UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

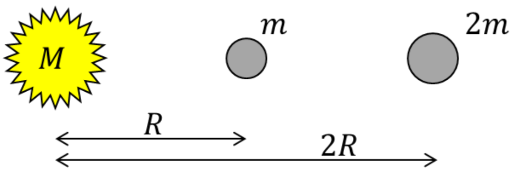
Eksamen i: FYS-MEK 1110
Eksamensdag: 3 juni 2015
Tid for eksamen: 14:30 – 18:30 (4 timer)
Oppgavesettet er på 5 sider
Vedlegg: Formelark
Tillatte hjelpemidler:
Øgrim og Lian: *Størrelser og enheter i fysikk og teknikk* eller
Angell, Lian, Øgrim: *Fysiske størrelser og enheter: Navn og symboler*
Rottmann: *Matematisk formelsamling*
Elektronisk kalkulator av godkjent type.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.
Husk å forklare hvordan du løser problemene og begrunn svarene dine.

Oppgave 1 (8 poeng)

To planeter med henholdsvis masse m og $2m$ beveger seg i sirkulære baner rundt en stjerne med masse M i avstand R og $2R$. Kraften som virker fra stjernen på planetene er gitt ved Newtons gravitasjonslov:

$$\vec{F}_G = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{e}_r$$



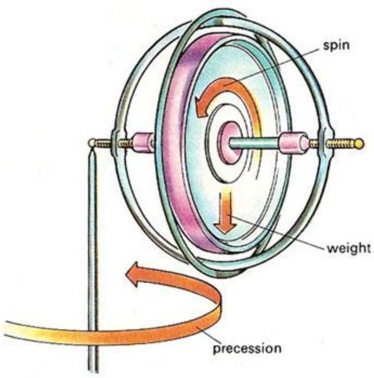
Massen til stjernen er mye større enn massen til planetene: $M \gg m$. Du kan anta at stjernen er i ro og kraften mellom de to planetene kan neglisjeres.

a. Finn banehastigheten til planetene. Hvilken planet har større banehastighet? (4 poeng)

b. Finn spinnet til planetene rundt stjernen. Hvilken planet har større spinn? (4 poeng)

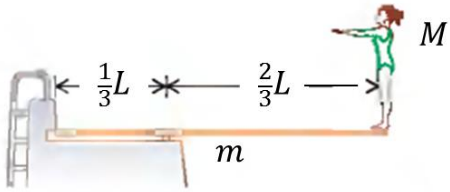
Oppgave 2 (5 poeng)

Du studerer bevegelsen til et gyroskop i auditoriet på Blindern og du måler at presesjonsbevegelsen har en vinkelhastighet på $\Omega = 0.3$ rad/s. Hvis du tar det samme gyroskopet til månen, der tyngdeakselerasjonen er en sjettedel sammenlignet med den på jorden, $g_M = \frac{1}{6}g_E$, og du setter opp forsøket på identisk måte, hvilken vinkelhastighet vil du måle for presesjonsbevegelsen? Forklar!



Oppgave 3 (8 poeng)

Et stupebrett med lengde L er festet i den ene enden og støttet nedenfra i et punkt som ligger i en avstand $\frac{1}{3}L$ fra den fastspente enden (se figur). Brettet er stivt og har masse m. En person med masse M står på den frie enden av brettet.



a. Tegn et frilegeme diagram for stupebrettet og navngi alle kreftene. (3 poeng)

b. Finn kraften som virker på støttepunktet og kraften på den fastspente enden av brettet. Skriv kreftene som funksjon av massene m og M og tyngdeakselerasjonen g. (5 poeng)

Oppgave 4 (17 poeng)

I denne oppgaven skal vi studere et atom på en atomær overflate. Vi beskriver vekselvirkningen mellom atomet og overflaten ved den potensielle energien til atomet som funksjon av posisjonen x langs overflaten:

$$U(x) = U_0\left(1 - \cos\left(\frac{2\pi x}{x_0}\right)\right)$$

Atomet har massen m og beveger seg kun langs x aksen. Du kan neglisjere alle andre krefter.

a. Finn et uttrykk for kraften som virker på atomet. (3 poeng)

