UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

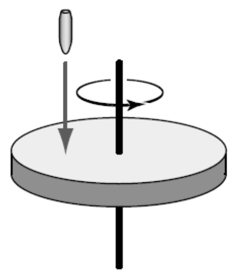
Eksamen i: FYS-MEK 1110
Eksamensdag: 7 juni 2016
Tid for eksamen: 14:30 – 18:30 (4 timer)
Oppgavesettet er på 3 sider
Vedlegg: Formelark
Tillatte hjelpemidler:

Øgrim og Lian: *Størrelser og enheter i fysikk og teknikk* eller
Angell, Lian, Øgrim: *Fysiske størrelser og enheter: Navn og symboler*
Rottmann: *Matematisk formelsamling*
Elektronisk kalkulator av godkjent type.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.
Husk å forklare hvordan du løser problemene og begrunn svarene dine.

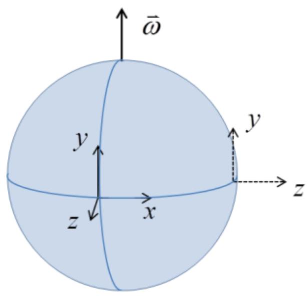
Oppgave 1 (5 poeng)

En massiv sirkulær treskive roterer friksjonsløst med vinkelhastighet ω om en fast vertikal akse som går gjennom massesenteret langs symmetriaksen. Et prosjektil som skytes inn parallelt med rotasjonsaksen treffer skiven i en avstand d fra rotasjonsaksen og blir sittende fast i skiven. Vil vinkelhastigheten til skiven endre seg ved denne prosessen? Begrunn svaret!



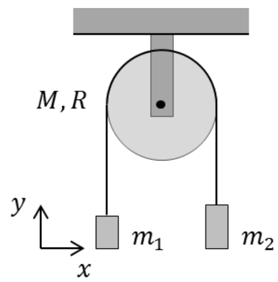
Oppgave 2 (5 poeng)

Du står på en høy bygning i Singapore (som ligger i nærheten av ekvatoren). Du er så uheldig å miste telefonen din over kanten av bygningen. Mens den faller ned til bakken virker Corioliskraften $\vec{F}_C = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}$ på telefonen, hvor $\vec{\omega}$ er jordens vinkelhastighet. Finn retningen til Corioliskraften. Du kan anta at telefonen beveger seg bare i vertikal retning. Vil telefonen lande nord, øst, sør eller vest fra posisjonen der du mistet den? Begrunn svaret!



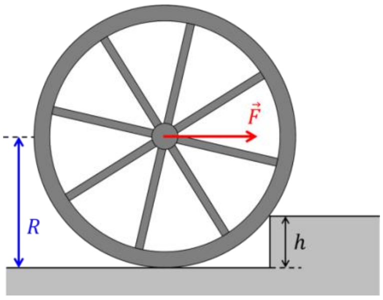
Oppgave 3 (6 poeng)

To lodder med masse $m_1 = m$ og $m_2 = 2m$ er knyttet sammen med en masseløs snor som går over et hjul med masse $M = 2m$ og radius R. Hjulet kan rotere om en stasjonær akse uten friksjon, og treghetsmomentet er $I = \frac{1}{2}MR^2$. Opprinnelig er loddene i ro på samme høyde $y = 0$. Når du slipper loddene fri synker m_2 ned mens m_1 går opp uten at snoren sklir over hjulet. Finn hastigheten til loddene som funksjon av den vertikale posisjonen. Du kan se bort fra luftmotstanden.



Oppgave 4 (11 poeng)

Du prøver å dra et sykkelhjul med masse m og radius R opp en fortauskant av høyde h. For å gjøre dette bruker du en horisontal kraft F som virker på aksen i sentrum av hjulet.



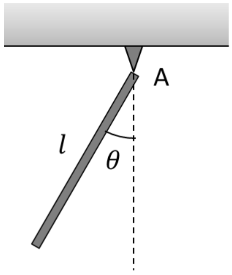
a. Tegn et frilegemediagram av hjulet og navngi alle krefter. (3 poeng)
b. Forklar kvalitativt hvordan de andre kreftene endres når du øker kraften F, men før hjulet kommer opp på fortauskanten. (3 poeng)
c. Hva er den minste kraften F som kreves for å dra hjulet opp på fortauskanten når radius av hjulet er $R = 20$ cm og høyden på fortauskanten er $h = 8$ cm? Uttrykk svaret som en funksjon av massen m og tyngdeakselerasjonen g. (5 poeng)

Oppgave 5 (20 poeng):

En tynn homogen stang med masse m og lengde l er opphengt i A som vist på figuren. Vinkelen θ måles mellom stangen og vertikalen. Vi antar at det virker ingen friksjon eller luftmotstand. Tyngdens akselerasjon er g.

