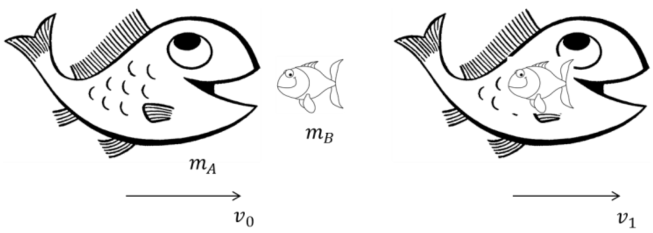
UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: FYS-MEK 1110
Eksamensdag: 6 juni 2017
Tid for eksamen: 14:30 – 18:30 (4 timer)
Oppgavesettet er på 4 sider
Vedlegg: Formelark
Tillatte hjelpemidler:
Øgrim og Lian: *Størrelser og enheter i fysikk og teknikk* eller
Angell, Lian, Øgrim: *Fysiske størrelser og enheter: Navn og symboler*
Rottmann: *Matematisk formelsamling*
Elektronisk kalkulator av godkjent type.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.
Husk å forklare hvordan du løser problemene og begrunn svarene dine.

Oppgave 1 (6 poeng)
En fisk på 20 kg svømmer i havet med $v_0 = 1$ m/s og spiser opp en mindre fisk på 5 kg som står helt stille. Du trenger ikke ta hensyn til motstandskraften i vannet.

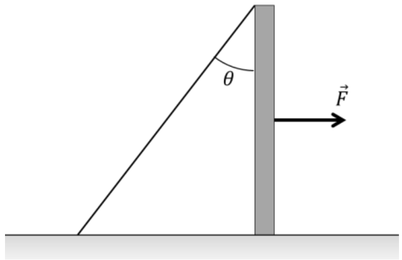


a. Med hvilken hastighet v_1 svømmer den store fisken videre etter den har spist den mindre? (3 poeng)
b. Hvor mye mekanisk energi ble tapt under middagen? (3 poeng)

Oppgave 2 (9 poeng)
Du befinner deg på en romstasjon som etter din måling er 100 m lang. To romskip suser forbi med høy hastighet. En astronaut i romskip 1 måler at romstasjonen er 60 m lang, mens en astronaut i romskip 2 måler 80 m.

a. Hvilke hastighetene måler du fra romstasjonen for de to romskipene? (4 poeng)
b. Hva er hastighet til romskip 2 målt fra romskip 1 og hva er hastighet til romskip 1 målt fra romskip 2? (5 poeng)

Oppgave 3 (15 poeng)



En stang med masse m og høyde h står på en horisontal overflate. Den statiske friksjonskoeffisienten mellom stangen og bakken er μ_s. Den øvre enden av stangen er festet til bakken med et masseløst tau som vist på figuren. Tauet går ned til bakken i en rett linje med vinkel θ i forhold til vertikal retning, men uten en horisontal kraft på stangen er det ingen spenning i tauet. Dette endrer seg når en horisontal kraft $\vec{F}$ angriper midt på stangen.

a. Tegn et frilegemediagram for stangen når den horisontale kraften $\vec{F}$ virker og navngi alle krefter. (4 poeng)

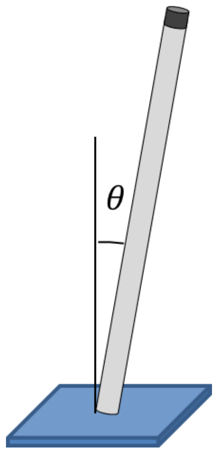
b. Vis at spenningen i tauet er:

$$|\vec{T}| = \frac{|\vec{F}|}{2\sin\theta}$$

(5 poeng)

c. Finn den maksimale horisontale kraften $|\vec{F}|$ som kan angriper i senteret av stangen uten å forårsake at den nedre enden sklir ut. (6 poeng)

Oppgave 4 (19 poeng)



En tynn stang av lengde L er laget av et lett materiale, men tuppen i den ene enden er laget av bly. Den totale massen av stangen er $2m$, mens massen av blytuppen alene er m. Størrelsen på blytuppen er svært liten sammenlignet med stangens lengde. Treghetsmoment for en lang, tynn, jevn stang (uten blyspiss) som roterer om en akse gjennom midtpunktet er $I_{cm} = \frac{1}{12}mL^2$.

a. Finn massesenteret til stangen med blytuppen, målt fra stangens lette ende. (3 poeng)

b. Vis at treghetsmomentet for stangen med blytuppen for rotasjon rundt den lette enden er

$$I_{tot} = \frac{4}{3}mL^2$$

(3 poeng)

