortsatt bevart:

$$U_A + K_A = U_C + K_C$$
$$mgh + 0 = 2mgR + \frac{m}{2} v_C^2$$
$$v_C = \sqrt{2g(h - 2R)}$$

c. Hva er betingelsen for farten v_C slik at blokken holder kontakt med loopen? (3 poeng)

I punkt C virker gravitasjon og normalkraften fra banen på blokken. Begge er rettet nedover. Kreftene er årsak til sentripetalakselerasjonen som holder sirkelen på banen. Vi bruker Newtons andre lov:

$$-mg - N = -m\frac{v_C^2}{R}$$

Betingelsen for at blokken holder kontakt er at: $N > 0$

$$N = m\frac{v_C^2}{R} - mg > 0$$
$$v_C > \sqrt{Rg}$$

d. Hvor høyt over bordet må blokken slippes for å gå rundt loopen? (3 poeng)

Vi setter inn resultat fra b.

$$2g(h - 2R) > Rg$$
$$h > \frac{5}{2}R$$

e. Hvor langt sklir blokken på bordet før den stanser? (3 poeng)

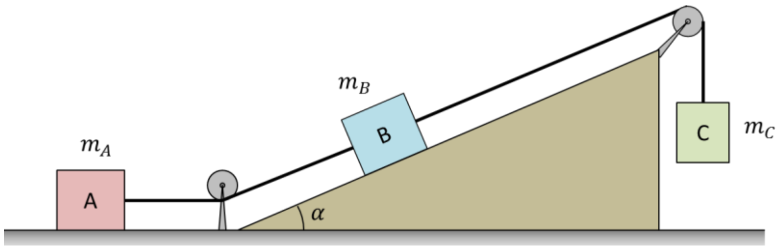
Friksjonskraften gjør arbeid på blokken:

$$W_{BD} = \int_{x_B}^{x_D} f_r \, dx = -\int_{x_B}^{x_D} \mu_d N \, dx = -\mu_d mg(x_D - x_B) = -\mu_d mgs$$

Arbeid-energi teorem: $W_{BD} = K(x_D) - K(x_B)$

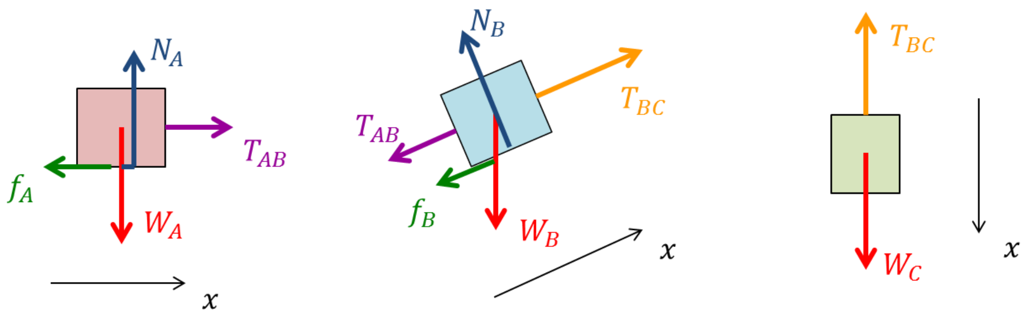
$$-\mu_d mgs = 0 - \frac{m}{2}v_B^2$$
$$\mu_d gs = \frac{1}{2}2gh = gh$$
$$s = \frac{h}{\mu_d}$$

Oppgave 4 (14 poeng)



Klossene A, B og C er festet i en masseløs strikk og er plassert over en kile ved hjelp av trinser som vist i figuren. Klossene A og B har samme masse: $m_A = m_B = m$. Det er friksjon mellom klossene og underlag, og den dynamiske friksjonskoeffisienten er μ_d for både kloss A og B. Trinsene kan anses som masseløs og uten friksjon. Kloss C beveger seg ned med konstant hastighet. (Tips: Det er hensiktsmessig å definere x retning langs strikken, altså til høyre for kloss A, opp langs skråplanet for kloss B, og vertikalt ned for kloss C.)

