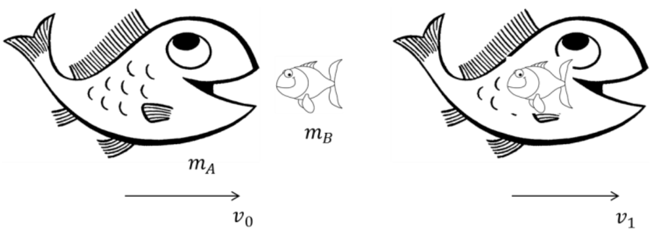
UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: FYS-MEK 1110
Eksamensdag: 6 juni 2017
Tid for eksamen: 14:30 – 18:30 (4 timer)
Oppgavesettet er på 4 sider
Vedlegg: Formelark
Tillatte hjelpemidler:
Øgrim og Lian: *Størrelser og enheter i fysikk og teknikk* eller
Angell, Lian, Øgrim: *Fysiske størrelser og enheter: Navn og symboler*
Rottmann: *Matematisk formelsamling*
Elektronisk kalkulator av godkjent type.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.
Husk å forklare hvordan du løser problemene og begrunn svarene dine.

Oppgave 1 (6 poeng)
En fisk på 20 kg svømmer i havet med $v_0 = 1$ m/s og spiser opp en mindre fisk på 5 kg som står helt stille. Du trenger ikke ta hensyn til motstandskraften i vannet.



a. Med hvilken hastighet v_1 svømmer den store fisken videre etter den har spist den mindre? (3 poeng)

Spisingen kan anses som en fullstendig uelastisk kollisjon. Siden det ikke virker ytre krefter er bevegelsesmengden bevart: $m_A v_0 = (m_A + m_B) v_1$

$$v_1 = \frac{m_A v_0}{m_A + m_B} = \frac{20\text{ kg}}{25\text{ kg}}\, 1\text{ m/s} = 0.8\text{ m/s}$$

b. Hvor mye mekanisk energi ble tapt under middagen? (3 poeng)

$$\Delta E = \frac{1}{2} m_A v_0^2 - \frac{1}{2}(m_A + m_B) v_1^2 = 10\text{ J} - 8\text{ J} = 2\text{ J}$$

Oppgave 2 (9 poeng)
Du befinner deg på en romstasjon som etter din måling er 100 m lang. To romskip suser forbi med høy hastighet. En astronaut i romskip 1 måler at romstasjonen er 60 m lang, mens en astronaut i romskip 2 måler 80 m.

a. Hvilke hastighetene måler du fra romstasjonen for de to romskipene? (4 poeng)

Du måler egenlengde til romstasjonen, mens astronautene i de to romskipene beveger seg relativ til romstasjonen og måler en lengde som er kortere enn egenlengden. For lendekontraksjon gjelder:

$$L = \frac{L_0}{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} L_0$$

Vi kjenner lengden i begge systemer og vil finne relativhastigheten u:

$$\left(\frac{L}{L_0}\right)^2 = 1 - \frac{u^2}{c^2}$$

$$u = c\sqrt{1 - \left(\frac{L}{L_0}\right)^2}$$

For astronauten 1 i romskip 1:

$$u = v_1 = c\sqrt{1 - 0.6^2} = 0.8c$$

For astronauten 2 i romskip 2:

$$u = v_2 = c\sqrt{1 - 0.8^2} = 0.6c$$

b. Hva er hastighet til romskip 2 målt fra romskip 1 og hva er hastighet til romskip 1 målt fra romskip 2? (5 poeng)

Vi bruker Lorentztransformasjon for hastighet (se formelark):

$$v' = \frac{v - u}{1 - \frac{u}{c^2}v}$$

Vi kaller romstasjon for system S og romskip 1 for system S'. Relativhastigheten mellom S og S' er relativhastigheten mellom deg og astronaut 1, altså $u = 0.8c$. Hastighet til romskip 2 i system S er $v_2 = 0.6c$. Hastighet til romskip 2 i system S', målt fra romskip 1, er:

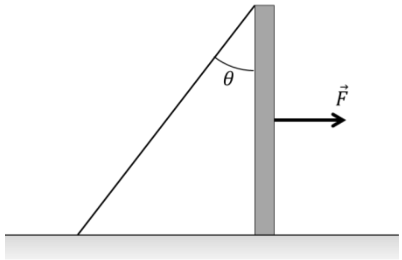
$$v_2{}' = \frac{v_2 - u}{1 - \frac{u}{c^2}v_2} = \frac{0.6c - 0.8c}{1 - 0.8 \cdot 0.6} = -\frac{0.2c}{0.52} \approx -0.38c$$