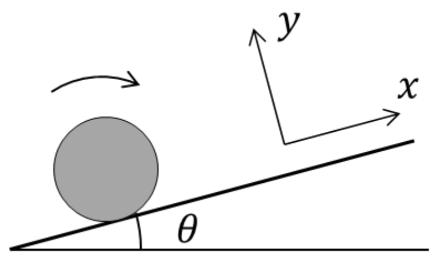
c. Du balanserer stangen på et bord slik at den står vertikalt med den lette enden på bordet. Hva er vinkelakselerasjonen av stangen når den har en helningsvinkel θ i forhold til vertikalretningen? Du kan anta at enden som er i kontakt med bordet ikke beveger seg. (4 poeng)

d. Nå balanserer du stangen på bordet slik at den står vertikalt med den tunge blyenden på bordet. Finn vinkelakselerasjonen for samme helningsvinkel θ i denne situasjonen. (Vær oppmerksom hvor massesenteret ligger nå.) Kommenter forskjellen mellom de to tilfellene i oppgavene c. og d. (4 poeng)

e. Forklar hvorfor det er enklere å balansere en biljardkø vertikalt med den lette, tynne enden på fingertuppen enn hvis du har den tunge, tykke enden på fingertuppen. (5 poeng)

Oppgave 5 (24 poeng)

En kule med masse m og radius R ruller opp en rampe uten å skli. Rampen har en helningsvinkel θ mot horisontal og koeffisienten for statisk friksjon mellom kulen og rampen er μ_s. Treghetsmoment til en kule som roterer rundt massesenteret er $I = \frac{2}{5}mR^2$. Du kan se bort fra luftmotstand.



a. Tegn et frilegemediagram for kulen og navngi alle krefter. (3 poeng)
b. Finn kraftmomentet om massesenteret for alle krefter. (3 poeng)
c. Vis at akselerasjon til massesenteret til kulen er

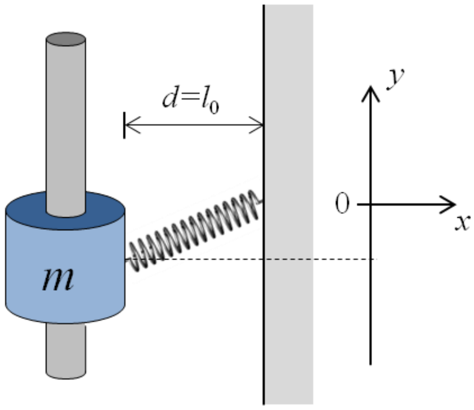
$$a_{cm} = -\frac{5}{7} g \sin\theta$$

(5 poeng)
d. Vis at den statiske friksjonskraften er

$$f = \frac{2}{7} mg \sin\theta$$

(3 poeng)
e. Hvor stor må koeffisienten for statisk friksjon minst være for at kulen ikke sklir? (4 poeng)
f. Kulen ruller opp rampen uten å skli. Initialhastigheten til kulens massesenteret i x retning er v_0 ved posisjon $x = 0$. Hvilken strekning d langs rampen vil kulen rulle før den stopper og begynner å rulle tilbake igjen? Uttrykk strekningen d som funksjon av initialhastighet v_0, vinkel θ og tyngdeakselerasjon g. Analyser og kommenter resultatet! (6 poeng)

Oppgave 6 (25 poeng):



Et sylinderskall med masse m kan skli vertikalt på en stang som vist på figuren. Utsiden til sylinderen er festet til en vegg ved hjelp av en fjær som følger Hooks lov med fjærkonstant k. Avstanden d mellom sylinderens og veggenes ytre overflater er lik fjærens likevektslengde l_0, slik at fjærkraften er null når fjæren er i horisontal posisjon. Vi definerer $y = 0$ som sylinderens vertikale posisjon når fjæren er horisontal. Koeffisientene for statisk og dynamisk friksjon er henholdsvis μ_s og μ_d. Du kan se bort fra luftmotstanden i hele oppgaven.