Treghetsmomentet til en stang som roterer om sitt massesenter er $I_{cm} = \frac{1}{12}ml^2$.

Bevegelsen starter med at stangen slippes fra ro i horisontal stilling.



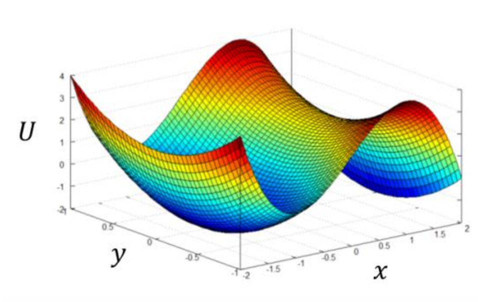
a. Finn treghetsmomentet til stangen om dreieaksen i A. (3 poeng)
b. Tegn et frilegemediagram for stangen og navngi alle krefter. (3 poeng)
c. Finn vinkelakselerasjonen som funksjon av vinkelen θ. (4poeng)
d. Vis at vinkelhastigheten som funksjon av θ er: (4 poeng)

$$\omega = \sqrt{\frac{3g\cos\theta}{l}}$$

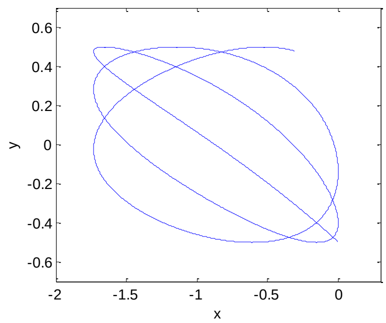
e. Finn, som funksjon av θ, kraften som virker på stangen i opphengningspunktet. Det er hensiktsmessig å dele kraften i en komponent langs stangen og en komponent normalt på stangen. (6 poeng)

Oppgave 6 (15 poeng)

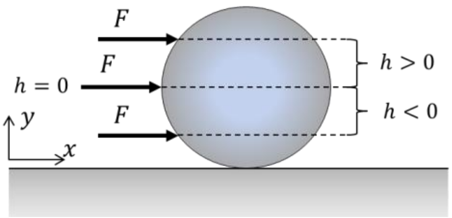
Bevegelsen til en partikkel i xy planet kan beskrives ved potensialfunksjonen $U(x,y) = 3x - x^3 + 2y^2$. Potensialet er plottet i figuren.



a. Finn kraften som virker på partikkelen i posisjon $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$. Uttrykk kraften som en vektor med komponenter i x og y retning. (3 poeng)
b. Finn likevektspunktene. Er de stabile? (3 poeng)
c. Partikkelen starter i ro fra posisjon $\vec{r}_0 = x_0\hat{\imath} + y_0\hat{\jmath}$. Skriv et program som beregner posisjon til partikkelen som funksjon av tiden. Det er tilstrekkelig å ta med integrasjonsløkken. (5 poeng)
d. Du kjører programmet for en partikkel som starter ved posisjon $\vec{r}_0 = -0.5\hat{\jmath}$ og du plotter posisjonen i xy planet som funksjon av tiden. Du får resultatet som er vist i figuren. Tolk resultatet og beskriv bevegelsen til partikkelen. (4 poeng)



Oppgave 7 (28 poeng):



En biljardkule av masse m og radius R ligger i ro på et horisontalt bord. Den dynamiske friksjonskoeffisienten mellom kulen og overflaten på bordet er μ_d. Tyngdeakselerasjonen er g. Treghetsmoment til kulen er $I = \frac{2}{5}mR^2$. Du støter kulen med en konstant horisontal kraft F på en høyde h som måles i forhold til midten av kulen, som vist på figuren. Vi definerer positiv vinkelhastighet (om z-aksen) i retning mot klokken og positiv hastighet mot høyre i x-retningen. Først analyserer vi bevegelsen etter støtet og vi antar at vi kjenner initialbetingelsene til bevegelsen. Vi ser på tilfellet hvor du treffer kulen i midten på høyden $h = 0$, slik at kulen får en translatorisk initialhastighet v_0, men ingen initialvinkelhastighet, $\omega_0 = 0$. Vi ignorerer luftmotstanden.

a. Tegn et frilegemediagram for ballen umiddelbart etter støtet (slik at kraften F ikke lenger virker) og uttrykk alle kreftene som en funksjon av m, g og μ_d. (3 poeng)
b. Finn uttrykker for translatorisk akselerasjon og vinkelakselerasjon til kulen etter støtet. Hvor lenge er disse uttrykkene gyldig? (4 poeng)
c. Finn hastigheten, $v(t)$, og vinkelhastigheten, $\omega(t)$, som funksjon av tiden for kulen fram til tidspunktet når den begynner å rulle uten å skli. Beskriv bevegelsen til kulen. (4 poeng)
d. Finn tidspunktet t_r når kulen begynner å rulle uten å skli. (4 poeng)