Du ser at romskip 1 kjører raskere enn romskip 2. For astronaut 1 ser det ut som astronaut 2 beveger seg i motsatt retning i forhold til seg selv. Hastighet til romskip 1 som astronaut 2 måler må være den samme men med omvendt fortegn, det vil si at astronaut 2 måler at astronaut 1 beveger seg med $v_1'' = +0.38c$ i samme retning. Dette verifiseres lett ved hjelp av Lorentztransformasjonen. Du er fortsatt i system S og vi kaller romskip 2 for system S''. Relativhastigheten mellom S og S'' er i så fall $u = v_2 = 0.6c$ og vi får:

$$v_1'' = \frac{v_1 - u}{1 - \frac{u}{c^2}v_1} = \frac{0.8c - 0.6c}{1 - 0.6 \cdot 0.8} = \frac{0.2c}{0.52} \approx 0.38c$$

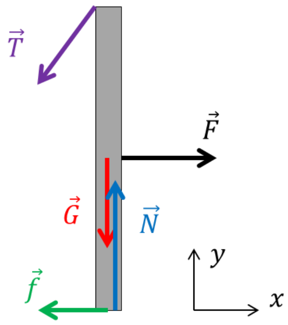
Oppgave 3 (15 poeng)

En stang med masse m og høyde h står på en horisontal overflate. Den statiske friksjonskoeffisienten mellom stangen og bakken er μ_s. Den øvre enden av stangen er festet til bakken med et masseløst tau som vist på figuren. Tauet går ned til bakken i en rett linje med vinkel θ i forhold til vertikal retning, men uten en horisontal kraft på stangen er det ingen spenning i tauet. Dette endrer seg når en horisontal kraft $\vec{F}$ angriper midt på stangen.



a. Tegn et frilegemediagram for stangen når den horisontale kraften $\vec{F}$ virker og navngi alle krefter. (4 poeng)

Vi har gravitasjonskraten $\vec{G}$, normalkraften $\vec{N}$ fra bakken på stangen, tauspenning $\vec{T}$, den statiske friksjonskraften $\vec{f}$ og den ytre kraften $\vec{F}$ som angriper i midtpunktet av stangen.



b. Vis at spenningen i tauet er:

$$|\vec{T}| = \frac{|\vec{F}|}{2\sin\theta}$$

(5 poeng)

Dette er en statisk situasjon. Summen av alle krefter må derfor være null og netto-kraftmomentet om hvilken som helst punkt må også være null. Vi bruker Newtons andre lov i horisontal retning:

$$F - f - T\sin\theta = 0$$

Vi ser på kraftmoment om punktet hvor tauet er festet. Kraften $\vec{F}$ gir et positivt kraftmoment om z aksen mens friksjonskraften gir et negativt kraftmoment. Gravitasjon og normalkraften gir ingen kraftmoment siden disse krefter er parallelle med kraftarmen.

$$\frac{1}{2}hF - hf = 0$$

Vi får $f = \frac{1}{2}F$ og setter inn:

$$F - \frac{1}{2}F = \frac{1}{2}F = T\sin\theta$$

Dette gir $T = \frac{F}{2\sin\theta}$ som skulle vises.

c. Finn den maksimale horisontale kraften $|\vec{F}|$ som kan angriper i senteret av stangen uten å forårsake at den nedre enden sklir ut. (6 poeng)

Den nedre enden av stangen sklir når friksjonskraften blir større enn maksimalverdien. Betingelsen for at stangen ikke sklir er:

$$f \leq f_{max} = \mu_s N$$

Vi kan finne normalkraften ved å bruke Newtons andre lov i vertikal retning:

$$N - G - T\cos\theta = 0$$

Ved bruk av resultatet fra oppgave b. og $G = mg$ får vi:

$$N = G + T\cos\theta = mg + \frac{F}{2\sin\theta}\cos\theta = mg + \frac{1}{2}\frac{F}{\tan\theta}$$

Vi setter inn i betingelsen for friksjonskraften og bruker $f = \frac{1}{2}F$:

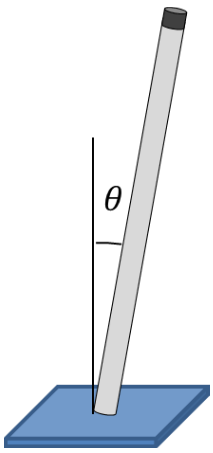
$$f \leq \mu_s N$$

$$\frac{1}{2}F \leq \mu_s \left(mg + \frac{1}{2}\frac{F}{\tan\theta} \right)$$

$$F - \mu_s \frac{F}{\tan\theta} \leq 2\mu_s mg$$

$$F \leq \frac{2\mu_s mg}{1 - \frac{\mu_s}{\tan\theta}}$$

Oppgave 4 (19 poeng)



En tynn stang av lengde L er laget av et lett materiale, men tuppen i den ene enden er laget av bly. Den totale massen av stangen er $2m$, mens massen av blytuppen alene er m. Størrelsen på blytuppen er svært liten sammenlignet med stangens lengde. Treghetsmoment for en lang, tynn, jevn stang (uten blyspiss) som roterer om en akse gjennom midtpunktet er $I_{cm} = \frac{1}{12}mL^2$.

a. Finn massesenteret til stangen med blytuppen, målt fra stangens lette ende. (3 poeng)

Stangen uten blyspiss har masse m med massesenter i midten ved $x = \frac{1}{2}L$, massen til blyspissen er også m og ligger i enden ved $x = L$. Massesenteret til stangen med blyspiss er derfor:

$$x_{cm} = \frac{1}{2m}\left(\frac{1}{2}mL + mL\right) = \frac{1}{4}L + \frac{1}{2}L = \frac{3}{4}L$$

b. Vis at treghetsmomentet for stangen med blytuppen for rotasjon rundt den lette enden er

$$I_{tot} = \frac{4}{3}mL^2$$

(3 poeng)

Treghetsmomentet settes sammen av treghetsmoment I_s til stangen uten blytupp og treghetsmoment I_{bt} til blytuppen. For å finne treghetsmoment til stangen om endepunktet bruker vi parallellakseteoremet:

$$I_{tot} = I_s + I_{bt} = I_{cm} + m\left(\frac{1}{2}L\right)^2 + I_{bt} = \frac{1}{12}mL^2 + \frac{1}{4}mL^2 + mL^2 = \frac{4}{3}mL^2$$

c. Du balanserer stangen på et bord slik at den står vertikalt med den lette enden på bordet. Hva er vinkelakselerasjonen av stangen når den har en helningsvinkel θ i forhold til vertikalretningen? Du kan anta at enden som er i kontakt med bordet ikke beveger seg. (4 poeng)

For å finne vinkelskselerasjonen kan vi bruker Newtons andre lov for rotasjonsbevegelser: $\tau = I\alpha$. Når stangen står med en vinkel θ gir komponenten av tyngdekraften som står vinkelrett på stangen et kraftmoment. Tyngdekraften angriper i massesenteret. Vi får:

$$\tau = \frac{3}{4}L \cdot 2mg \sin\theta = \frac{3}{2}Lmg \sin\theta$$

$$\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{\frac{3}{2}Lmg \sin\theta}{\frac{4}{3}mL^2} = \frac{9}{8}\frac{g}{L}\sin\theta$$

d. Nå balanserer du stangen på bordet slik at den står vertikalt med den tunge blyenden på bordet. Finn vinkelakselerasjonen for samme helningsvinkel θ i denne situasjonen. (Vær oppmerksom hvor massesenteret ligger nå.) Kommenter forskjellen mellom de to tilfellene i oppgavene c. og d. (4 poeng)

Hvis stangen roterer om den tunge enden vil blytuppen ikke bidra til treghetsmomentet, som er $I = \frac{1}{3}mL^2$. Tyngdekraften angriper nå i avstand $\frac{1}{4}L$ fra rotasjonsaksen. Kraftmoment fra tyngdekraften er:

$$\tau = \frac{1}{4}L \cdot 2mg \sin\theta = \frac{1}{2}Lmg \sin\theta$$

Vinkelakselerasjon blir nå:

$$\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{\frac{1}{2}Lmg \sin\theta}{\frac{1}{3}mL^2} = \frac{3}{2}\frac{g}{L}\sin\theta$$