a. Tegn et frilegemediagram for sylinderen når den er i ro i sin likevektsposisjon og navngi kreftene. (4 poeng)

b. Vis at den vertikale komponenten av fjærkraften kan skrives som:

$$F_{k,y} = -ky\left(1 - \frac{d}{\sqrt{y^2 + d^2}}\right)$$

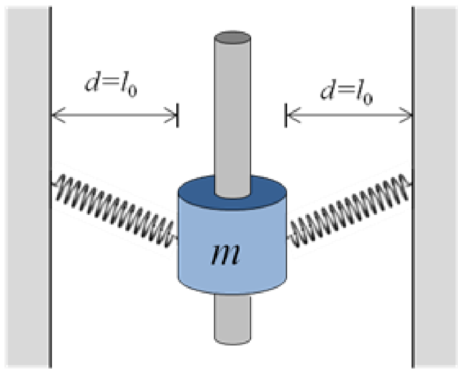
(4 poeng)

c. Finn den horisontale komponenten til fjærkraften. (3 poeng)

d. Vi antar at sylinderen befinner seg i vertikal posisjon y og beveger seg med hastighet v_y (hvor hastigheten kan være positiv eller negativ). Finn et uttrykk for den dynamiske friksjonskraften. Vær oppmerksom på fortegnet til friksjonskraften. (4 poeng)

e. Skriv et program for å finne den vertikale posisjonen og hastigheten til sylinderen som funksjon av tiden. Det er tilstrekkelig å skrive integrasjonsløkken. (5 poeng)

f. Hvordan vil bevegelsen endrer seg når du fester en annen, identisk fjær på den andre siden av sylinderen til en annen vegg i samme avstand som vist på figuren? Forklar og beskriv bevegelsen når du drar sylinderen ned og slipper den fri! (5 poeng)



***

Dette er siste ark i oppgavesettet. Lykke til med oppgavene!

Formelark FYS-MEK 1110

$\sum \vec{F} = m\vec{a} = \frac{d\vec{p}}{dt}$, hvor $\vec{p} = m\vec{v} = m\frac{d\vec{r}}{dt}$ og $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

Konstant $\vec{a}$: $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t, \quad \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2, \quad v^2 - v_0^2 = 2\vec{a}\cdot(\vec{r} - \vec{r}_0)$

Konstant α: $\omega = \omega_0 + \alpha t, \; \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2, \; \omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha(\theta - \theta_0)$

Baneakselerasjon: $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}\hat{u}_T + \frac{v^2}{\rho}\hat{u}_N$

Rotasjon: $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad \vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

Galilei transformasjon: $\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}', \quad \vec{v} = \vec{V} + \vec{v}'$

Fjærkraft: $F(x) = -k(x - x_0)$, luftmotstand: $\vec{F}_v = -k\vec{v}$ eller $\vec{F}_v = -Dv\vec{v}$

Statisk friksjon: $|F_s| \leq \mu_s N$, dynamisk friksjon: $|F_d| = \mu_d N$

Arbeid: $W_{AB} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = K_B - K_A$, kinetisk energi: $K = \frac{1}{2}mv^2$

Potensiell energi for gravitasjon: $U = mgy$, for fjærkraft: $U = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2$

Konservativ kraft: $\vec{F} = -\vec{\nabla}U(\vec{r})$

Impuls: $\vec{J} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}dt = \Delta\vec{p} = \vec{p}(t_1) - \vec{p}(t_0)$

Rakettligningen: $\vec{F}^{\text{ext}} + \vec{v}_{\text{rel}}\frac{dm}{dt} = m\vec{a}$

Massesenter: $\vec{R} = \frac{1}{M}\sum_i m_i\vec{r}_i = \frac{1}{M}\int_M \vec{r}dm, \quad M = \sum_i m_i = \int_M dm$

Kraftmoment: $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$, spinn: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

Spinnsats: $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$, stive legemer: $L_z = I_z\omega_z, \quad \tau_z = I_z\alpha_z$

Kinetisk energi: $K = \frac{1}{2}I\omega^2$, treghetsmoment: $I = \sum_i m_i\rho_i^2 = \int_M \rho^2 dm$

Parallellakseteoremet: $I = I_{cm} + Md^2$

Rullebetingelse: $V = -\omega R$

Fiktive krefter: $m\vec{a}' = \sum F^{\text{ext}} - m\vec{A} - m\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}' - 2m\vec{\omega}\times\vec{v}' - m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')$

Gravitasjon: $\vec{F}(\vec{r}) = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{u}_r, \quad U(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r}$

Spenning og tøyning: $\sigma_{xx} = \frac{F_x}{A_x} = E\frac{\Delta x}{x} = E\epsilon_{xx}, \quad \frac{\Delta y}{y} = -\nu\frac{\Delta x}{x}$

Lorentz transformasjon: $x' = \gamma(x - ut), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \gamma\left(t - \frac{u}{c^2}x\right), \; \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$

Lorentz transformasjon for hastighet: $v' = \frac{v - u}{1 - \frac{u}{c^2}v}$