a. Tegn frilegemediagrammer separat for alle tre klosser. (3 poeng)



b. Finn et uttrykk for snordragene T_{AB} mellom klossene A og B og T_{BC} mellom klossene B og C som funksjon av massene, friksjonskoeffisient μ_d og tyngdeakselerasjon g. (3 poeng)
Alle klosser beveger seg med konstant hastighet. Vi bruker Newtons andre lov for kloss A i vertikal retning:
$$N_A - W_A = 0$$
$$N_A = W_A = m_A g = mg$$
I horisontal retning:
$$T_{AB} - f_A = 0$$
$$T_{AB} = f_A = \mu_d N_A = \mu_d mg$$
For å finne T_{BC} bruker vi Newtons andre lov for kloss C:
$$W_C - T_{BC} = 0$$
$$T_{BC} = W_C = m_C g$$

c. Finn et uttrykk for massen til kloss C, m_C, som funksjon av masse m, friksjonskoeffisient μ_d og vinkel α. (5 poeng)
Vi finner normalkraften N_B ved bruk av Newtons andre lov vinkelrett på skråplanet:
$$N_B - W_B \cos\alpha = 0$$

$$N_B = W_B \cos\alpha = m_B g \cos\alpha = mg\cos\alpha$$

For friksjonskraft f_B finner vi:

$$f_B = \mu_d N_B = \mu_d mg\cos\alpha$$

Vi bruker Newtons andre lov for kloss B i x retning:

$$T_{BC} - T_{AB} - f_B - W_B \sin\alpha = 0$$

$$m_C g - \mu_d mg - \mu_d mg\cos\alpha - mg\sin\alpha = 0$$

$$m_C = m(\mu_d(1+\cos\alpha) + \sin\alpha)$$

d. Hva er akselerasjon til kloss C når du klipper strikken mellom kloss A og B? (3 poeng)

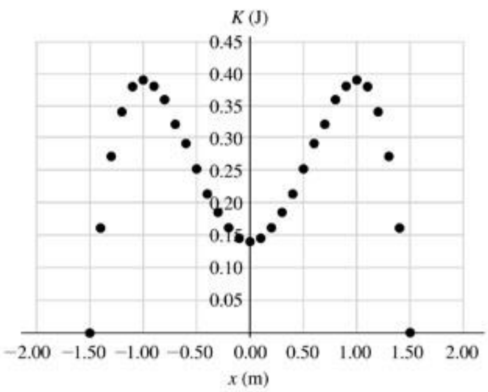
Vi betrakter klossene B og C som ett system. Snordraget T_{BC} er i så fall en indre kraft. Snordraget T_{AB} er null etter vi har klippet snoren. Vi bruker Newtons andre lov for klossene B og C i x retning:

$$W_C - f_B - W_B \sin\alpha = (m_B + m_C)a$$

$$a = \frac{m_C g - \mu_d m_B g\cos\alpha - m_B g\sin\alpha}{m_B + m_C}$$

Oppgave 5 (15 poeng)

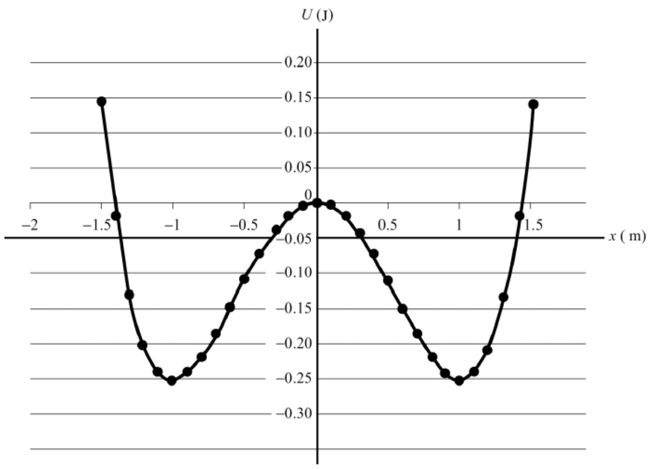
En konservativ kraft $F(x)$ virker som eneste kraft på en partikkel med masse m som beveger seg langs x aksen. Du slipper partikkelen fri uten initialhastighet ved posisjon $x_0 = -1.5$ m. Du måler hastigheten til partikkelen som funksjon av posisjon mens den beveger seg langs x aksen. Ut fra målingene beregner du den kinetiske energien K som funksjon av posisjonen. Figuren viser resultatet.