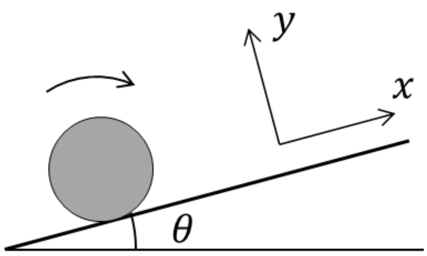
Vinkelakselerasjon er større for en gitt vinkel vis staven roterer om blytuppen enn hvis den roterer om den andre enden. Staven vil derfor falle raskere når blytuppen står på bordet.

e. Forklar hvorfor det er enklere å balansere en biljardkø vertikalt med den lette, tynne enden på fingertuppen enn hvis du har den tunge, tykke enden på fingertuppen. (5 poeng)

Massefordelingen i en biljardkø ligner på dette eksempel siden massesenteret ligger nærmere den tykke enden. Til tross for at kraftmomentet fra tyngdekraften er større hvis du balanserer den tynne enden på fingeren, så er vinkelakselerasjonen mindre siden treghetsmomentet er betydelig større. Treghetsmomentet øker kvadratisk, mens kraftmomentet øker lineær med avstanden fra rotasjonsaksen. Med mindre vinkelakselerasjon har du mer tid for å reagere og justere når køen begynner å falle.

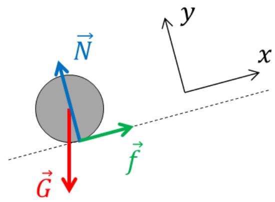
Oppgave 5 (24 poeng)

En kule med masse m og radius R ruller opp en rampe uten å skli. Rampen har en helningsvinkel θ mot horisontal og koeffisienten for statisk friksjon mellom kulen og rampen er μ_s. Treghetsmoment til en kule som roterer rundt massesenteret er $I = \frac{2}{5}mR^2$. Du kan se bort fra luftmotstand.



a. Tegn et frilegemediagram for kulen og navngi alle krefter. (3 poeng)

Vi har tyngdekraften $\vec{G}$, normalkraften $\vec{N}$ og friksjonskraften $\vec{f}$. Den statiske friksjonskraften peker opp rampen og hindrer kulen å skli ned.



b. Finn kraftmomentet om massesenteret for alle krefter. (3 poeng)

Gravitasjonskraften gir ingen kraftmoment siden den angriper i massesenteret. Normalkraften er parallell med kraftarmen og gir ingen kraftmoment heller. Bare friksjonskraften gir et kraftmoment om z aksen:

$$\vec{\tau} = -R\hat{j} \times f\hat{\imath} = Rf\hat{k}$$

c. Vis at akselerasjon til massesenteret til kulen er

$$a_{cm} = -\frac{5}{7}g\sin\theta$$

(5 poeng)

Vi bruker Newtons andre lov for rotasjonsbevegelser for å relatere friksjonskraften med vinkelakselerasjon α:

$$\tau_z = Rf = I\alpha$$

Vi vet at kulen ruller uten å skli og vi kan bruke rullebetingelsen $a_{cm} = -R\alpha$. Vi kan nå relatere friksjonskraften med akselerasjon til massesenteret:

$$f = \frac{I\alpha}{R} = -\frac{Ia_{cm}}{R^2}$$

Fortegnet er fornuftig siden vi forventer at akselerasjon er i negativ x retning, mens friksjonskraften er i positiv x retning. Vi bruker Newtons andre lov i x retning:

$$f - mg\sin\theta = ma_{cm}$$

$$-mg\sin\theta = ma_{cm} + \frac{Ia_{cm}}{R^2} = ma_{cm} + a_{cm}\frac{\frac{2}{5}mR^2}{R^2}$$

$$-g\sin\theta = a_{cm}\left(1 + \frac{2}{5}\right) = \frac{7}{5}a_{cm}$$

$$a_{cm} = -\frac{5}{7}g\sin\theta$$

som skulle vises.

d. Vis at den statiske friksjonskraften er

$$f = \frac{2}{7} mg \sin\theta$$

(3 poeng)

Vi bruker resultatet fra oppgave c. og setter inn:

$$f = -\frac{I a_{cm}}{R^2} = \frac{\frac{2}{5} mR^2}{R^2} \frac{5}{7} g \sin\theta = \frac{2}{7} mg \sin\theta$$

som skulle vises.