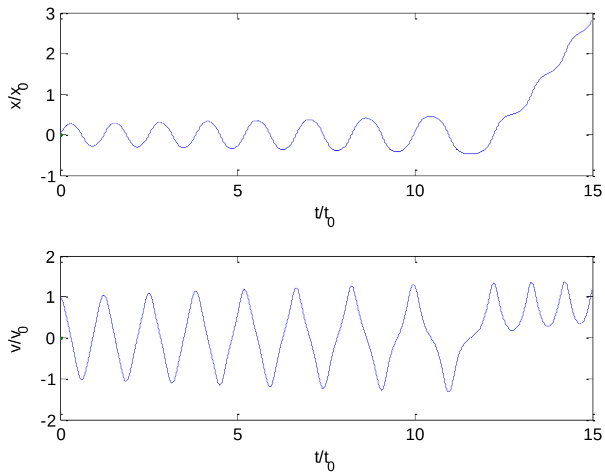
b. Vis at når $x \ll x_0$ kan bevegelsesligningen tilnærmet skrives som:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

og finn ω. Beskriv bevegelsen til atomet i dette grensetilfelle. (5 poeng)

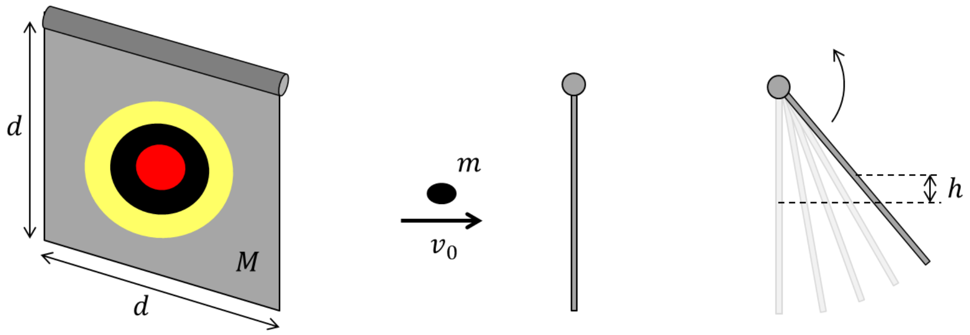
c. Atomet starter i posisjonen $x = 0$ med hastigheten v_0. Hvor stor må $v_0$være for at atomet skal nå posisjonen $x = 4x_0$? Skisser bevegelsen $x(t)$ og $v(t)$ til atomet i dette tilfellet. (4 poeng)

d. For å løse bevegelsesligningene for atomet i det generelle tilfellet har du utviklet et program som finner posisjonen og hastigheten til atomet numerisk ved hjelp av Eulers metode. Du gjør en simulering med realistiske parametere og initialbetingelsene $x = 0$ og $v = v_0$ ved tiden $t = 0$ og får resultatet i figuren nedenfor. Er resultatet fornuftig? Forklar! (5 poeng)



Oppgave 5 (26 poeng)

Et mål på en skytebane består av en tynn kvadratisk metallskive som henger ned vertikalt fra et hengsel. Skiven kan rotere fritt uten friksjon om en horisontal akse langs sin øvre kant. Skiven har masse M og kantene har lengde d. Treghetsmomentet til skiven om rotasjonsaksen er $I = \frac{1}{3}Md^2$. En blykule med masse $m = \frac{M}{3}$ treffer skiven midt i blinken med hastighet v_0. Prosjektilet fester seg midt på skiven og prosjektil og skive beveger seg som ett etter kollisjonen. Du kan anta at kulen har ingen utstrekning.



a. Vis at treghetsmomentet til hele systemet som består av skiven og prosjektilet kan skrives som:

$$I_{tot} = \frac{5}{4}md^2$$

(3 poeng)

b. Diskuter hvilke av følgende størrelser er bevart under kollisjonen mellom prosjektilet og skiven: mekanisk energi, bevegelsesmengde, spinn. Begrunn svarene dine! (5 poeng)

c. Vis at vinkelhastigheten til skiven etter kollisjonen med prosjektilet er:

$$\omega = \frac{2}{5}\frac{v_0}{d}$$

(3 poeng)

d. Hvilken høyde h over likevektsposisjonen når massesenteret til skiven før den begynner å svinge ned igjen? (4 poeng)

e. Hvor stor må hastigheten til prosjektilet være for at skiven gjør en full rotasjon?