a. Du velger nullpunktet til den potensielle energien ved $x = 0$, $U(0) = 0$. Hvor mye potensiell energi $U(x_0)$ har partikkelen i startposisjonen $x_0 = -1.5$ m? Forklar! (3 poeng)

Siden kraften er konservativ er den mekaniske energien bevart og vi har $E = U + K$. Ved $x = 0$ definerer vi $U = 0$ og vi leser fra grafen at $E = K \approx 0.14$ J. Ved $x_0 = -1.5$ m er partikkelen i ro og $K(x_0) = 0$. Siden energi er bevart får vi $U(x_0) = E \approx 0.14$ J.

b. Skisser grafen for $U(x)$. (3 poeng)



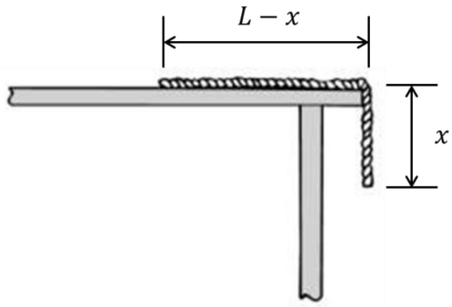
c. På hvilke verdier av x (hvis noen) er kraften $F = 0$? (3 poeng)
Vi har at $F = -\frac{dU}{dx}$. Vi leter etter punkter hvor stigning i potensialfunksjonen hvor $U(x) = 0$. Fra grafen ser vi at kraften $F = 0$ ved $x = -1$ m, $x = 0$ m og $x = 1$ m.

d. For hvilke verdiområde mellom $x = -1.5$ m og $x = 1.5$ m er kraften F positiv? For hvilke negativ? (3 poeng)
Kraften F er positiv hvis stigning i potensialfunksjonen $U(x)$ er negativ, og F er negativ hvis stigning i potensialfunksjonen $U(x)$ er positiv. Vi ser fra grafen at kraften $F(x)$ er positiv for $-1.5\text{ m} < x < -1.0\text{ m}$ og for $0\text{ m} < x < 1.0\text{ m}$. $F(x)$ er negativ for $-1.0\text{ m} < x < 0\text{ m}$ og for $1.0\text{ m} < x < 1.5\text{ m}$.

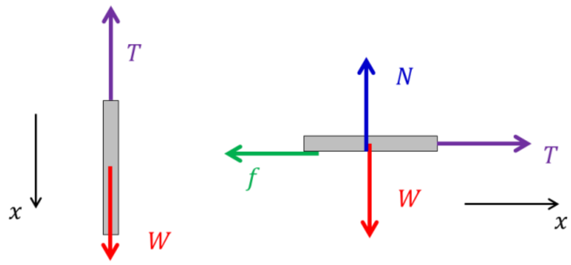
e. Hvor langt kommer partikkelen hvis du slipper den fri uten initialhastighet fra $x = -1.3$ m? Hvor stor er den kinetiske energien på sitt høyeste i denne bevegelsen? (3 poeng)
Vi ser fra grafen at den potensielle energien ved $x = -1.3$ m er $U \approx -0.13$ J. Partikkelen har altså ikke nok energi for å komme over potensialtoppen ved $x = 0$. Partikkelen vil stanser og snu ved $x \approx -0.55$ m, hvor den potensielle energien er like stor som i utgangspunktet. Den kinetiske energien er maksimal når den potensielle energien er minimal, altså ved $x = -1.0$ m. Vi bruker energibevaring: $U_0 + K_0 = U_1 + K_1$. Siden partikkelen starter i ro er $K_0 = 0$ og vi har: $K_1 = U_0 - U_1 \approx -0.13\text{ J} - (-0.25\text{ J}) = 0.12\text{ J}$.