e. Hvor stor må koeffisienten for statisk friksjon minst være for at kulen ikke sklir? (4 poeng)

Betingelsen for at kulen ikke sklir er:

$$f \leq f_{max} = \mu_s N$$

Vi finner normalkraften ved å bruke Newtons andre lov i y retning:

$$N - mg\cos\theta = 0$$

Vi setter inn:

$$\frac{2}{7} mg \sin\theta \leq \mu_s mg \cos\theta$$

$$\mu_s \geq \frac{2}{7} \tan\theta$$

f. Kulen ruller opp rampen uten å skli. Initialhastigheten til kulens massesenteret i x retning er v_0 ved posisjon $x = 0$. Hvilken strekning d langs rampen vil kulen rulle før den stopper og begynner å rulle tilbake igjen? Uttrykk strekningen d som funksjon av initialhastighet v_0, vinkel θ og tyngdeakselerasjon g. Analyser og kommenter resultatet! (6 poeng)

Vi har flere muligheter for å finne strekningen d. Siden vi har en bevegelse med konstant akselerasjon langs skråplanet kan vi bruke sammenheng mellom hastighet og posisjon for bevegelser med konstant akselerasjon (se formelark):

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$$

Vi har $x_0 = 0$ og vi ønsker å finne posisjon $x = d$ hvor kulen snur, det vil si hvor $v = 0$. Vi setter inn akselerasjon fra oppgave c:

$$-v_0^2 = -2\frac{5}{7} gd \sin\theta$$

$$d = \frac{7}{10} \frac{v_0^2}{g \sin\theta}$$

Siden gravitasjonskraften er konservativ og både normalkraften og den statiske friksjonskraften gjør ingen arbeid kan vi alternativ bruke energibevaring for å finne strekningen. I starten har kulen både translatorisk og rotasjonell kinetisk energi, i punktet hvor kulen snur har kulen ingen kinetisk energi, men har fått potensiell energi i tyngdefeltet:

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} I \omega_0^2 = mgh = mgd \sin\theta$$

Siden kulen ruller uten å skli er vinkelhastighet relatert til lineær hastighet gjennom rullebetingelse: $v_0 = -R\omega_0$.

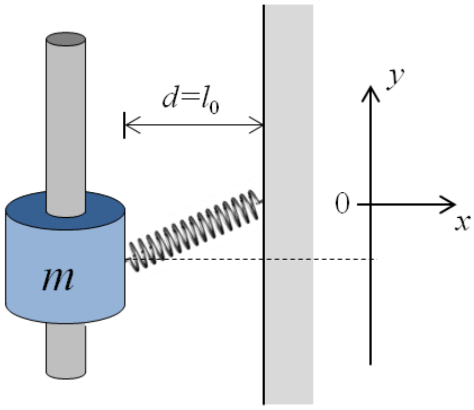
$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5}mR^2\frac{v_0^2}{R^2} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right)mv_0^2 = \frac{7}{10}mv_0^2 = mgd\sin\theta$$

$$d = \frac{7}{10}\frac{v_0^2}{g\sin\theta}$$

som er det samme resultat vi har funnet ved bruk av bevegelsesligningene. Som forventet er distansen som kulen ruller jo større jo større initialfarten er. Samtidig blir distansen større hvis helningsvinkelen blir mindre. For $\theta = 0$ går distansen som kulen ruller mot uendelig. Også dette er fornuftig siden vi ikke har tatt med dynamiske friksjonskrefter eller luftmotstand.

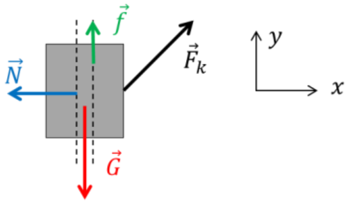
Oppgave 6 (25 poeng):

Et sylinderskall med masse m kan skli vertikalt på en stang som vist på figuren. Utsiden til sylinderen er festet til en vegg ved hjelp av en fjær som følger Hooks lov med fjærkonstant k. Avstanden d mellom sylinderens og veggenes ytre overflater er lik fjærens likevektslengde l_0, slik at fjærkraften er null når fjæren er i horisontal posisjon. Vi definerer $y = 0$ som sylinderens vertikale posisjon når fjæren er horisontal. Koeffisientene for statisk og dynamisk friksjon er henholdsvis μ_s og μ_d. Du kan se bort fra luftmotstanden i hele oppgaven.