Vi ser nå nærmere på kollisjonen mellom køen og kulen som resulterer i en initialhastighet v_0 og en initialvinkelhastighet ω_0. Køen støter kulen på høyden h i forhold til sentrum. Vi antar at kraften F er konstant og virker i løpet av en kort tid Δt. Alle andre krefter kan neglisjeres i løpet av den korte perioden Δt.

e. Finn et uttrykk for translatorisk akselerasjon og vinkelakselerasjon til ballen under støtet med køen som en funksjon av massen m, kraften F, radiusen R og høyden h. (3 poeng)
f. Finn et uttrykk for hastigheten v_0 og vinkelhastigheten ω_0 umiddelbart etter støtet som en funksjon av varigheten Δt, og vis at sammenheng mellom hastighet og vinkelhastighet er: (4 poeng)

$$\omega_0 = -\frac{5}{2}\frac{h}{R^2}v_0$$

g. Hvis du ønsker å støte kulen slik at den ruller uten å skli helt fra starten, i hvilken høyde h_r bør du treffe kulen? (3 poeng)
h. Hvilken retning har friksjonskraften hvis du støter kulen ved høyde $h > h_r$? Beskriv bevegelsen til kulen i dette tilfellet. (3 poeng)

***

Dette er siste ark i oppgavesettet. Lykke til med oppgavene!

Formelark FYS-MEK 1110

$\sum \vec{F} = m\vec{a} = \frac{d\vec{p}}{dt}$, hvor $\vec{p} = m\vec{v} = m\frac{d\vec{r}}{dt}$ og $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

Konstant $\vec{a}$: $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t,\quad \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2,\quad v^2 - v_0^2 = 2\vec{a}\cdot(\vec{r} - \vec{r}_0)$

Konstant α: $\omega = \omega_0 + \alpha t,\ \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2,\ \omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha(\theta - \theta_0)$

Baneakselerasjon: $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}\hat{u}_T + \frac{v^2}{\rho}\hat{u}_N$

Rotasjon: $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r},\quad \vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,)$

Galilei transformasjon: $\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}\,',\quad \vec{v} = \vec{V} + \vec{v}\,'$

Fjærkraft: $F(x) = -k(x - x_0)$, luftmotstand: $\vec{F}_v = -k\vec{v}$ eller $\vec{F}_v = -Dv\vec{v}$

Statisk friksjon: $|F_s| \le \mu_s N$, dynamisk friksjon: $|F_d| = \mu_d N$

Arbeid: $W_{AB} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = K_B - K_A$, kinetisk energi: $K = \frac{1}{2}mv^2$

Potensiell energi for gravitasjon: $U = mgy$, for fjærkraft: $U = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2$

Konservativ kraft: $\vec{F} = -\vec{\nabla}U(\vec{r})$

Impuls: $\vec{J} = \int_{t_0}^{t_1}\vec{F}dt = \Delta\vec{p} = \vec{p}(t_1) - \vec{p}(t_0)$

Rakettligningen: $\vec{F}^{\text{ext}} + \vec{v}_{\text{rel}}\frac{dm}{dt} = m\vec{a}$

Massesenter: $\vec{R} = \frac{1}{M}\sum_i m_i\vec{r}_i = \frac{1}{M}\int_M \vec{r}\,dm,\quad M = \sum_i m_i = \int_M dm$

Kraftmoment: $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$, spinn: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

Spinnsats: $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$, stive legemer: $L_z = I_z\omega_z,\quad \tau_z = I_z\alpha_z$

Kinetisk energi: $K = \frac{1}{2}I\omega^2$, treghetsmoment: $I = \sum_i m_i\rho_i^2 = \int_M \rho^2 dm$

Parallellakseteoremet: $I = I_{cm} + Md^2$

Rullebetingelse: $V = -\omega R$

Fiktive krefter: $\vec{a}\,' = \sum F^{\text{ext}} - m\vec{A} - m\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}\,' - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}\,' - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,')$

Gravitasjon: $\vec{F}(\vec{r}) = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{u}_r,\quad U(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r}$

Spenning og tøyning: $\sigma_{xx} = \frac{F_x}{A_x} = E\frac{\Delta x}{x} = E\epsilon_{xx},\quad \frac{\Delta y}{y} = -\nu\frac{\Delta x}{x}$

Lorentz transformasjon: $x' = \gamma(x - ut),\quad y' = y,\quad z' = z,\quad t' = \gamma\left(t - \frac{u}{c^2}x\right),\ = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$

Relativistisk: $m = \gamma m_0,\quad \vec{p} = m\vec{v},\quad E = mc^2$