Oppgave 6 (22 poeng)

Et homogent tau med lengde L og masse m henger over kanten til et bord som vist i figuren. Lengden til delen av tauet som henger vertikal ned over kanten er x. Systemet er i ro. Den statiske friksjonskoeffisienten mellom tau og bord er μ_s.



a. Del systemet inn i to deler, den som henger ned fra kanten med lengde x og den som ligger på bordet med lengde $L - x$, og tegn et frilegemediagram separat for hver del. (Tips: Det er igjen hensiktsmessig å definere x retning langs tauet, altså til høyre langs bordet og ned for delen som henger.) (3 poeng)



b. Finn snordraget T som virker fra den ene delen av tauet på den andre og normalkraften N fra bordet på delen av tauet på bordet, uttrykt som funksjon av x, L, m, g. (3 poeng)

Siden systemet er i ro må snordraget kompensere tyngdekraften for delen som henger ned:

$$T = \frac{x}{L} mg$$

Normalkraften må kompensere tyngdekraften for delen som ligger på bordet:

$$N = \frac{L - x}{L} mg$$

c. Hvor stor kan x maksimal være for at tauet forblir i ro uten å skli ned fra bordet? (4 poeng)

Den maksimale statiske friksjonskraften er $f_{max} = \mu_s N$. For at tauet forblir i ro må snordraget være mindre enn den maksimale friksjonskraften:

$$T < f_{max} = \mu_s N$$
$$\frac{x}{L} mg < \mu_s \frac{L - x}{L} mg$$
$$x < \mu_s (L - x)$$
$$x < \frac{\mu_s}{1 + \mu_s} L$$

Vi ser nå på en situasjon hvor bordet er glatt og det er ingen friksjon mellom tau og bordet slik at tauet sklir ned uansett hvor stor x er (so lenge $x > 0$). Vi måler posisjonen til enden av tauet vertikal ned fra bordkanten slik at posisjonen tilsvarer lengden av tauet som henger ned. Tauet slippes uten initialhastighet fra posisjon x_0.

d. Finn akselerasjon til enden av tauet. (3 poeng)

Uten friksjon er tyngdekraften til delen av tauet som henger ned den eneste kraften som gir akselerasjon (til hele tauet). Vi bruker Newtons andre lov:

$$\sum F = W = \frac{x}{L} mg = ma$$
$$a = \frac{g}{L} x$$

e. Vis at posisjonen til enden av tauet som funksjon av tiden kan beskrives ved

$$x(t) = \frac{x_0}{2} e^{t/\tau} + \frac{x_0}{2} e^{-t/\tau}$$

hvor $\tau = \sqrt{L/g}$. (4 poeng)

Vi skal vise at funksjonen er løsning til differensialligningen fra oppgave d: $\ddot{x} = \frac{L}{g} x$

Vi deriverer:

$$\dot{x}(t) = \frac{x_0}{2\tau} e^{t/\tau} - \frac{x_0}{2\tau} e^{-t/\tau}$$
$$\ddot{x}(t) = \frac{x_0}{2\tau^2} e^{t/\tau} + \frac{x_0}{2\tau^2} e^{-t/\tau} = \frac{1}{\tau^2} x(t) = \frac{g}{L} x(t)$$

og ser at funksjonen løser differensialligningen.

Til slutt ser vi på situasjonen hvor tauet sklir ned med friksjon mellom tauet og bordet. Den dynamiske friksjonskoeffisienten er μ_d.

f. Finn akselerasjon til enden av tauet og skriv et program som finner posisjonen og hastigheten til enden av tauet som en funksjon av tid. Det er tilstrekkelig å ta med integrasjonsløkken. (5 poeng)

Vi bruker igjen Newtons andre lov og får:

$$\sum F = W - f = \frac{x}{L}mg - \mu_s \frac{L-x}{L}mg = ma$$

$$a = \frac{x}{L}g - \mu_s \frac{L-x}{L}g$$

```
while (x(i)<l)
    a = g/l*x(i)-g/l*(l-x(i))*mu;
    v(i+1) = v(i) + a*dt;
    x(i+1) = x(i) + v(i+1)*dt;
    t(i+1) = t(i)+dt;
    i = i+1;
end
```

***

Dette er siste ark i oppgavesettet. Lykke til med oppgavene!