a. Tegn et frilegemediagram for sylinderen når den er i ro i sin likevektsposisjon og navngi kreftene. (4 poeng)

Vi har tyngdekraften $\vec{G}$, fjærkraften $\vec{F}_k$, en statisk friksjonskraft $\vec{f}$ og normalkraften $\vec{N}$ fra stangen som virker på innsiden av sylinderskallet. Summen av kreftene skal være null siden sylinderen er i likevekt.



b. Vis at den vertikale komponenten av fjærkraften kan skrives som:

$$F_{k,y} = -ky\left(1 - \frac{d}{\sqrt{y^2 + d^2}}\right)$$

(4 poeng)

Når sylinderen er ved posisjon y er lengden til fjæren $l = \sqrt{y^2 + d^2}$. Størrelsen på fjærkraften er $F_k = \pm k(l - d)$. Vi kan skrive fjærkraften vektoriell som:

$$\vec{F}_k = F_{k,x}\hat{\imath} + F_{k,y}\hat{\jmath} = F_k \cos\theta\,\hat{\imath} + F_k \sin\theta\,\hat{\jmath}$$

hvor θ er vinkelen mellom fjæren og horisontal. Vi har $\sin\theta = \frac{y}{l}$ og finner:

$$F_{k,y} = F_k \sin\theta = -k(l-d)\frac{y}{l} = -ky\left(1 - \frac{d}{\sqrt{y^2+d^2}}\right)$$

som skulle vises. Vi sjekker fortegn og ser at kraften virker i positiv y retning når posisjonen til sylinderen er $y < 0$, som er riktig.

c. Finn den horisontale komponenten til fjærkraften. (3 poeng)

Vi finner x komponenten til kraften på same måte:

$$F_{k,x} = F_k \cos\theta = k(l-d)\frac{d}{l} = kd\left(1 - \frac{d}{\sqrt{y^2+d^2}}\right)$$

Vi ser at fortegn er alltid positiv, som er riktig siden fjæren bare kan bli lenger og aldri kortere enn likevektslengden. Derfor trekker fjæren sylinderen i positiv x retning uansett fortegn til den vertikale posisjonen y.

d. Vi antar at sylinderen befinner seg i vertikal posisjon y og beveger seg med hastighet v_y (hvor hastigheten kan være positiv eller negativ). Finn et uttrykk for den dynamiske friksjonskraften. Vær oppmerksom på fortegnet til friksjonskraften. (4 poeng)

Sylinderen kan ikke bevege seg horisontalt, derfor må normalkraften kompensere den horisontale komponenten av fjærkraften. Newtons andre lov i horisontal retning gir:

$$F_{k,x} - N = 0$$

$$N = kd\left(1 - \frac{d}{\sqrt{y^2+d^2}}\right)$$

Vi finner størrelsen til den dynamiske friksjonskraften:

$$|f_d| = \mu_d N = \mu_d kd\left(1 - \frac{d}{\sqrt{y^2+d^2}}\right)$$

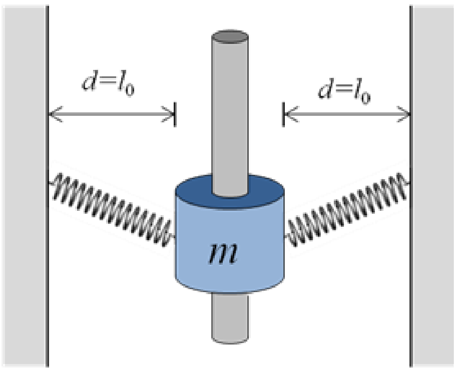
Den dynamiske friksjonskraften virker i positiv y retning når sylinderen beveger seg nedover og omvendt. Dette kan skrives som:

$$f_d = \mu_d kd\left(1 - \frac{d}{\sqrt{y^2+d^2}}\right)\frac{y_y}{|v_y|}$$

e. Skriv et program for å finne den vertikale posisjonen og hastigheten til sylinderen som funksjon av tiden. Det er tilstrekkelig å skrive integrasjonsløkken. (5 poeng)

```
for i = 1:n-1
    l = sqrt(y(i)^2+d^2);
    G = -m*g;
    Fy = -k*y(i)*(1-d/l);
    Fx = k*d*(1-d/l);
    N = Fx;
    f = -mu*N*sign(v(i));
    a = (Fy+G+f)/m;
    v(i+1) = v(i)+a*dt;
    y(i+1) = y(i)+v(i+1)*dt;
    t(i+1) = t(i)+dt;
end
```

f. Hvordan vil bevegelsen endrer seg når du fester en annen, identisk fjær på den andre siden av sylinderen til en annen vegg i samme avstand som vist på figuren? Forklar og beskriv bevegelsen når du drar sylinderen ned og slipper den fri! (5 poeng)