(3 poeng)

I resten av oppgaven bruker vi et gummiprosjektil i stedet for en blykule. Gummiprosjektilet har samme masse $m = \frac{M}{3}$ og treffer skiven også i sentrum, men den spretter tilbake med hastighet v_1 etter en elastisk kollisjon med skiven.

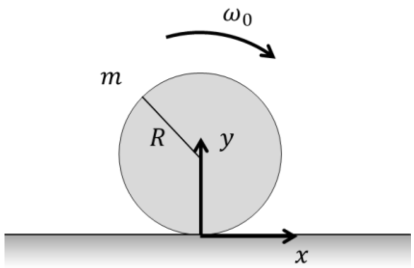
f. Vis at hastighet til prosjektilet umiddelbart etter kollisjonen er

$$v_1 = -\frac{3}{5}v_0$$

(5 points)

g. Finn vinkelhastigheten til skiven umiddelbart etter kollisjonen. Hvilken kule gir en større høyde h? (3 poeng)

Oppgave 6 (30 poeng)



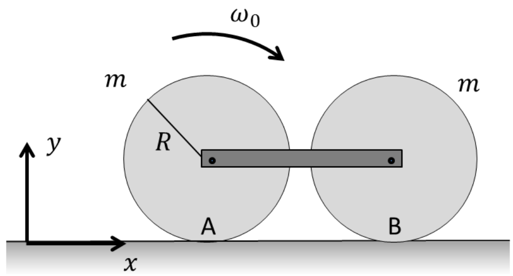
En sylinder som roterer om sin symmetriakse settes ned på en horisontal flate. Sylinderen har masse m, radius R, og treghetsmomentet er $I = \frac{1}{2}mR^2$. I begynnelsen sklir sylinderen, og den dynamiske friksjonskoeffisienten mellom sylinderen og overflaten er μ_d. Tyngdens akselerasjon er g. Vi velger x-aksen horisontal langs flaten som vist i figuren. Sylinderen settes ned ved tidspunkt $t = 0$ i posisjon $x(0) = x_0 = 0$. Initialhastigheten er $v(0) = v_0 = 0$, og i begynnelsen er vinkelhastigheten $\vec{\omega}_0 = -\omega_0\hat{k}$, som betyr at sylinderen roterer med klokken. Du kan se bort fra luftmotstanden.

a. Tegn et frilegeme diagram for sylinderen og uttrykk alle krefter ved hjelp av m, g, og μ. (4 poeng)

b. Finn posisjonen til sylinderen som funksjon av tiden fram til det øyeblikket da sylinderen begynner å rulle uten å skli. (4 poeng)

c. Finn vinkelhastigheten til sylinderen som funksjon av tiden fram til det øyeblikket da sylinderen begynner å rulle uten å skli. (5 poeng)

d. Vis at sylinderen begynner å rulle uten å skli ved tiden $t = \frac{\omega_0 R}{3\mu g}$. (4 poeng)



I resten av oppgaven betrakter vi en enkel modell for en lekebil. Bilen består av to identiske hjul som er festet sammen med en masseløs stang som vist i figuren. Hvert hjul har masse m, radius R, og treghetsmoment $I = \frac{1}{2}mR^2$. Hjulene roterer uten friksjon om festene i stangen. Til å begynne med gis det bakerste hjul A en vinkelhastighet $\vec{\omega}_0 = -\omega_0\hat{k}$. Hjul B på fremre enden starter i ro. Bilen settes ned på en horisontal flate og slippes fri. Vi antar at i begynnelsen vil det bakerste hjul A skli mot underlaget, mens det fremre hjul B vil rulle uten å skli. De dynamiske og statiske friksjonskoeffisienter er henholdsvis μ_d og μ_s.

e. Tegn et frilegemediagram separat for begge hjulene og navngi alle kreftene. (3 poeng)

f. Vis at den statiske friksjonskraften mellom hjul B og underlaget er relatert til akselerasjonen som:

$$f_s = \frac{1}{2}ma$$

(5 poeng)

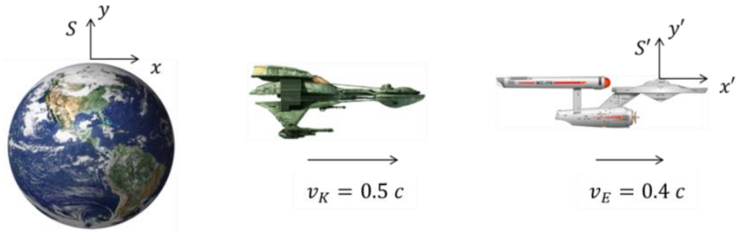
g. Vis at akselerasjonen til bilen etter at den er satt ned på flaten er:

$$a = \frac{2}{5}\mu g$$

(5 poeng)

Oppgave 7 (6 poeng)

Romskipet Enterprise er forfulgt av et fiendtlig Klingon Bird-of-Prey romskip. En observatør på jorden (i system S) måler at hastigheten til Enterprise er $v_E = 0.4\ c$ i retning bort fra jorden og hastigheten til Klingon skipet er $v_K = 0.5\ c$ i samme retning. Hva er hastigheten $v_K{}'$ til Klingon skipet som Captain Kirk måler fra Enterprise (i system S')?



***

Dette er siste ark i oppgavesettet. Lykke til med oppgavene!

Formelark FYS-MEK 1110

$\sum \vec{F} = m\vec{a} = \frac{d\vec{p}}{dt}$, hvor $\vec{p} = m\vec{v} = m\frac{d\vec{r}}{dt}$ og $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

Konstant $\vec{a}$: $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$, $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$, $v^2 - v_0^2 = 2\vec{a}\cdot(\vec{r} - \vec{r}_0)$

Konstant α: $\omega = \omega_0 + \alpha t$, $\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$, $\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha(\theta - \theta_0)$

Baneakselerasjon: $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}\hat{u}_T + \frac{v^2}{\rho}\hat{u}_N$

Rotasjon: $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, $\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,)$

Galilei transformasjon: $\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}\,'$, $\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}\,'$

Fjærkraft: $F(x) = -k(x - x_0)$, luftmotstand: $\vec{F}_v = -k\vec{v}$ eller $\vec{F}_v = -Dv\vec{v}$

Statisk friksjon: $|F_s| \leq \mu_s N$, dynamisk friksjon: $|F_d| = \mu_d N$

Arbeid: $W_{AB} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = K_B - K_A$, kinetisk energi: $K = \frac{1}{2}mv^2$

Potensiell energi for gravitasjon: $U = mgy$, for fjærkraft: $U = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2$

Konservativ kraft: $\vec{F} = -\vec{\nabla}U(\vec{r})$

Impuls: $\vec{J} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}dt = \Delta\vec{p} = \vec{p}(t_1) - \vec{p}(t_0)$

Rakettligningen: $\vec{F}^{\text{ext}} + \vec{v}_{\text{rel}}\frac{dm}{dt} = m\vec{a}$

Massesenter: $\vec{R} = \frac{1}{M}\sum_i m_i\vec{r}_i = \frac{1}{M}\int_M \vec{r}dm$, $M = \sum_i m_i = \int_M dm$

Kraftmoment: $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$, spinn: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

Spinnsats: $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$, stive legemer: $L_z = I_z\omega_z$, $\tau_z = I_z\alpha_z$

Kinetisk energi: $K = \frac{1}{2}I\omega^2$, treghetsmoment: $I = \sum_i m_i\rho_i^2 = \int_M \rho^2 dm$

Parallellakseteoremet: $I = I_{cm} + Md^2$

Rullebetingelse: $V = -\omega R$

Fiktive krefter: $\vec{a}\,' = \sum F^{\text{ext}} - m\vec{A} - m\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}\,' - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}\,' - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,')$

Gravitasjon: $\vec{F}(\vec{r}) = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{u}_r$, $U(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r}$

Spenning og tøyning: $\sigma_{xx} = \frac{F_x}{A_x} = E\frac{\Delta x}{x} = E\epsilon_{xx}$, $\frac{\Delta y}{y} = -\nu\frac{\Delta x}{x}$

Lorentz transformasjon: $x' = \gamma(x - ut)$, $y' = y, z' = z$, $t' = \gamma\left(t - \frac{u}{c^2}x\right)$, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$

Relativistisk: $m = \gamma m_0$, $\vec{p} = m\vec{v}$, $E = mc^2$