Med fjæren på den andre siden vil de horisontale fjærkreftene kompensere hverandre. Hvis fjærene er identiske og alle avstander likt, så virker ingen normalkraft fra stangen på innsiden av sylinderskallet. Uten normalkraft er friksjonskreftene også null og sylinderen sklir friksjonsfritt på stangen. Når du drar den ned og slipper fri svinger sylinderen opp og ned i all evighet. I realiteten vil det alltid være små forskjeller i fjærene som resulterer i små normal- og dermed små friksjonskrefter. I en mer realistisk situasjon vil også luftmotstanden dempe svingningen. Iallfall vil sylinderen svinge mye lenger enn med bare én fjær.

***

Dette er siste ark i oppgavesettet. Lykke til med oppgavene!

Formelark FYS-MEK 1110

$\sum \vec{F} = m\vec{a} = \frac{d\vec{p}}{dt}$, hvor $\vec{p} = m\vec{v} = m\frac{d\vec{r}}{dt}$ og $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

Konstant $\vec{a}$: $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$, $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$, $v^2 - v_0^2 = 2\vec{a}\cdot(\vec{r} - \vec{r}_0)$

Konstant α: $\omega = \omega_0 + \alpha t$, $\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$, $\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha(\theta - \theta_0)$

Baneakselerasjon: $\vec{a} = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + \frac{v^2}{\rho}\hat{u}_N$

Rotasjon: $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, $\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

Galilei transformasjon: $\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}'$, $\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}'$

Fjærkraft: $F(x) = -k(x - x_0)$, luftmotstand: $\vec{F}_v = -k\vec{v}$ eller $\vec{F}_v = -Dv\vec{v}$

Statisk friksjon: $|F_s| \leq \mu_s N$, dynamisk friksjon: $|F_d| = \mu_d N$

Arbeid: $W_{AB} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = K_B - K_A$, kinetisk energi: $K = \frac{1}{2}mv^2$

Potensiell energi for gravitasjon: $U = mgy$, for fjærkraft: $U = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2$

Konservativ kraft: $\vec{F} = -\vec{\nabla}U(\vec{r})$

Impuls: $\vec{J} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}dt = \Delta\vec{p} = \vec{p}(t_1) - \vec{p}(t_0)$

Rakettligningen: $\vec{F}^{\text{ext}} + \vec{v}_{\text{rel}}\frac{dm}{dt} = m\vec{a}$

Massesenter: $\vec{R} = \frac{1}{M}\sum_i m_i\vec{r}_i = \frac{1}{M}\int_M \vec{r}dm$, $M = \sum_i m_i = \int_M dm$

Kraftmoment: $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$, spinn: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

Spinnsats: $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$, stive legemer: $L_z = I_z\omega_z$, $\tau_z = I_z\alpha_z$

Kinetisk energi: $K = \frac{1}{2}I\omega^2$, treghetsmoment: $I = \sum_i m_i\rho_i^2 = \int_M \rho^2 dm$

Parallellakseteoremet: $I = I_{cm} + Md^2$

Rullebetingelse: $V = -\omega R$

Fiktive krefter: $m\vec{a}' = \sum F^{\text{ext}} - m\vec{A} - m\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}' - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$

Gravitasjon: $\vec{F}(\vec{r}) = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{u}_r$, $U(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r}$

Spenning og tøyning: $\sigma_{xx} = \frac{F_x}{A_x} = E\frac{\Delta x}{x} = E\epsilon_{xx}$, $\frac{\Delta y}{y} = -\nu\frac{\Delta x}{x}$

Lorentz transformasjon: $x' = \gamma(x - ut)$, $y' = y$, $z' = z$, $t' = \gamma\left(t - \frac{u}{c^2}x\right)$, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$

Lorentz transformasjon for hastighet: $v' = \frac{v - u}{1 - \frac{u}{c^2}v}$